

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 5

RÉDUCTION

5.1 Éléments propres

- 5.1** Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Établir : $\text{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.
- 5.2** Centrale PSI 2012 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_a = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5+2a & 3+a & 18+3a \\ 3-2a & 5-a & -18-3a \\ 9+2a & 3+a & 14+3a \end{pmatrix}$. Déterminer en fonction de a les sous-espaces F de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par l'application linéaire $u_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A_a .
- 5.3** Centrale PSI 2012 Montrer que, pour tout triplet $(A, B, C) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^3$, il existe $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aA + bB + cC$ admette une valeur propre double (commencer par le cas où (A, B, C) est liée).
- 5.4** Centrale PSI 2012 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour $f \in E$ on définit la fonction g par $g(0) = f(0)$ et $\forall x > 0, g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. On pose alors $u(f) = g$.
- a. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer ses vecteurs propres et valeurs propres.
 - b. La restriction de u au sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n est-elle diagonalisable ?
- 5.5** Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en $+\infty$. Soit T l'endomorphisme de E donné par $\forall x \in [0; +\infty[, T(f)(x) = f(x+1)$. Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.
- 5.6** Mines MP 2007 Soit $E = \{f \in C^1([0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$; pour un élément f de E on pose $T(f)$ la fonction définie par $T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$. Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.
- 5.7** Centrale PSI 2012 Soit l'espace $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les réels $p \in]-1; 1[$ et $q = 1 - p$ et, pour $f \in E$, $u(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $u(f)(x) = f(px + q)$.
- a. Montrer que u est un automorphisme de E et que ses valeurs propres sont dans $] -1; 1[$.
 - b. Soit f un vecteur propre de u . Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
 - c. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de u .
- 5.8** Centrale PSI 2012 Soit $a_1, \dots, a_p$ des réels, déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) est $a_{i,j} = a_{\text{Min}(i,j)}$ si $i + j = 2p + 1$ et 0 sinon.
- 5.9** Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ distincts 2 à 2. On pose $P(x) = \det(A + xI_n)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.
- a. Calculer $P(a_k)$ et justifier que P est un polynôme unitaire de degré n .
 - b. Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{\prod_{k=1}^n (X - a_k)}$.
 - c. En déduire le déterminant de $A + I_n$. Que vaut celui de A ?

5.10 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; c'est-à-dire trouver une matrice P inversible dans $GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

5.11 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E .

- Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^* \mid u(H) = \{0\}\}$?
- Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ ($u \in E^*$) : (H stable par f) $\iff (u \circ f$ et u colinéaires).
- Soit A et L les matrices dans $\mathcal{B}$ de f et u . Montrer : (H stable par f) $\iff$ (tL vecteur propre de tA).
- Déterminer les plans stables par u canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

5.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = M_n(\mathbb{R})$; pour $A \in E$, on introduit $u : E \rightarrow E$ défini par : $u(M) = AM$. Montrer que A et u ont les mêmes valeurs propres et préciser les sous-espaces propres de u en fonction de ceux de A .

5.13 CCP PSI 2007 d'après RMS Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 3$.

On suppose que : $\text{rang } A = 2$, $\text{Tr } A = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

5.14 Centrale PSI 2012 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On pose $A = \begin{pmatrix} B & B^2 \\ B^2 & -B \end{pmatrix}$.

- A est-elle nécessairement diagonalisable ?
- On suppose ici B diagonale, donner une CNS pour que A soit diagonalisable (commencer par $n = 1$).
- On revient au cas général, donner une CNS sur le spectre de B pour que A soit diagonalisable.

5.15 Matrices circulantes Soit pour $n \geq 2$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

b. Application : calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

5.16 Compléments OdIT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 566I

Montrer que les valeurs propres possibles de A réelle, carrée de taille n , vérifiant $A^3 = A^2 + 4A - 4I_n$ sont -2 , 1 et 2 . En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A .

5.2 Diagonalisation

5.17 Centrale PSI 2012 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ notée $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On suppose que les 9 coefficients de A sont des entiers relatifs (soit $A \in M_3(\mathbb{Z})$). On suppose enfin qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $u^p = \text{id}_E$.

- Montrer que $u \in GL(E)$. À quelle condition nécessaire et suffisante u est-il diagonalisable ? Comment appelle-t-on ces endomorphismes u diagonalisables ?

On suppose dans toute la suite que u n'est pas diagonalisable.

- Montrer qu'il existe $a \in \llbracket -2; 2 \rrbracket$ et $b \in \{-1, 1\}$ tels que $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.
- En déduire les valeurs possibles de $\chi_u(X)$ et justifier que $u^{12} = \text{id}_E$.

5.18 *Centrale PSI 2012* Soit $n \geq 2$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant des 1 dans toutes ses cases.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; pour $i \in \llbracket 1;n \rrbracket$, on note $l_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ la somme des coefficients de la

ligne i et, pour $j \in \llbracket 1;n \rrbracket$, $c_j(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}$ la somme des coefficients sur la colonne j .

On note $X_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ce sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, $l_i(A) = c_j(A)$; on note alors $s_n(A)$ la valeur commune de toutes ces sommes.

a. Donner un élément non élémentaire de $X_3(\mathbb{R})$ (autre que I_3 , J_3 , etc...).

b. Montrer que $X_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A J_n = J_n A\}$.

c. En déduire que $X_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication. Montrer que $s_n : X_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que : $\forall (A,B) \in X_n(\mathbb{R})^2$, $s_n(AB) = s_n(A)s_n(B)$.

d. Diagonaliser J_n et en déduire $\dim(X_n(\mathbb{R}))$. Trouver $\dim(X_n^0(\mathbb{R}))$ où $X_n^0(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $X_n(\mathbb{R})$ formé des matrices magiques A telles que $s_n(A) = 0$.

5.19 *Centrale PSI 2012* Soit $m \in \mathbb{R}$ et la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m & -m+1 & m \\ -m-1 & -m & m+1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer l'unique valeur m_0 telle que A_{m_0} soit diagonalisable.

b. Caractériser géométriquement l'endomorphisme u_0 de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A_{m_0} .

5.20 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 3$ et A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient des 1 dans la première

ligne et la première colonne et des 0 partout ailleurs. Par exemple $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que (A_n, A_n^2, A_n^3) est une famille liée. Justifier que A_n est diagonalisable.

b. Déterminer les valeurs propres de A_n et son polynôme caractéristique χ_{A_n} . Calculer $\det(I_n + A_n)$.

c. On prend dans cette question $n = 7$. Pour $p \geq 1$, trouver $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A_7^p = a_p A_7^2 + b_p A_7$.

5.21 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 \neq b^2$, on pose $M = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & a & b \\ b & a & b & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & a & b \\ b & a & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Que vaut $\text{rang}(M)$? Diagonaliser M .

b. Déterminer le polynôme caractéristique χ_M . Pour un complexe c , en déduire $\det(A)$ où la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifie : $\forall k \in \llbracket 1;2n \rrbracket$, $a_{k,k} = c$, $\forall (i,j) \in \llbracket 1;2n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = b$ si $i+j$ est impair et $\forall (i,j) \in \llbracket 1;2n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = a$ si $i+j$ est pair et $i \neq j$.

5.22 *Centrale PSI 2012* Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, une famille libre $(B_1, \dots, B_p)$ de

matrices de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ qui vérifient : $\forall n \in \llbracket 0;p \rrbracket$, $A^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n B_k$.

a. Montrer que si les complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distincts 2 à 2 on a $p \leq q$.

b. Montrer que si les complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distincts 2 à 2 A est diagonalisable.

c. Expliquer pourquoi A est diagonalisable même si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ne sont pas supposés distincts 2 à 2.

d. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n B_k$.

e. Réciproquement, si A est diagonalisable, justifier que A satisfait aux hypothèses de cet exercice.

5.23 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5.24 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes deux à deux. Soit g un autre endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$.

- a. Montrer qu'un vecteur propre de f est aussi un vecteur propre de g .
- b. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
- c. Que peut-on en déduire à propos de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$?

5.25 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\exists p \geq 1$, $u^p = \text{id}_E$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

- a. Montrer que $u \in \text{GL}(E)$. À quelle condition nécessaire et suffisante u est-il diagonalisable ? Comment appelle-t-on ces endomorphismes u diagonalisables ? On suppose dans toute la suite que u n'est pas diagonalisable.
- b. Montrer qu'il existe deux entiers $a \in \llbracket -2; 2 \rrbracket$ et $b \in \{-1, 1\}$ tels que $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $\varepsilon = \pm 1$. En déduire les valeurs possibles de $\chi_u(X)$ et justifier que $u^{12} = \text{id}_E$.

5.26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r .

- a. Montrer que M est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.
- b. En déduire qu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à $r + 1$ tel que $P(M) = 0$.
- c. Montrer par un exemple où vous choisirez n , r et M qu'il n'existe pas toujours de polynôme Q de degré inférieur ou égal à r qui vérifie $Q(M) = 0$.
- d. On suppose que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires, établir que M est alors semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Quel est le polynôme minimal de M en fonction de celui de A ?
- e. Si M est diagonalisable, à quelle condition nécessaire et suffisante M admet-elle un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à r ?

5.27 *Centrale PSI 2012*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $u(M) = \alpha M + \text{Tr}(M)A$.

- a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- b. u est-elle diagonalisable ? Si $\text{Tr}(A) = 0$, déterminer $\text{Tr}(u)$.

5.28 *Centrale PSI 2012* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^5) = A$.

Est-ce toujours vrai si on suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable ?

5.29 *Centrale PSI 2012* On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la colonne j est composée de nombres tous égaux à j , sauf le coefficient sur la diagonale valant 0.

- a. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
- b. En déduire que la matrice A est diagonalisable et déterminer un équivalent de la plus grande valeur propre λ_n de A lorsque n tend vers $+\infty$.

5.30 *Centrale PSI 2012* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & -A \\ 2A & 4A \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

5.31 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 2A & -2A \\ A & 5A \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

5.32 *Centrale PSI 2012* Soit $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \text{ } M \text{ est-elle diagonalisable ? Dans ce cas, la diagonaliser.}$$

- 5.33** *Centrale PSI 2012* Soit E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in \mathcal{L}(E), \varphi(g) = \frac{1}{2}(g \circ p + p \circ g)$. On considère également les ensembles suivants :
 $A = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$, $B = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$,
 $C = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$, $D = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p) \text{ et } \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$.
a. Montrer que B et C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
On montre de la même façon que A et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
b. Déterminer les dimensions de ces quatre sous-espaces vectoriels. On fera intervenir r , le rang de p .
c. Dédire de ce qui précède que φ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- 5.34** *Centrale PSI 2012* Soit $n \geq 2$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}, P - zM \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Commencer par examiner le cas où M est inversible.
- 5.35** *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour une matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'équation $(E_Y) : AX - XB = Y$ où l'on cherche les solutions $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit qu'un couple (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si l'équation (E_Y) possède au moins une solution quelle que soit la matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a. Traduire le fait que (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X) = AX - XB$.
b. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = XB$, justifier qu'alors $\chi_A(B)$ n'est pas inversible.
En déduire que si (A, B) ne vérifie pas $\mathcal{P}$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune.
c. Étudier la réciproque.
- 5.36** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = 2I_n$. Montrer que cette matrice M est diagonalisable.
- 5.37** *Mines PC 2006* Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 5A + 6B$.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
- 5.38** Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant $f^4 = f^2$.
On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f . Montrer que f est diagonalisable.
- 5.39** Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = PM + MP$.
Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable.
- 5.40** *Mines MP 2004* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par $f_A(M) = AM$.
a. Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est diagonalisable.
b. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
- 5.41** Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\text{Tr}(M) = n$.
- 5.42** Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
b. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
- 5.43** *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$.
a. Montrer que si $(a, b) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)$ alors $a - b \in \text{Sp}(\varphi)$. On pourra d'abord justifier qu'il existe deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $Au = aU$ et ${}^tBV = bV$.
b. Justifier que φ est diagonalisable si on suppose que A et B le sont.
c. Pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, établir que $\chi_A(C)$ est inversible si et seulement si $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(C) = \emptyset$.
d. En déduire que si $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$, alors $\exists (a, b) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)$ tel que $\lambda = a - b$.

