DM 05 : RÉDUCTION

PSI 1 2025/2026 **pour le mardi 25 novembre 2025**

PARTIE 1 : ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1.1 Réduction de A

1.1.1 Après un simple calcul de déterminant par SARRUS par exemple, en reconnaissant 1 comme racine évidente de χ_A, on trouve $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. En résolvant les deux systèmes linéaires $AX = X$ et $AX = 2X$, on trouve sans peine $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}((1,0,1)) \text{ et } E_2(A) = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,0,1)).}$

1.1.2 Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, que les dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2 de A sont égales à leurs multiplicités $m_1(A) = 1$ et $m_2(A) = 2$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on a, par formule de changement de base, si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = ((1,0,