5.44 X MP 2005 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. On suppose $A^3 = A^2$. Montrer que A^2 est diagonalisable et que $A^2 - A$ est nilpotente.
- b. Plus généralement on suppose $A^{k+1} = A^k$ pour un certain entier $k \in \mathbb{N}^*$, établir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que A^p est diagonalisable et $A^p - A$ nilpotente.

5.3 Trigonalisation et diagonalisation simultanée

5.45 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

5.46 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ (**rayon spectral de A**).

On va montrer que pour toute norme de E , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

- a. Montrer que si le résultat est vrai pour une norme, alors il est vrai pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- b. Montrer que si le résultat est vrai pour une matrice A alors il est vrai pour toute matrice semblable à A . Dans la suite, on considère la norme $\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} |a_{i,j}|$.

c. Montrer que si T est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent 1 alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$. (indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ (nilpotente) et utiliser la formule du binôme)

d. Montrer que si B est telle que $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, |a_{i,j}| \leq b_{i,j}$ alors $\|A^k\|_\infty \leq \|B^k\|_\infty$.

Conclure en trigonalisant $\frac{A}{\rho(A)}$.

5.47 Centrale PC 2008 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, à valeurs propres strictement positives.

- a. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + AX_n^{-1})$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$ est diagonalisable (on pourra utiliser une base de vecteurs propres de A).
- b. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$. On la note $\sqrt{A}$.
- c. Montrer que si A est symétrique alors $\sqrt{A}$ est symétrique.

5.48 Mines PSI 2010 d'après RMS On munit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

- a. Montrer que T est un endomorphisme continu de E . Déterminer sa norme subordonnée.
- b. Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer que : $\exists x_0 \in]0;1], \forall x \in [0; x_0[, |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty$. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

5.49 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le polynôme caractéristique de $P(A)$ en fonction de $\text{Sp}(A)$.

5.50 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A et trigonaliser A .

5.4 Exercices posés aux étudiants de PSI1

5.51 *Centrale PSI 2013* Thomas M.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si tous les a_k et les b_k sont nuls ou si $\sum_{k=1}^n a_k b_k > 0$. Indication : on pourra raisonner sur A^2 .

5.52 *CCP PSI 2013* Romain

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Diagonaliser K .
- b. Exprimer M en fonction de puissances de K .
- c. Diagonaliser M et calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5.53 *CCP PSI 2013* Adrien

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que A inversible, $\text{Tr}(A) = 5$ et $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$. Donner χ_A .

5.54 *Petites Mines PSI 2013* Camille

Soit A et B des matrices carrées réelles, montrer que $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$.

5.55 *Centrale PSI 2014* Mathias

On pose E l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

- a. Montrer que $\forall p \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^x p(t)e^t dt$ converge.
- b. On définit L l'application sur E telle que $\forall x \in \mathbb{R}, L(p)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x p(t)e^t dt$.
Montrer que L est un endomorphisme de E . Est-il diagonalisable ?

5.56 *Mines PSI 2014* Lucie

Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des a sur la diagonale et des b partout ailleurs ($b \neq 0$ et $n \geq 2$).

- a. Donner les valeurs propres de M et dire si elle est diagonalisable.
- b. Dans le cas où M est inversible trouver M^{-1} .
- c. Trouver M^p avec p un entier naturel (sans passer par la matrice diagonale).

5.57 *Mines PSI 2014* Valentine

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et m canoniquement associé à M .

- a. En effectuant un produit par blocs, déterminer le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $M^p = I_5$.
- b. En déduire que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.
- c. Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ tel que $(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.
- d. Donner alors la matrice de m dans cette base, puis les valeurs propres de M .

5.58 Mines PSI 2014 Mathias

- a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en A .
- b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le degré d'un polynôme annulateur de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de A . Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \dots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^k c_i (A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

5.59 CCP PSI 2014 Mohammed

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère $f : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que f est un endomorphisme de E , que f est diagonalisable et trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f .

5.60 Centrale Maths1 PSI 2015 Vincent Barrère et Adrien Gruson

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E .

- a. On suppose que $u \circ v = 0$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.
- b. On suppose que $u \circ v \in \text{Vect}(u, v)$, montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
- c. On suppose que $u \circ v \in \text{Vect}(u, v)$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures. Indication : raisonner par récurrence sur la dimension de E .

5.61 Centrale Maths1 PSI 2015 Térence Burcelin

Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $F(A, B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que $F(A_1, B_1)F(A_2, B_2) = F(A_1 A_2, B_1 B_2)$.
- b. Calculer $\text{Tr}(F(A, B))$, $\text{rang}(F(A, B))$ et $\det(F(A, B))$.
- c.    quelles conditions $F(A, B)$ est-elle diagonalisable ?

5.62 Centrale Maths1 PSI 2015 Margaux Ledieu

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $D : E \rightarrow E$ par $\forall f \in E, D(f)(x) = x f'(x)$.

- a. Montrer que D est un endomorphisme de E .
- b. Déterminer $\text{Ker}(D)$.
- c. Trouver les éléments propres de D .
- d. Déterminer $\text{Im}(D)$.

5.63 Mines PSI 2015 Jean-Raphaël Biehler

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\text{Sp}(P(M)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(M)\}$.

5.64 Mines PSI 2015 Bastien Chevallier

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 + f^2 - \text{id}_E = 0$ et $\text{Tr}(f) \in \mathbb{Q}$. Montrer que n est un multiple de 3.

5.65 Mines PSI 2015 Arthur Lacombe

Soit B une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $M = \lambda I_n + B$.

Montrer que $P(M)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $P(M) = \mu I_n$.

5.66 Mines PSI 2015 Édouard Le Goas

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, p un réel non nul de valeur absolue strictement inférieure à 1 et $q = 1 - p$. Soit u l'application qui pour tout f de E associe $u(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(f)(x) = f(px + q)$.

- a. Montrer que u est un automorphisme.
- b. Montrer que les valeurs propres de u appartiennent à $] -1; 1]$.
- c. Montrer que si f est un vecteur propre, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
- d. Trouver les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

5.67 Mines PSI 2015 Ludovic Péron

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- a. u admet-il toujours une droite stable ?
- b. u admet-il toujours un plan stable ?

5.68 Mines PSI 2015 Julien Venne

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A - A^{-1}$ diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs propres distinctes.

- a. Montrer que A est diagonalisable. Idem pour A^{-1} .
- b. Qu'en est-il si les valeurs propres de $A - A^{-1}$ ne sont pas toutes distinctes ?
- c. Reprendre les questions en supposant que c'est $A + A^{-1}$ qui est diagonalisable.

5.69 CCP PSI 2015 Clément Suberchicot

- a. Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$, on suppose M^2 diagonalisable, montrer que M est diagonalisable.
 - b. Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, montrer que N est inversible et calculer N^{-1} . Calculer N^2 .
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(N^2)$. Si N est diagonalisable, montrer que AB est diagonalisable. Réciproque ?

5.70 Petites Mines PSI 2015 Marin de Bonnières

Soit E un espace de dimension $n \geq 1$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$, u avec n valeurs propres distinctes et $v \circ u = u \circ v$.

- a. Montrer que v est diagonalisable.
- b. Montrer que $v \in \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$.
- c. En déduire $\dim(C_u)$ où C_u est le commutant de $u : C_u = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$.

5.71 Cachan PSI 2016 Alexandre Janot

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

- a. Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b. Montrer que si $M \in C(A) \cap GL_n(\mathbb{R})$, alors $M^{-1} \in C(A)$.
- c. Soit D une matrice diagonale réelle dont tous les coefficients sont distincts deux à deux. Déterminer $C(D)$. Montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.

On suppose dorénavant que $n = 2$.

- d. Quelles sont les matrices A telles que $\dim(C(A)) = 4$?
- e. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\dim(C(A)) \geq 2$.
- f. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim(C(A)) \geq 3$.

En utilisant $F = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $G = \text{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

- g. Trouver une base de $C(A)$.

5.72 Centrale Maths1 PSI 2016 Sylvin Bielle

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit trigonalisable. Donner $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui soit non diagonalisable.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et semblable à M telle que $\forall i \neq j, |a_{i,j}| \leq \varepsilon$.

Questions : pouvez-vous me donner toutes les CNS de diagonalisabilité que vous connaissez dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

5.73 Centrale Maths1 PSI 2016 Elliott Jean-François

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que pour $p \in \{1, 2, 3\}$, on ait $A^p = \alpha^p(B + pC)$ (1).

a. Montrer que la proposition (1) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que tout vecteur propre de A appartient au noyau de C .

c. Déterminer une condition pour que A soit diagonalisable.

5.74 Mines PSI 2016 Erwann Alric II

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = \text{id}_E$. On dit que u est une involution.

a. Étudier la diagonalisabilité de u .

b. On suppose que $E_1(u)$ est de dimension 1. Montrer qu'il existe un vecteur $\alpha \in E$ et θ une forme linéaire sur E tels que $\forall x \in E, u(x) = -x + \theta(x)\alpha$.

5.75 Mines PSI 2016 Thomas Corbères II

Déterminer les différentes classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Indication : la classe de similitude d'une matrice A est l'ensemble des matrices semblables à A .

5.76 Mines PSI 2016 Samy Essabar I

a. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A diagonalisable $\iff A^3$ diagonalisable.

b. Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^3 est diagonalisable alors que A ne l'est pas.

c. Que se passe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

5.77 Mines PSI 2016 Jean Migliorini I

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A en considérant son endomorphisme associé dans un espace E judicieusement choisi.

5.78 Mines PSI 2016 Paul Mondou II

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et son polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(M), |\lambda| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$.

5.79 Mines PSI 2016 Hugo Tarlé II

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $v_1, \dots, v_p$ des endomorphismes non nuls de E . On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n v_k$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels distincts deux à deux.

- a. Montrer que u est diagonalisable. Indication : on pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) v_k$.
- b. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, notée $(L_1, \dots, L_p)$ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.
- c. Montrer que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

5.80 Mines PSI 2016 Théo Taupiac I

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nilpotente.

- a. Montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que M et λM soient semblables est fini.
- b. Qu'en est-il pour M nilpotente ?

5.81 Mines PSI 2016 Arthur Robbe II

Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $a_{i,j} = a$ si $i = j$, $a_{i,j} = b$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Quel est le spectre de A_n ?

5.82 Mines PSI 2016 Hugo Saint-Vignes I

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \cdot & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a. Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.
- b. Trouver les sous-espaces propres de M .

5.83 CCP PSI 2016 Adrien Boudy II

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- b. Montrer que A est inversible et donner son inverse.
- c. Donner les éléments propres de A . Caractère diagonalisable de A ?
- d. Donner une autre façon de prouver que A est inversible, diagonalisable.

5.84 CCP PSI 2016 Matthieu Cadiot I

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = R$ reste de la division euclidienne de $X^2 P$ par $D = X^4 - 1$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
- b. f est-elle diagonalisable ?
- c. f est-elle injective ?

5.85 CCP PSI 2016 David Espert II

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 \\ 2-a & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.

5.86 CCP PSI 2016 Sam Pérochon II

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E .

a. Montrer que : H stable par $u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{id}_E) \subset H$.

b. Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -4 \\ 18 & -10 & -8 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5.87 CCP PSI 2016 Marie Rebière II

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Donner deux conditions suffisantes mais non nécessaires pour qu'une matrice soit diagonalisable.

b. Montrer que A est diagonalisable et donner P et D telles que $A = PDP^{-1}$.

On définit B par blocs par $B = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

c. B est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

5.88 CCP PSI 2016 Arthur Robbe II

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 + u^2 + u = 0$.

a. Déterminer $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u^2 + u + \operatorname{id}_E)$.

b. Montrer que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u^2 + u + \operatorname{id}_E)$. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

c. Soit v la restriction de u à $\operatorname{Im}(u)$. Quel lien entre $\deg(\chi_v)$ et u ?

d. Montrer que $0 \notin \operatorname{Sp}(v)$. En déduire que $\operatorname{rang}(u)$ est pair.

5.89 E3A PSI 2016 Clément Suberchicot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $U : E \rightarrow E$ défini par $U(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) dt$.

a. Montrer que U est un endomorphisme de E .

b. U est-il diagonalisable ? Inversible ? Si oui, déterminer U^{-1} .

5.90 Petites Mines PSI 2016 Rogelio Escalona I

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les éléments propres de N .

5.91 ENS Cachan PSI 2017 Valentin Gorce et Iñigo Saez-Casares

Soit $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles (éventuellement répétées), $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $x^{(0)}$ donné, $\forall k \geq 0$, $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha r_k$ où $r_k = Ax^{(k)} - b$ (I).

a. Trouver $B_\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que $x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$.

b. Trouver une CNS sur α en fonction des λ_i pour que la méthode (I) converge : cela signifie que $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers le vecteur v : l'unique solution de $Au = b$.

c. Montrer que si tous les λ_i ne sont pas de même signe, la méthode (I) ne converge pas.

d. On suppose $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_k > 0$ et que la méthode (I) converge. Montrer qu'il existe C , à exprimer en fonction des λ_i , tel que $0 < \alpha < C$. Soit $f_i : \alpha \mapsto |1 - \lambda_i \alpha|$. Tracer les fonctions f_i .

Trouver α_{opt} tel que la méthode (I) converge le plus rapidement.

5.92 Centrale Maths1 PSI 2017 Aloïs Blarre

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. AB est-elle inversible ? Quelles valeurs peut prendre x ?
- b. La matrice BA est-elle diagonalisable ?
- c. Montrer que $\text{Ker}(B) \oplus \text{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

5.93 Centrale Maths1 PSI 2017 Manon Bové

- a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = A$. Quel peut être le rang de A ?
- b. Soit $P = \{u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid u^2 = u\}$. Combien existe-t-il de classes de similitude dans P ?
- c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n pair et $A^2 = 0$. Quel peut être le rang de A ? Soit m le rang maximal possible. Trouver un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rang}(u) = m$.

5.94 Centrale Maths1 PSI 2017 Adrien Cassagne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1 : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$.

- a. Soit $A \in E$, montrer que 1 est valeur propre de A .
- b. Montrer que E est stable par produit.
- c. Montrer que si $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq 1$, alors $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| \leq 1$.

5.95 Mines PSI 2017 Manon Bové II

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

5.96 Mines PSI 2017 Adrien Cassagne II et Elliott Jean-François II

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ admet une limite finie en } +\infty\}$. Soit $T : f \mapsto g$ tel que $g(x) = f(x+1)$.

- a. Montrer que E est un espace vectoriel et que $T \in \mathcal{L}(E)$.
- b. Trouver les valeurs propres de T .

5.97 Mines PSI 2017 Alexandre Chamley I

Soit $n \geq 2, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de $a_1, \dots, a_n$.
- b. Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A .

5.98 *Mines PSI 2017* Célia Detrez I Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le polynôme caractéristique de A . À quelles conditions A est-elle diagonalisable ?
- Déterminer si A est diagonalisable des conditions de convergence de la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

5.99 *Mines PSI 2017* Joseph Dumoulin I

- Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet un polynôme annulateur de degré minimal dont on note k le degré.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en A .

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de A .

- Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \dots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^k c_i (A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

5.100 *Mines PSI 2017* Valentin Gorce I

Soit un entier $n \geq 2$.

- Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que A diagonalisable $\iff A^3$ diagonalisable
- Trouver des contre-exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Trouver des contre-exemples dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

5.101 *Mines PSI 2017* Thomas Laborde I

Soit E un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in \mathcal{L}(E), \varphi(g) = \frac{1}{2}(g \circ p + p \circ g)$. On considère également les ensembles suivants :

$A = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$, $B = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$,
 $C = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$, $D = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p) \text{ et } \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)\}$.

- Donner une condition sur p pour que φ soit un projecteur.
- Montrer que A, B, C et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
- Montrer φ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

5.102 *Mines PSI 2017* Bastien Lamagnère I

- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, et toutes les valeurs propres de A sont de multiplicité 1. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et deux matrices diagonales D et D' telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.

Soit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $D' = \text{diag}(d'_1, \dots, d'_n)$. On pose $f : P \in \mathcal{C}_{n-1}[X] \mapsto (P(d_1), \dots, P(d_n))$.

- Montrer que f est linéaire et injective.
- Montrer qu'il existe un polynôme $L \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, L(d_k) = d'_k$.
- Montrer qu'il existe des complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $B = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}$. Que peut-on en déduire sur le commutant de A défini par $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?
- Est-ce toujours vrai si les valeurs propres de A ne sont plus de multiplicité 1 ?

5.103 *Mines PSI 2017* Antoine Romero-Romero I

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$.

- Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $A^k + A^{-k}$.
- Calculer $\det(A)$. Que peut-on dire de n ?

5.104 Mines PSI 2017 Grégoire Verdès I Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Que dire des valeurs propres de A ?

Soit λ la valeur propre de A de module maximal. On pose $u_n = \sin(2\pi \operatorname{Tr}(A^n))$ et $v_n = \sin(2\pi\lambda^n)$.

b. Déterminer les natures des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$.

5.105 CCP PSI 2017 Manon Bové II et Alexis Trubert II Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.

b. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1} .

c. Quels sont tous les polynômes qui annulent A ?

5.106 CCP PSI 2017 Adrien Cassagne I

Soit $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = 2 \operatorname{Tr}(M)A$.

a. Montrer que f est un endomorphisme.

b. f est-il diagonalisable ?

5.107 CCP PSI 2017 Alexandre Chamley I et Elliott Jean-François I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que A diagonalisable $\implies A^2$ diagonalisable.

b. Est-il vrai que A^2 diagonalisable $\implies A$ diagonalisable ?

c. Montrer que A^2 diagonalisable et A inversible $\implies A$ diagonalisable.

5.108 CCP PSI 2017 Maxime Lacourcelle I

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 2A^2 - 3A$. La matrice A est-elle inversible ?

5.109 CCP PSI 2017 Cléa Maricourt I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

b. Discuter de la diagonalisabilité de A selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

5.110 CCP PSI 2017 Louise Piton II

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ sinon.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Soit P un polynôme annulateur de A , montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P .

c. Calculer $(A + I_n)^2$. En déduire les valeurs propres possibles de A .

d. Le sont-elles effectivement ?

5.111 CCP PSI 2017 Antoine Romero-Romero II

On considère l'application $f : M \mapsto M + \operatorname{Tr}(M)I_n$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

b. Déterminer un polynôme annulateur de f de degré 2.

c. f est-elle diagonalisable ? f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1} .

5.112 CCP PSI 2017 Roland Tournade II

Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A)$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux distincts deux à deux. Montrer que A est diagonalisable.

5.113 E3A PSI 2017 Vincent Meslier

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = A$.

- Montrer que A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Trigonaliser A .
- Montrer que le spectre de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants.
- Montrer que 0 est valeur propre de M si $M^2 = A$.
- Trouver toutes les matrices M solution de $M^2 = A$.

5.114 E3A PSI 2017 Grégoire Verdès

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ euclidien canonique associé à $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 . Interpréter f . Donner ses éléments caractéristiques.
- Déterminer l'image par f du plan P d'équation $x - y - z - 5 = 0$.

5.115 TPE, EIVP PSI 2017 Manon Bové I

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.

Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de projecteur.

5.116 ENS Ulm/Cachan PSI 2018 Thomas Gerbeaud

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que le système stationnaire discrétisé $X' = AX + BU$ est contrôlable pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$ si pour tout $(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$, il existe $(u_0, \dots, u_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$ tel que si on pose $X_0 = \widetilde{X}_0$ et $\forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$, $X_{k+1} = AX_k + Bu_k$, alors $\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, $X_k = \widetilde{X}_k$.

- Déterminer le terme X_k ainsi défini en fonction de k .
- Soit $C = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ (matrice définie par bandes).
Si $\text{rang}(C) < n$, montrer qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}$, ${}^t X A^j B = 0$. Indication : on admettra avant le chapitre sur la réduction qu'il existe un polynôme unitaire de degré n qui annule A .
- Montrer qu'alors le système n'est contrôlable pour aucune valeur $N \in \mathbb{N}^*$.
- Si le système n'est pas contrôlable pour un certain entier $N \in \mathbb{N}$, montrer alors que l'application $F : (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} A^k B u_{N-k-1}$ est linéaire, non surjective.

En déduire qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N$, ${}^t X \left(\sum_{k=0}^{N-1} A^k B u_{N-k-1} \right) = 0$.

5.117 Centrale Maths1 PSI 2018 Peio Betbeder

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathbb{R}^n$ non nul et E_X l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ont X comme vecteur propre.

- Montrer que E_X est un espace vectoriel.
- Déterminer E_X . Quelle est sa dimension ?

Question de cours : montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

5.118 *Centrale Maths1 PSI 2018* Anaïs Chaumeil et Amélie Guyot

a. Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_3$ et $A^3 = I_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$.

b. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A . Montrer que n est pair. Exprimer A^2 en fonction de A et I_n . Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c. On suppose que $1 \in \text{Sp}(A)$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

5.119 *Centrale Maths1 PSI 2018* Thibaud Vendrely

Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2 \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par $F(A, B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ (par blocs) si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $F(A_1 A_2, B_1 B_2) = F(A_1, B_1) F(A_2, B_2)$.

b. Donner $\text{Tr}(F(A, B))$, $\det(F(A, B))$, $\text{rang}(F(A, B))$ grâce à $\text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(B)$, $\det(A)$, $\det(B)$, $\text{rang}(A)$, $\text{rang}(B)$.

c. Déterminer une condition suffisante sur A et B pour que $F(A, B)$ soit diagonalisable.

5.120 *Mines PSI 2018* Charlotte Beaune et Santiago Monteagudo II

Déterminer toutes les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5.121 *Mines PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau II

a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B .

b. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

c. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

5.122 *Mines PSI 2018* Anaïs Chaumeil II et Adrien Sarrade II

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \dots, v_n$ des endomorphismes non nuls et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels tous distincts. On suppose que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $u^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i$.

a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) v_i$; puis que u est diagonalisable.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i$.

c. Trouver des polynômes $(L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^n$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$.

d. Montrer que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

e. Que peut-on dire des dimensions des sous-espaces propres de u si $\dim(E) = n$?

5.123 *Mines PSI 2018* Gauthier Crosio II

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et f, u, v trois endomorphismes de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

l'on ait $\begin{cases} f = \lambda u + \mu v \\ f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v \\ f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v \end{cases}$. Montrer que f est diagonalisable.

5.124 *Mines PSI 2018* Mathilde Dutreuilh II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

a. Montrer que u^2 est un projecteur.

b. Que peut-on dire de u si $\text{Tr}(u) = \text{rang}(u)$?

5.125 *Mines PSI 2018* Elio Garnaoui II

a. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine.

Déterminer une expression de α et $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ avec des racines.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.

Montrer que si $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Q}$, alors n est un multiple de 4.

c. Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de 4, montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait à la fois $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ et $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Q}$.

5.126 *Mines PSI 2018* Martin Gros I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer l'inverse de $P = \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

b. On suppose $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $C = DB - AD$ avec une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pour toute $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Réciproquement, montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), C = DB - AD \implies \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

5.127 *Mines PSI 2018* Lucie Jandet III

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

5.128 *Mines PSI 2018* Pauline Lamaignère I

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $C(f) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ f = f \circ u\}$.

a. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui est stable par composition.

b. On suppose dans cette question que E est de dimension finie et que f est diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \in C(f) \iff (\forall \lambda \in \text{Sp}(f), E_\lambda(f) \text{ est stable par } u)$. En déduire $\dim(C(f))$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto {}^t M$. Déterminer $\dim(C(f))$.

5.129 *Mines PSI 2018* Pierre Le Bouille II

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ des symétries telles que $f \circ g + g \circ f = 0$.

a. Montrer que $\dim(E)$ est pair.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

5.130 *Mines PSI 2018* Claire Raulin II

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

5.131 *Mines PSI 2018* Titouan Sancier II

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 - \text{id}_E = 0$ et $\text{Tr}(f) \in \mathbb{Q}$.

Montrer que n est un multiple de 3.

5.132 *Mines PSI 2018* Benoit Souillard II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 \neq 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists B_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), A = B_n^n$.

5.133 *Mines PSI 2018* Thibaud Vendrely II

Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$.

- a. Trouver quelles valeurs parmi $-2, -1, 0, 1, 2$ sont racines de P .
- b. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
- c. Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(M^3) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $P(M) = 0$.

5.134 *Mines PSI 2018* Nicolas Ziegler I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- a. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
- b. Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = Y$.

5.135 *CCP PSI 2018* Charlotte Beaune et Florian Gaboriaud II

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$.

- a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k B - BA^k = k\alpha A^k$.
- b. Montrer que A est nilpotente. Indication : s'intéresser à $L : M \mapsto MB - BM$.

5.136 *CCP PSI 2018* Peio Betbeder et Paul Simon I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
- b. Discuter de la diagonalisabilité de A selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

5.137 *CCP PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + \text{Tr}(M)A$.

- a. Montrer que $\text{Tr}(A) \neq -1 \implies f$ bijective.
- b. On suppose maintenant $\text{Tr}(A) = -1$. Donner $\text{Ker}(f)$. Montrer que $\text{Im}(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.
- c. On revient au cas général, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $M + \text{Tr}(M)A = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5.138 *CCP PSI 2018* Mathilde Dutreuilh II

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- a. Montrer que si E est de dimension finie et f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.
 - b. On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si f est injective alors f est surjective.
 - b. On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si f est surjective alors f est injective.
- Question de cours : donner une CNS de diagonalisabilité d'une matrice carrée.

5.139 *CCP PSI 2018* Santiago Monteagudo II

Soit $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $a_n \neq 0$ et $a_1 \cdots a_{n-1} \neq 0$.

On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors M est diagonalisable. Trouver ses valeurs propres.
- b. Trouver un exemple avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où M n'est pas diagonalisable.
- c. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

5.140 CCP PSI 2018 Claire Raulin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $P = \chi_A = \chi_B$.

- a. Montrer que si P possède n racines distinctes alors les A et B sont semblables.
- b. Trouver deux telles matrices carrées telles que A et B ne sont pas semblables.

5.141 CCP PSI 2018 Adrien Sarrade I Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. A est-elle diagonalisable ? Inversible ? Donner ses éléments propres.
- b. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Donner les éléments propres de B .

5.142 E3A PSI 2018 Vincent Barreau

On se donne quatre points A_0, B_0, C_0 et D_0 dans le plan qui forment un parallélogramme $A_0B_0C_0D_0$. On construit ensuite par récurrence quatre suites de points par $\forall n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} (resp. $B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$) est le milieu du segment $[A_nB_n]$ (resp. $[B_nC_n], [C_nD_n], [D_nA_n]$).

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_nB_nC_nD_n$ est un parallélogramme.
- b. Calculer les affixes des points $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ en fonction de celles de A_n, B_n, C_n, D_n .
- c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$.

5.143 E3A PSI 2018 Anaïs Chaumeil

Soit $E = C^2([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et $x \in [0; 1]$, on pose $T(f)(x) = \int_0^1 \text{Min}(x, t)f(t)dt$.

- a. Montrer que T ainsi définie est un endomorphisme de E .
- b. Soit f un vecteur propre de T . Montrer que f satisfait une équation différentielle de la forme $y'' = \beta y$ avec β à déterminer en fonction de la valeur propre associée à f .
- c. Réciproquement, si f est solution non nulle de $y'' = \beta y$, à quelle(s) condition(s) f est vecteur propre de T .
- d. Déterminer le spectre de T .

5.144 Petites Mines PSI 2018 Baptiste Egreteau II

- a. Soit B et C deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$.
Les matrices $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont-elles semblables ? Et $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$?
- b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$. Montrer que $\text{Tr}((xI_n - A)^{-1}) = \frac{\chi'_A(x)}{\chi_A(x)}$.

5.145 Centrale Maths1 PSI 2019 Elaia Mugica

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ B & 0_n \end{pmatrix}$.

- a. On suppose M diagonalisable. Montrer que AB est diagonalisable.
On suppose dorénavant AB diagonalisable et inversible.
- b. Montrer que M est diagonalisable.
- c. Montrer que M est inversible de deux manières différentes.

5.146 Mines PSI 2019 Tom Boileau II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

5.147 *Mines PSI 2019* Thomas Brémond II

Pour $f \in E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$, on définit $T(f) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $T(f)(x) = (1 - x) \int_0^x tf(t)dt + x \int_x^1 (1 - t)f(t)dt$.

- a. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E .
- b. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

5.148 *Mines PSI 2019* Charles Broquet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = nXP(X) - (X^2 - 1)P'(X)$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b. Trouver les solutions polynomiales sur $] - 1; 1[$ de l'équation (E) : $nxy - (x^2 - 1)y' = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- c. Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de f ? Est-il diagonalisable ?
- d. Déterminer $\text{Tr}(f)$, $\det(f)$, $\text{rang}(f)$.

5.149 *Mines PSI 2019* Mathis Chénét I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- a. Donner l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.
- b. Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), DB - AD = C$.
- c. Montrer que $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ sont semblables.
- d. N est-elle diagonalisable ? Commenter le cas $n = 1$.
- e. Montrer que N est diagonalisable d'une autre manière.

5.150 *Mines PSI 2019* Carla Chevillard II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$.

- a. Calculer $\det(A)$.
- b. Montrer que n est pair et que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.

Question de cours : montrer que si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et que $m_{\lambda}(A) = m_{\bar{\lambda}}(A)$.

5.151 *Mines PSI 2019* Kévin Dufrechou II

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

- a. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
- b. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

5.152 *Mines PSI 2019* Fabien Dupuis II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.
- b. Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de k la matrice A est-elle diagonalisable ?

5.153 *Mines PSI 2019* Mathis Girard II

- a. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\text{Tr}(A) = 0$. Montrer que A est soit diagonalisable, soit nilpotente.
- b. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\text{Tr}(A) = 0$, A est-elle forcément diagonalisable ou nilpotente ?

5.154 *Mines PSI 2019* Lola Josseran II

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M .

- a. Caractériser l'endomorphisme $f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.
- b. Donner les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f .

5.155 *Mines PSI 2019* Benoît Le Morvan II

- a. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine.

Déterminer une expression de α et $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ avec des racines.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.

Montrer que si $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Q}$, alors n est un multiple de 4.

- c. Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de 4, montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait à la fois $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ et $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Q}$.

5.156 *Mines PSI 2019* Enola Soenen II

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que A soit diagonalisable.
- b. Si A est diagonalisable, déterminer $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n A + \beta_n I_4$.

5.157 *Mines PSI 2019* Tanguy Sommet I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X], \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), Q(M) = A)$.

Questions de cours : conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.

5.158 *CCP PSI 2019* Augustin Aumont et Enola Soenen II

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $\varphi : f \mapsto g$ où g est défini par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ si $x \in]0; 1]$.

- a. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- b. φ est-il surjectif ? Montrer que 0 n'est pas valeur propre de φ .
- c. Montrer que 1 est valeur propre de φ . Déterminer $E_1(\varphi)$.
- d. Déterminer les autres valeurs propres de φ et leurs espaces propres associés.

5.159 *CCP PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré et Fabien Dupuis I

On donne $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ où A et B sont deux matrices complexes, carrées de taille n , qui commutent.

- a. Montrer que si U est semblable à V , pour tout polynôme R , $R(U)$ est semblable à $R(V)$.
- b. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B .
- c. Montrer que si A est diagonalisable et B nulle, alors M est diagonalisable.
- d. Démontrer la réciproque.

5.160 *CCP PSI 2019* Tom Boileau et Charles Broquet II

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. On définit $M_n(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $M_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$.

a. Pour $n \geq 3$, trouver a et b en fonction de x tels que $\det(M_n(x)) = a \det(M_{n-1}(x)) + b \det(M_{n-2}(x))$.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $\Delta_n = \det(M_n(2 \cos(\theta)))$.

b. Pour $n \geq 3$, donner Δ_n en fonction de Δ_{n-1} , Δ_{n-2} et θ . En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

c. La matrice $M_n(x)$ est-elle diagonalisable ?

d. Trouver les valeurs propres de $M_n(x)$.

5.161 *CCP PSI 2019* Axel Brulavoine II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

a. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.

b. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{id}_{\mathbb{C}^n}) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \text{Ker}(u + \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^n})$.

d. Montrer que la réciproque de la question a. est vraie si u est bijective.

5.162 *CCP PSI 2019* Mathis Chénét II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{i,j} > 0$ et $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

a. Montrer que 1 est valeur propre de A .

Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^tX = (x_1 \dots x_n)$ un vecteur propre associé à λ .

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ l'un des indices tel que $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

b. Montrer que $|\lambda| \leq 1$ et que $|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{k,j}|$.

c. On suppose que $|\lambda| = 1$. Montrer que $\lambda = 1$.

5.163 *CCP PSI 2019* Thomas Crété et Léo Simplet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M , les valeurs propres de M sont des racines de P .

b. On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\text{Tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.

c. On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.

d. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M .

5.164 *CCP PSI 2019* Louis Destarac et Victor Margueritte II

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $f \neq \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

a. Montrer que 1 est valeur propre de f .

b. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

c. Trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.165 CCP PSI 2019 Romain Galea II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Tr}(A^n)$.

- En utilisant un polynôme annulateur de A , établir une relation entre u_{n+3} , u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .
- En déduire que $\forall n \geq 2, u_n \in \mathbb{N}^*$.
- Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$.

5.166 CCP PSI 2019 Lola Josseran II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : P \mapsto P(1 - iX)$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $E = \mathbb{C}_n[X]$.
- Montrer que si $Q \in \mathbb{C}[X]$ est annulateur de φ , les valeurs propres complexes de φ sont des racines de Q .
- Calculer φ^4 . En déduire que φ est bijective et diagonalisable.
- Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ? Montrer que $1 \in \text{Sp}(\varphi)$.
- Trouver un vecteur propre de degré 1 associé à la valeur propre $-i$.
- Retrouver les résultats de la question c. avec une autre méthode et en déduire le spectre de φ .
Donner aussi la dimension des différents sous-espaces propres.

5.167 CCP PSI 2019 Thomas Méot I

- Énoncer le théorème de CAYLEY-HAMILTON.

Soit pour les deux prochaines questions $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $C \neq 0_n$ et $AC = CB$.

- Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)C = CP(B)$.
- En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que A et B ont une valeur propre commune.

- Existe-t-il une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$?

5.168 CCP PSI 2019 Tanguy Sommet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM$.

- Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.
- Construire un vecteur propre de f_A (resp. A) via un vecteur propre de A (resp. f_A).
- Montrer que A et f_A ont le même spectre.

5.169 CCP PSI 2019 Julien Tissot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

- Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.
- En déduire le déterminant de A .
- Montrer que $\text{Tr}(A)$ est un entier.

5.170 CCP PSI 2019 Quentin Vacher II

Soit $n \geq 2$ et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

Soit $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire, $a \in E$ et $f : E \rightarrow E$ défini par $f(x) = \ell(a)x - \ell(x)a$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E . Calculer $f(a)$.

On suppose pour les trois prochaines questions que $\ell(a) \neq 0$.

b. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E$. Montrer que $x \in \text{Vect}(a)$. En déduire $\text{Ker}(f)$.

c. Si $x \in \text{Ker}(\ell)$, calculer $f(x)$. En déduire le spectre de f et les sous-espaces propres associés.

d. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

On suppose pour les deux prochaines questions que $\ell(a) = 0$.

e. Calculer $f(\text{Ker}(\ell))$. Déterminer f^2 et en déduire un polynôme annulateur de f .

f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5.171 Petites Mines PSI 2019 Réjane Bastien-Amaré II

On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2} \\ z_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4} \end{cases}.$$

Montrer que ces trois suites convergent et donner leurs limites en fonction de x_0 , y_0 et z_0 .

5.172 ICNA PSI 2019 Léa Deveyneix II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$.

Que pouvez-vous dire de la matrice A ?

5.173 X PSI 2020 Matthieu Darius II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ et la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique P de C .

On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les racines complexes de P .

b. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_k = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k)$ est à coefficients entiers.

5.174 X PSI 2021 Arthur Riché I

Soit $n \geq 1$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $E \setminus \text{GL}_n(\mathbb{C}) = \{0\}$.

Quelles sont les dimensions possibles pour E ? Indication : tester pour les petites valeurs de $d = \dim(E)$.

5.175 *ENS Cachan PSI 2021* Antoine Greil

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit injectif sur $\mathbb{R}$.
- Supposons $\deg(P) \geq 2$. Montrer que $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = P(M)$ n'est pas injective.
- Supposons que la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Montrer que la restriction de la fonction f de la question précédente est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5.176 *Centrale Maths1 PSI 2021* Tinaël Gelpe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec $p \geq 2$.

On suppose de plus que $\forall i \in \llbracket 2; p \rrbracket, |\lambda_i| < |\lambda_1|$ (*).

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Tr}(A^k) \neq 0$, on pose $t_k = \frac{\text{Tr}(A^{k+1})}{\text{Tr}(A^k)}$.

- Montrer que les t_k sont définis à partir d'un rang k_0 et que $(t_k)_{k \geq k_0}$ converge vers une limite à déterminer.
- Les résultats de la question **a.** sont-ils encore vérifiés si (*) ne l'est plus ?

c. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{k}$.

5.177 *Centrale Maths1 PSI 2021* Clément Lérout

Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P(X+1)$.

- Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Déterminer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ si $g : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
- Déterminer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker}(g^k)$ et $\text{Im}(g^k)$.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique.

On pose aussi la matrice $B = A^t A$.

- Déterminer A et $\det(A)$. A est-elle diagonalisable ?
- Trouver l'inverse de B .

Questions de cours :

- Donner l'inégalité de MARKOV.
- Donner l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.
- Énoncer le théorème spectral version vectorielle.

5.178 *Mines PSI 2021* Mathilde Arnaud I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M^T) = f(M)^T\}$. On note traditionnellement $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.

- Montrer que C est un sous-espace vectoriels de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- Montrer que $f \in C$ si et seulement si $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par f .
- En déduire la dimension de C .
- Exhiber un endomorphisme non diagonalisable de C .

5.179 *Mines PSI 2021* Thomas Boudaud II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A .
- Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$? Déterminer sa dimension.
- Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$?

5.180 *Mines PSI 2021* Aloïs Doucet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $B = A^3 + A + I_n$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, exprimer A comme un polynôme en B .
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, peut-on exprimer A comme un polynôme en B ?

5.181 *Mines PSI 2021* Tinaël Gelpe I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n .

5.182 *Mines PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur.

Soit $u, v, w : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par $u(M) = MA$, $v(M) = AM$ et $w(M) = AM - MA$.

- u, v sont-ils diagonalisables ?
- Quelles peuvent-être les valeurs propres de w ?
- w est-il diagonalisable ?

5.183 *Mines PSI 2021* Clément Lopez I

Soit $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f)(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$.

- Montrer que f est un endomorphisme de E .
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; 1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.
- Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(0)$.
- Trouver de même, pour $x \in [0; 1]$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(x)$.
- Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.
- Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?
- Pour $f \in E$, calculer $(T(f))'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

5.184 *Mines PSI 2021* Baptiste Pozzobon I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et H un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$. On pose $r = \text{rang}(f)$.

- Montrer que $g : H \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ est un isomorphisme.
- Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et $\mathbb{C}^n$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$.
- Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rang}(C) = r$. Montrer qu'il existe $(P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $C = PJ_rQ$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AC = CB$.
- Montrer que les matrices A et B admettent au moins r valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).
- Donner un argument plus rapide pour montrer que si C est inversible, alors A et B admettent au moins n valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

5.185 *Mines PSI 2021* Arthur Riché II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Trouver le spectre de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Justifier l'existence de $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et de $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.
- Donner une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $TN = NT$.
- En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

5.186 *Mines PSI 2021* Arthur Sureau I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = ((\alpha X + \beta)P)'$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .
- Soit $n \in \mathbb{N}$, diagonaliser l'application φ_n induite par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

5.187 *Mines PSI 2021* Guillaume Touly II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \chi_M$ son polynôme caractéristique.

Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(M), |\lambda| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$.

5.188 *CCINP PSI 2021* Mathilde Arnaud II

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n v_k = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = x - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)v$.

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
- Pour $y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $y \in \text{Im}(f) \iff f(y) = y$.
- Justifier que $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$. Qu'en déduire ?
- Expliciter les sous-espaces propres de f .

5.189 *CCINP PSI 2021* Maëva Berland II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

- Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M , les valeurs propres de M sont des racines de P .
- On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\text{Tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.
- On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.
- Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M .

5.190 *CCINP PSI 2021* Julie Coheleach II

Soit E un espace de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de f .

- Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

- Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g .
- Montrer qu'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à f et g .
- Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
- En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

5.191 CCINP PSI 2021 Johan Haramboure II

- a. Énoncer le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour une matrice carrée.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Soit, dans la suite de cet exercice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- c. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression par blocs de $P(M)$ si $P \in \mathbb{R}[X]$.
- d. Montrer que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.
- e. Montrer que si M est diagonalisable alors $A = 0$.

5.192 CCINP PSI 2021 Antonio Treilhou II

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $R(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Tr}(M^n)$ et $v_n = \text{Tr}(R(a, b)^n)$.

- a. Montrer que M est diagonalisable.
- b. Exprimer $R(a, b)$ en fonction de M et I_3 .
- c. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite divergente à valeurs entières.
- d. Montrer qu'on peut choisir a et b de sorte que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5.193 CCINP PSI 2021 Adeline Vaudrey II

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f a la même matrice A dans toutes les bases de E .

- a. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, montrer que $PA = AP$.
- b. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que $BA = AB$.
- c. En déduire la forme de la matrice A . Comment appelle-t-on l'endomorphisme f ?

5.194 Mines-Télécom PSI 2021 Juliette Maricourt II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (C_1 \quad \cdots \quad C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par ses colonnes et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- a. Que dire de X si $\sum_{j=1}^n x_j C_j = 0$?

- b. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sans calculer son polynôme caractéristique.

5.195 X PSI 2022 Olivier Courmont IV

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

- a. Calculer χ_{A_m} .
- b. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?
- c. Traiter la diagonalisabilité de A_m dans le cas général.

5.196 X PSI 2022 Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(e_i) = e_{i+1}$ si $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et $u(e_n) = 0$.

Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par u .

5.197 X PSI 2022 Lucas Lacampagne III

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

a. Soit $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

Indication : considérer les petites valeurs de $\deg(P)$.

b. Que se passe-t-il si on suppose $n = 2p + 1$ impair ?

5.198 ENS Cachan PSI 2022 Jimmy Guertin II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

5.199 ENS Cachan PSI 2022 Maxence Rossignol I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.

a. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

b. Trouver A et B symétriques telles que AB n'est pas symétrique.

c. Montrer que s'il existe une base de vecteurs propres communs à A et à B , alors AB est symétrique.

5.200 Centrale Maths1 PSI 2022 Louis Bardinet

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$ -espace de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^2 + 2f + \alpha \text{id}_E = 0$.

a. Si $n = 2$ et $\alpha = 1$, que dire de f ?

On suppose dans la suite que $\alpha > 1$.

b. Montrer que n est pair.

c. Si $n = 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$.

d. Si $n = 2p > 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs.

5.201 Mines PSI 2022 Amandine Darrigade I

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.

c. Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

5.202 Mines PSI 2022 Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n .

5.203 Mines PSI 2022 Peio Lanot I Soit $n \geq 2$, $C \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $L \neq 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $A = CL - I_n$.

a. Peut-on avoir $A = -I_n$?

b. Montrer que $A^2 + (2 - LC)A + (1 - LC)I_n = 0$.

c. Dans quel cas A est une matrice de symétrie ?

d. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, montrer que λ est racine d'un polynôme de degré 2.

e. A est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.

5.204 *Mines PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Calculer χ_A .
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

5.205 *Mines PSI 2022* Florian Picq I

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \mapsto \text{ch}(kx)$ et $g_k : x \mapsto \text{sh}(kx)$ définies sur $\mathbb{R}$ des vecteurs de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pose $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ et Φ définie sur E par $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base de F .
- Montrer que la restriction de Φ à F est un endomorphisme qu'on note Ψ .
- L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

5.206 *Mines PSI 2022* Élouan Princelle II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X], \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), Q(M) = A)$.

5.207 *Mines PSI 2022* Maxence Rossignol II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.

- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, AB^k - B^kA = kB^k$.
- En déduire que B est nilpotente.

5.208 *Mines PSI 2022* Alban Soyez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Calculer χ_A .
- Trouver une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

5.209 *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par α .

Soit dans les questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par α . On définit alors l'endomorphisme α' de P induit par α dans P , qu'on note $\alpha' = \alpha_P$.

- Montrer que $\chi_{\alpha'}$ divise χ_α .
- En déduire que $P \subset \text{Ker}((\alpha - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$.
- Que vaut donc P ?

5.210 *CCINP PSI 2022* Anna Decrock II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- Trouver les valeurs propres de A .
- Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?
- Donner des vecteurs propres u et v de A et un vecteur w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que A est trigonalisable et la trigonaliser.

5.211 *CCINP PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne II et Anatole Rousset II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM$.

- Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si f_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.
- Construire un vecteur propre de f_A via un vecteur propre de A .
- Construire un vecteur propre de A via un vecteur propre de f_A .
- Montrer que A et f_A ont le même spectre.

5.212 *CCINP PSI 2022* Colin Herviou-Laborde et Élouan Princelle II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

- Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M , les valeurs propres de M sont des racines de P .
- On suppose que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable et que $\text{Tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.
- On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.
- Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M .

5.213 *CCINP PSI 2022* Fares Kerautret I et Louis Lacarrieu I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A , les valeurs propres de A sont racines de P .
- Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
- Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.
- Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

5.214 *CCINP PSI 2022* Paul Lafon II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = A$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = MB - BM$.

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Calculer $\text{Tr}(A)$. Généraliser en calculant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A^k)$.
- Montrer que A est nilpotente.

5.215 *CCINP PSI 2022* Joël Lascoumes et Jade Mirassou II

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ?
- Montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.
- Montrer que toute matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = A$ est diagonalisable.
- Combien y a-t-il de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$?

5.216 *CCINP PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Tr}(A^n)$.

- En utilisant un polynôme annulateur de A , établir une relation entre u_{n+3} , u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .
- En déduire que $\forall n \geq 2, u_n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Exprimer u_n en fonction des valeurs propres de A .
- En déduire que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$ converge.

5.217 *CCINP PSI 2022* Manon Odelot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$.

- Déterminer χ_B en fonction de χ_A . En déduire le spectre de B en fonction de celui de A .
- Si A est inversible et a n valeurs propres distinctes, montrer que B est diagonalisable.
- Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
- Donner un exemple où A est diagonalisable et B ne l'est pas.
- Montrer que si A est inversible et diagonalisable, alors B est aussi diagonalisable.

5.218 *CCINP PSI 2022* Ewan Sarrazin I

On définit sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'application ϕ qui à tout polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne du polynôme X^2P par $D = X^4 - 1$.

- Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E .
- Montrer que ϕ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
- Est-ce que ϕ est inversible ? Si oui, donner ϕ^{-1} .

5.219 *CCINP PSI 2022* Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On note Id l'application identité de $\mathbb{C}^n$.

- Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.
- Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\text{Ker}(u^2 - \lambda^2 \text{Id}) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \lambda \text{Id})$.
- Montrer que la réciproque de la question **a.** est vraie si u est bijective.

5.220 *CCINP PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie n , f un endomorphisme de E qui admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

- Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g , puis que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g .
- En déduire qu'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à f et g .
- Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
- En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

5.221 *Mines-Télécom PSI 2022* Jade Mirassou I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(u^p) = \text{Ker}(u^{p+1})$, montrer que $\forall \ell \in \mathbb{N}, \text{Ker}(u^{p+\ell}) = \text{Ker}(u^p)$.

Supposons u nilpotent et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$.

c. Déterminer le polynôme caractéristique de u .

d. En déduire que $q \leq n$.

5.222 *Mines-Télécom PSI 2022* Manon Odelot I

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c. Comment aurait-on pu faire autrement pour b. ?

5.223 *Mines-Télécom PSI 2022* Paul Sterlin I

Soit l'application Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Phi(P) = \int_X^{X+1} P(t) dt$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note Φ_n l'application induite par Φ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

a. Montrer que Φ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Φ_2 est-il diagonalisable ?

c. Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

5.224 *Navale PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Trouver une base de $\text{Ker}(A - 2I_3)$.

c. Trouver les plans stables par A .

5.225 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \right\}$.

Indication : écrire le système $Au = \lambda u$ en une ligne i quelconque.

5.226 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Campos

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. On note, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $D(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

a. Montrer que S est semblable à une matrice $D(a, b)$ que vous déterminerez.

b. Montrer que S est semblable à une matrice à diagonale nulle que vous déterminerez.

c. En étudiant l'application $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = D(1, 2)M - MD(1, 2)$, montrer qu'il existe un couple $(C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ tel que $S = CD - DC$.

5.227 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marius Desvalois

Soit $E = \mathbb{C}^4$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u^2 = v^2 = \text{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$.

- a. Montrer que $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(v) = 0$.
- b. Montrer que u est diagonalisable et que -1 et 1 sont valeurs propres doubles de u .
- c. Soit (x, y) une base de $E_1(u)$. Montrer que la famille $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$ et que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est une base de E .
- d. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable et donner les éléments propres de $u \circ v$.

5.228 *Centrale Maths1 PSI 2023* Clément Gallice

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $P \in E$, on pose $L(P) : x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t) e^t dt$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f est intégrable en $-\infty$.

- a. Montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel x .
- b. Montrer que L est un endomorphisme de E .
- c. Déterminer les éléments propres de L .

5.229 *Centrale Maths1 PSI 2023* Sacha Meslier

Soit un entier $q \geq 2$ et deux familles $(a_1, \dots, a_q)$ et $(b_1, \dots, b_{q-1})$ de réels strictement positifs. On définit

alors la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_q \\ b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

- a. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de A .
- b. Montrer que A^q a tous ses coefficients strictement positifs.
- c. Donner la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres complexes de A .
- d. Montrer que A admet une unique valeur propre strictement positive.

5.230 *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit un entier $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $T(P) = P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)$.

- a. Montrer que T est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique de E .
- b. Déterminer $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$.
- c. En déduire les sous-espaces propres de T . T est-il diagonalisable ?

5.231 *Mines PSI 2023* Arthur Biot III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

- a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- b. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A .
- c. Quelle est la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?

5.232 *Mines PSI 2023* Rebecca Blé III

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

- a. Montrer que M est diagonalisable. Donner les valeurs propres possibles de M .
- b. La matrice M est-elle forcément symétrique ?

5.233 *Mines PSI 2023* Mathys Bureau I

Soit $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f)(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de E .
- b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; 1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.
- c. Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(0)$.
- d. Trouver de même, pour $x \in [0; 1]$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(x)$.
- e. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.
- f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?
- g. Pour $f \in E$, calculer $(T(f))'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

5.234 *Mines PSI 2023* Hugo Delval I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n$.
- b. Diagonaliser A_n .
- c. En déduire la convergence et la limite de la suite $(A_n^n)_{n \geq 1}$.

5.235 *Mines PSI 2023* Raphaël Dénier II et Tom Graciet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = Y$.
- (ii) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX = XB \implies X = 0$.
- (iii) $\chi_B(A)$ est une matrice inversible.
- (iv) A et B n'ont aucune valeur propre commune.

5.236 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer II

- a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B .
- b. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?
- c. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

5.237 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 32$ et $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$.

On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_A(B) = AB$. Déterminer $\text{Tr}(\varphi_A)$.

5.238 *Mines PSI 2023* Sacha Meslier II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.
- b. Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de k la matrice A est-elle diagonalisable ?

5.239 *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin(2\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de $A(\alpha)$ en fonction de α .

5.240 *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que :

- $\forall A \in G, A^{-1} \in G$.
- $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall A \in G, A^p = I_n$.
- $\forall (A, B) \in G^2, AB \in G$.

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices de G , $r = \dim(F)$ et $(M_1, \dots, M_r)$ une base de F . On définit $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^r$ par $\varphi(A) = (\text{Tr}(AM_1), \dots, \text{Tr}(AM_r))$.

- a. Montrer que φ est injective.
- b. Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ est fini.
- c. En déduire que G est fini.

5.241 *CCINP PSI 2023* Paul Bats I

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- a. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable.
- b. Si f^2 est diagonalisable, f l'est-elle forcément ?
- c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, montrer que $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{id}_E)$.
- d. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable.

5.242 *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire classique telle que $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forme la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Donner la définition d'un projecteur.
- b. Pour $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, est-ce que $E_{i,j}$ est une matrice de projecteur ?
- c. Montrer que si M est diagonalisable, M est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.
- d. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs.

Vous donnerez les éléments géométriques caractéristiques de ces deux projections.

- e. Une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

5.243 CCINP PSI 2023 Maddie Bisch I et Rebecca Blé I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$, montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.
- b. Montrer que $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $AM = MB \iff M = 0$.
- d. Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists ! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AM - MB = C$.

5.244 CCINP PSI 2023 Armand Dépée II

Soit un entier $n \geq 2$ et un complexe α . On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

- a. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
- b. Calculer le rang de A , en déduire ses valeurs propres.
- c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

5.245 CCINP PSI 2023 Pierre Dobeli II

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

- b. Trouver ses éléments propres.
- c. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

5.246 CCINP PSI 2023 Olivier Farje II et Arthur Melnitchenko I et Marie-Lys Ruzic I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- b. Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par a .

Soit dans les deux questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par a . On définit alors l'endomorphisme a' de P induit par a dans P , qu'on note $a' = a_P$.

- c. Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a .
- d. En déduire que $P \subset \text{Ker}((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$.
- e. Quels sont les plans stables par a ?

5.247 CCINP PSI 2023 Jonathan Filocco II et Antoine Vallade II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = i$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ sinon,

c'est-à-dire $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$. On note P_n le polynôme caractéristique de A_n .

- a. Justifier que A_n est diagonalisable.
- b. Trouver le spectre de A_2 .
- c. Montrer que $\forall n \geq 3$, $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - X(X - 1) - (X - n + 2)$.
- d. En déduire que A_n admet au moins une valeur propre dans $]0; 1[$, $]1; 2[$, $\dots,]n - 2; n - 1[$ et $]n; +\infty[$.
Indication : montrer que, pour $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, le réel $(-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n) < 0$.
- e. En déduire, autrement qu'à la première question, que A_n est diagonalisable.

5.248 *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

5.249 *Centrale Maths1 PSI 2024* Amélia Arangoits

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que F est stable par M si et seulement si $F^\perp$ est stable par M^T .

b. Trouver les sous-espaces stables par $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.250 *Centrale Maths1 PSI 2024* Romane Mioque et Maxime Plottu

a. Montrer que si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M et $2M$ sont semblables.

b. Que vaut $\text{Sp}(M)$? Qu'en déduire sur M ?

c. Trouver un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle telle que M et $2M$ sont semblables.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\text{rang}(M) = 1$, montrer que M est semblable à $E_{2,3}$.

En déduire que M est semblable à $2M$.

e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $n - 1$, montrer que M est semblable à $2M$.

5.251 *Mines PSI 2024* Amélia Arangoits II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X-k)$.

5.252 *Mines PSI 2024* Yasmine Azzaoui II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

b. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

c. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

5.253 *Mines PSI 2024* Thomas Favant I

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$ et $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(u) = v$ où $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

a. Montrer que φ est un automorphisme de E .

b. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .

5.254 *Mines PSI 2024* Tiago Genet et Lou Goiffon I

Soit $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$.

a. Vérifier que $P(2) = P'(2) = 0$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$.

5.255 *Mines PSI 2024* Martin Mayot I

On définit $A_0 = (1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix}$.

a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la taille de la matrice A_n .

b. Calculer le rang de A_n .

c. Donner les valeurs propres de A_n . La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

5.256 *Mines PSI 2024* Clément Reiner II

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on pose $E = \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

- Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.
- Déterminer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$ en fonction de a et b .
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

5.257 *Mines PSI 2024* Guilhem Thébault I

Soit $N \geq 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$.

- Identifier un endomorphisme f de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$.
- En déduire que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

5.258 *Mines PSI 2024* Antoine Vergnenègre I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et V nilpotente.

- Montrer que $\det(I_n + M) = 1$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente.
- Montrer que $\det(U + V) = \det(U)$ si U est inversible.
- Montrer que $\det(U + V) = \det(U)$. Indication : montrer que $\text{Ker}(U)$ est stable par V .

5.259 *CCINP PSI 2024* Amélia Arangoits II

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- Donner au moins une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini.
- Donner les valeurs propres de A .
- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

5.260 *CCINP PSI 2024* Edward Bauduin II

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1) : $M^3 - 4M = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$.

- Montrer que les valeurs propres de M sont des racines de $P = X^3 - 4X$.
- En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1).

5.261 *CCINP PSI 2024* Amjad Belmiloud I

a. Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

b. Calculer χ_C en fonction de χ_A . En déduire $\text{Sp}(C)$ en fonction de $\text{Sp}(A)$.

c. On suppose $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta = \gamma$. Calculer χ_B en fonction de χ_A , puis $\text{Sp}(B)$ en fonction de $\text{Sp}(A)$.

d. Montrer que si $X \in \text{Ker}(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B)$. En déduire que $\dim(\text{Ker}(B)) \geq 2 \dim(\text{Ker}(A))$.

e. Diagonaliser B pour $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$.

5.262 *CCINP PSI 2024* Martin Mayot I

Soit $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et U et V des matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Q(U)$ et $Q(V)$ sont semblables.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k .

c. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner une expression de $P(M)$ en fonction de A , $P(A)$ et $P'(A)$.

d. Montrer que si M est diagonalisable, alors A l'est aussi.

e. Étudier la réciproque si A est inversible.

f. Montrer que si M est diagonalisable et A n'est pas inversible, alors $A = 0$.

5.263 *CCINP PSI 2024* Jasmine Meyer II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

a. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

b. Calculer $\det(A)$.

c. Prouver que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.

5.264 *CCINP PSI 2024* Tom Sanchez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AU = UB$ et $U \neq 0$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(A) = 0$, alors $\text{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P .

b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.

c. En déduire A et B possèdent une valeur propre commune.

d. Montrer que si deux matrices C, D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre commune, il existe une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $CM = MD$.

5.265 *Mines-Télécom PSI 2024* Clément Lacoste II

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

a. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

b. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, montrer que les vecteurs propres de A sont aussi des vecteurs propres de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?

c. Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

5.266 *Mines-Télécom PSI 2024* Romane Mioque I

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u = \sum_{k=1}^n e_k$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(e_i) = e_i + u$.

- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
- L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- Déterminer la valeur de $\det(f)$ et $\text{Tr}(f)$.

5.5 Officiel de la Taupe

5.267 *OdT 2012/2013 Centrale PSI planche 123II*

Donner quelques exemples de matrices carrées d'ordre n dont les éléments diagonaux correspondent aux valeurs propres avec leur ordre de multiplicité.

Déterminer les matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 & \alpha \\ 12 & 3 & 7 \\ \alpha - 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifiant cette propriété notée (P).

Montrer qu'une matrice symétrique réelle vérifie cette propriété si et seulement si elle est diagonale.

5.268 *OdT 2012/2013 CCP PSI planche 208II*

Soit A une matrice carrée réelle de taille 2, non nulle et telle que ${}^tA = A^2$. Déterminer un polynôme annulateur de A . Montrer que si 0 est valeur propre de A , alors elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.269 *OdT 2012/2013 CCP PSI planche 210II*

On veut montrer par récurrence que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$ alors $A^n = 0$.

Soit A une telle matrice avec $n \geq 2$, en calculant $\chi_A(A)$, montrer que 0 est valeur propre de A .

Montrer que A est semblable à une matrice A' dont la dernière colonne est nulle. On note B la matrice obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de A' . Conclure.

5.270 *OdT 2012/2013 Ensam PSI planche 242I*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables. Calculer $d = \sup_{F \in A} (\dim F)$.

5.271 *OdT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 73*

On note $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables. Pour D diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$ (dans cet ordre), on note $\exp(D)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $e^{d_1}, \dots, e^{d_n}$ (dans cet ordre).

Si $M = PDP^{-1}$ est diagonalisable, on note $\exp(M) = P \exp(D) P^{-1}$. Montrer que $\exp$ est bien définie sur $D_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que $PDP^{-1} = QD'Q^{-1} \implies P \exp(D) P^{-1} = Q \exp(D') Q^{-1}$.

Pour $M \in D_n(\mathbb{C})$, soit $g : t \mapsto \exp(tM)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Si $(M, N, R) \in D_n(\mathbb{C})^2 \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Y(t) = \exp(tM) R \exp(tN)$, montrer $Y(t) - R = M \int_0^t Y(s) ds + \left(\int_0^s Y(s) ds \right) N$.

On pose $\|A\| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

On suppose les valeurs propres de M et N à parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$

et que $\int_0^t Y(s) ds$ admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$. Montrer que $\exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $MX + XN = R$.

5.272 *OdIT 2013/2014 Mines PSI planche 190I*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

Si $\text{rang}(f) = 2$, donner son polynôme caractéristique en fonction de $\text{Tr}(f)$ et $\text{Tr}(f^2)$.

Si $\text{rang}(f) = 3$, le donner en fonction de $\text{Tr}(f)$, $\text{Tr}(f^2)$ et $\text{Tr}(f^3)$.

5.273 *OdIT 2013/2014 CCP PSI planche 247I*

Décomposer A , matrice carrée complexe de rang 1, comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne. En déduire que $A^2 = \text{Tr}(A)A$. Trouver le polynôme caractéristique de A . À quelle condition $A + I_n$ est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

5.274 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 156I* (Mathias)

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en A .

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le degré d'un polynôme annulateur de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de A . Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \dots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^k c_i (A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

5.275 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 157I*

a. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $a_{i,j} = \text{Min}(i, j)$, trouver une matrice L , triangulaire inférieure, n'ayant que des 1 sur la diagonale, et une matrice U , triangulaire supérieure, telle que $A = LU$.

b. Exprimer A^{-1} en fonction de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $n_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et 0 sinon.

c. Montrer que le spectre de A^{-1} est inclus dans $[1; 4]$.

5.276 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 160I*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la propriété $\mathcal{P} : \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \det(\lambda A - M) \neq 0$.

La propriété est-elle vraie pour A inversible ? Est-elle vraie pour A non inversible ?

5.277 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 163II*

a. À quelle(s) condition(s) $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que, dans ce cas, pour tout n , M^n est combinaison linéaire de M et I_4 .

5.278 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 170III*

a. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. En déduire que pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, les polynômes caractéristiques de AB et BA sont identiques.

5.279 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 224I*

a. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$ converge.

b. Montrer que L tel que $L(P)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

5.280 *OdIT 2014/2015 PSI Centrale planche 233I*

On note r l'application qui fait tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$ le coefficient (i, j) d'une matrice autour de son centre.

Par exemple $r(1, n) = (1, 1)$. Si A est une matrice carrée, complexe de taille n de coefficients $a_{i,j}$, on note $R(A)$ la matrice obtenue après rotation et $b_{i,j}$ ses coefficients.

Montrer que R est un isomorphisme diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

5.281 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 233II*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres strictement positives et telle que $\{A^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ est bornée.
Montrer que $\text{Sp}(A) = \{1\}$ puis que $A = I_n$.

5.282 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 239II*

On donne $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, $u, v_1, \dots, v_p$ des endomorphismes non nuls d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E tels que $\forall n \in \llbracket 0; p \rrbracket, u^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n v_k$.

a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(u) = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) v_k$.

b. En déduire que u est diagonalisable.

c. Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u et déterminer l'idéal annulateur de u .

d. Montrer que les v_k sont les projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_k \text{id}_E)$.

5.283 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 243II*

Trouver $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$ et $\text{Tr}(A) = 2$.

5.284 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 245II*

a. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

b. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est aussi.

c. Pour $n = 2$, exprimer les vecteurs propres de B en fonction de ceux de A .

5.285 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 274I*

f , définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M - \text{Tr}(M)I_n$, est-elle linéaire ? Est-elle diagonalisable ?

5.286 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 275II*

Montrer que f qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$ est un endomorphisme et déterminer ses valeurs propres.

f est-il diagonalisable ? Inversible ?

5.287 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 278II*

On cherche $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^t M = I_n$. Trouver un polynôme annulateur de degré 4 de M .
Montrer que $M - I_n$ est inversible et conclure.

5.288 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 283*

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? (on calculera $C_1 - C_2 - C_3$) ?

b. Trouver ses éléments propres.

c. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

5.289 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 288II*

Trouver les valeurs propres de la matrice réelle, carrée, de taille n qui a $1, 2, \dots, n$ sur la dernière ligne et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs.

5.290 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 292II*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , ayant n valeurs propres distinctes.

a. Montrer que si g commute avec f , tout vecteur propre de f est vecteur propre de g et en déduire qu'il existe une base de vecteurs propres commune à f et g .

b. Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

5.291 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 293I*

a. Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$. Montrer que si M^2 est diagonalisable, alors M l'est aussi.

b. Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

c. Calculer N^2 et en déduire que N est diagonalisable si et seulement si AB l'est.

5.292 *OdIT 2014/2015 ENSAM PSI planche 322II*

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

5.293 *OdIT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 324I*

Déterminer les éléments propres de $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{n,j} = 1$ si $j \leq n-1$, $a_{i,n} = -1$ si $i \leq n-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Est-elle diagonalisable ?

5.294 *OdIT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 327II*

$A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 + A - I_n = 0$, est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$? Dans $M_n(\mathbb{R})$?
Montrer que $\det(A) > 0$.

5.295 *OdIT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 42*

Pour A et B des polynômes fixés de $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(B) = n+1$, on note Φ l'application qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne de AP par B .

Montrer que si A et B sont premiers entre eux, Φ est un isomorphisme.

On suppose B scindé à racines simples ; trouver les valeurs propres de Φ . Est-il diagonalisable ?

On choisit $A = \alpha X^{p+1} - (\alpha+1)X^p + 1$ et $B = (1-X)^2$; Φ est-il diagonalisable ?

5.296 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 118II*

Montrer que, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 = A + I_n$, alors $\det(A) > 0$.

5.297 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 123II*

On note P l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $T > 0$, justifier la légitimité de l'endomorphisme u défini sur P par : $u(f)(x) = \frac{1}{T} \int_x^{x+T} f(t) dt$. Montrer que $u \in GL(P)$ et donner son spectre.

5.298 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 127III*

Soient A et B deux matrices réelles, carrées d'ordre 2 telles qu'il existe trois réels a, b, c vérifiant la relation $AB = aI_2 + bA + cB$; montrer qu'il existe trois réels x, y, z tels que $BA = xI_2 + yA + zB$.

5.299 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 131I*

Montrer que λ est valeur propre de la matrice A dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \dots, n$ et tous les autres valent 1, si et seulement si $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes.

5.300 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 133III*

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T , défini sur l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une limite finie en $+\infty$, par $T(f)(x) = f(x+1)$.

5.301 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 178*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que si $u \circ v = 0$, u et v ont un vecteur propre commun (on étudiera d'abord le cas où u est injectif).

Montrer que si $u \circ v \in \text{Vect}(u, v)$, u et v ont un vecteur propre commun, puis qu'il existe une base B dans laquelle u et v ont des matrices triangulaires supérieures.

5.302 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 183*

Calculer $D(t) = \begin{vmatrix} a+t & c+t & \cdots & c+t \\ b+t & a+t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+t \\ b+t & \cdots & b+t & a+t \end{vmatrix}$ où $b \neq c$ et $bc \neq 0$. En déduire le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de M ; est-elle diagonalisable ?

5.303 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 233I*

Montrer qu'un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

5.304 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 237II*

Soient $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ et Φ une forme linéaire non nulle de E , $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Montrer que u , défini par $u(x) = x + \Phi(x)x_0$ est un endomorphisme admettant 1 pour valeur propre.

Donner la dimension de $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ puis une CNS pour que u soit diagonalisable.

5.305 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 241II*

Montrer que Φ , défini par $\Phi(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont on donnera le noyau et le rang. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 annulateur de Φ .

Φ est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer Φ^{-1} .

5.306 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 242I*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(A)$ est triangulaire à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts ; montrer que A est diagonalisable.

5.307 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 243I*

Soit $n \geq 3$, montrer que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, constituée de 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

5.308 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 244II*

Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi M^2 l'est. Est-ce toujours vrai si M n'est pas inversible ?

5.309 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 245I*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont valeurs propres ; montrer que $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$ (on n'utilisera pas directement que le spectre est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur). Montrer que f est diagonalisable.

5.310 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 247II*

On note E l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que Φ défini par $\Phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$ est un endomorphisme de E .

Déterminer ses valeurs propres, ses sous-espaces propres et $\text{Ker}(\Phi^2)$.

5.311 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 248I*

Justifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A . Donner une CNS sur (u_0, v_0, w_0) pour que les trois suites (u_n) , (v_n) , (w_n) vérifiant la récurrence couplée
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$
 convergent.

5.312 *OdIT 2015/2016 ENSAM PSI planche 272I* Dire, suivant $z \in \mathbb{C}$, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = 0$. Donner les éléments propres de M pour $z = e^{i\theta}$.

5.313 *OdIT 2015/2016 ENSAM PSI planche 274II*

Pour f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

Montrer que f est un endomorphisme de l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Est-il surjectif ? Injectif ? Donner ses éléments propres.

5.314 *OdIT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 279II*

Pour $a \in \mathbb{R}$, donner les valeurs et vecteurs propres de u défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $u(P)(X) = (X - a)P'(X)$.

Trouver l'ensemble des polynômes divisibles par leur dérivée.

5.315 *OdIT 2015/2016 Télécom SudParis planche 284I*

Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, il existe $(U, V) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $A = U^t V$.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$. Trouver le polynôme minimal de A .

5.316 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 36II*

Trouver une CNS sur $A \in M_n(\mathbb{K})$ pour que $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

5.317 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 36III*

Résoudre $B^2 = N = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $B \in M_3(\mathbb{R})$.

5.318 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 40II*

Soit E un espace de dimension finie, f, g deux endomorphismes de E de matrices A, B dans la base $\mathcal{B}$ de E .

- Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
- Si $\lambda \in \text{Sp}(AB)$, on note E_λ (resp. F_λ) le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de AB (resp. de BA). Montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension si $\lambda \neq 0$.
- Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable et si $\text{rang}(f \circ g) = \text{rang}(g \circ f)$, alors $g \circ f$ l'est aussi.
- Trouver deux matrices X et Y telles que XY soit diagonalisable mais pas YX .

5.319 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 107II*

Déterminer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que, si A est diagonalisable, B l'est aussi.

5.320 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 111II*

Montrer que si A et B , carrées, complexes de taille 2 commutent, alors A est un polynôme en B ou B est un polynôme en A . Cela reste-t-il vrai pour des matrices de taille 3 ? Pour des matrices réelles ?

5.321 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 113I*

Montrer que D défini par $D(f)(x) = xf'(x)$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver $\text{Ker}(D)$ puis ses éléments propres.

5.322 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 114II*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace E de dimension finie tel qu'il existe p endomorphismes non nuls $v_1, \dots, v_p$ et p réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distincts deux à deux vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n v_i$.

Montrer que $\forall p \in \mathbb{R}[X], P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) v_i$ et que u est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base $(L_1, \dots, L_p)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$. Montrer que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

5.323 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 116II*

Réduire ϕ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi(M) = M + \text{Tr}(AM)A$ où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.324 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 118I*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Montrer qu'il existe p endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que l'on ait :

$\forall p \in \mathbb{C}[X], P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \exists P_i \in \mathbb{C}[X], P_i(u) = u_i$.

Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme tel qu'il existe p endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ vérifiant $\forall p \in \mathbb{C}[X], P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$, alors u est diagonalisable.

5.325 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 119I*

Trouver les polynômes annulateurs de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

5.326 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 121II*

Déterminer les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5.327 *OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 173 et compléments Centrale PSI planche 207*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on cherche la dimension de $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0\}$.

Si A est diagonalisable ; montrer que $\dim E = \dim\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid DND = 0\}$ où D est une matrice diagonale à expliciter. Donner la dimension de E en fonction du rang de A .

Peut-on généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable ?

5.328 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 203I*

Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, déterminer la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ donné par $f(P)(X) = (X - a)P'(X) + P(X) - P(a)$ dans la base canonique. Donner son noyau, son image, ses éléments propres.

5.329 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 208I*

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de A^2 . Montrer que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont

supplémentaires. En déduire que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$.

Donner le spectre de B et en déduire que A est diagonalisable.

5.330 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 209II et compléments CCP PSI planche 372II*

Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une matrice diagonale D semblable à A .

Montrer que si M commute avec D , elle est diagonale.

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

5.331 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 210II*

Calculer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer les sous-espaces propres de A_3 . Les matrices A_2 et A_1 sont-elles diagonalisables ?

5.332 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 211II abordable dès la 1^{ère} année*

Montrer que f , défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

5.333 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 214I*

a. Montrer que si $M \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$ est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable (on pourra montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annihilant M).

b. Soit A et B inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, montrer que $N \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$.

c. Calculer N^2 puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(N^2)$.

d. On suppose N diagonalisable, montrer que le produit AB est diagonalisable.

e. Qu'en est-il de la réciproque ?

5.334 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 218II*

Pour n pair, $n \geq 2$, déterminer le rang de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \dots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'une matrice et

sa transposée ont même spectre. Montrer que A_n est diagonalisable, donner ses éléments propres.

5.335 *OdIT 2016/2017 ENSAM PSI planche 240I*

Que peut-on dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont distincts 2 à 2 ? Trouver $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.336 *OdIT 2016/2017 ENSAM PSI planche 241I*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$, alors n est pair.
Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - B + I_n = 0$, alors n est pair.
Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3 + C^2 + C = 0$, alors C est de rang pair.

5.337 *OdIT 2016/2017 ENSAM PSI planche 242I*

À quelle(s) condition(s), nécessaire(s) et suffisante(s), $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

5.338 *OdIT 2016/2017 ENSEA PSI planche 251I*

Donner le spectre de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(A) \in \text{Sp}(A)$.
Déterminer $\phi(M)$ quand M est triangulaire et n'a que des 0 sur sa diagonale.
Déterminer $\phi(I)$ et aboutir à une contradiction. Que conclure ?

5.339 *OdIT 2016/2017 ENSEA PSI planche 252II*

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que $(f - \text{id}_E)^3 \circ (f - 2\text{id}_E) = 0$ et $(f - \text{id}_E)^2 \circ (f - 2\text{id}_E) \neq 0$.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5.340 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 116II*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a. Montrer que si A et B n'ont aucune valeur propre commune, $\exists ! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$.
b. Qu'en est-il de la réciproque ?

5.341 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 118II*

Montrer que f , défini par $f(P)(X) = nXP(X) - (X^2 - 1)P'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Résoudre $nxy - (x^2 - 1)y' = \lambda y$ sur $] -1; 1[$ et donner les solutions polynomiales.
Réduire f , trouver son déterminant et sa trace. Que dire de son rang ?

5.342 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 124II*

Éléments propres de $M = (x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5.343 *OdIT 2017/2018 Centrale PSI planche 169*

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
Qu'est-ce que le polynôme caractéristique ? Donner le théorème de CAYLEY-HAMILTON.
Montrer que si $\chi'_u(0) \neq 0$, alors $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.

5.344 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 215I*

Deux matrices A et B de taille $n \geq 2$ possèdent le même spectre.
Sachant que les valeurs propres sont distinctes 2 à 2, montrer qu'elles sont semblables.
Donner 2 matrices possédant les mêmes valeurs propres mais qui ne sont pas semblables.

5.345 OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 252I et 2014/2015 CCP PSI planche 282I et 2015/2016 CCP PSI planche 240II

Soit E un espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- a. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $v \circ u$. Montrer que λ est une valeur propre de $u \circ v$.
- b. Montrer que si E est de dimension finie, le résultat est encore vrai pour $\lambda = 0$.
- c. On choisit $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = Q$ où Q est la primitive de P s'annulant en 0. Calculer $\text{Ker}(v \circ u)$ et $\text{Ker}(u \circ v)$. Conclure.

5.346 Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 442I et compléments Mines-Télécom PSI planche 574I

Donner le rang et une base de l'image de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{i,j} = \frac{i}{j}$. En déduire une valeur propre de A et le sous-espace propre associé. Montrer que A est diagonalisable et donner ses éléments propres. Déterminer P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M commute avec A si et seulement si $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont stables par M . En déduire la dimension du commutant de A .

5.347 Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 454II

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr } A = 0$ et $A^2 + {}^tA = I_3$ (on pourra chercher un polynôme annulateur de A et montrer que les valeurs propres de A en sont racines) ?

5.348 Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 566I

Montrer que $f : P \mapsto X(1+X)P' - nXP$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera les éléments propres.

5.349 Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 569II

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^5 + A = I_n$, alors $\det(A) > 0$.

5.350 Compléments OdIT 2017/2018 ENSEA PSI planche 580II

Montrer que si f , u et v sont trois endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel vérifiant :
 $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, f^i = \alpha^i u + \beta^i v$, alors f est diagonalisable.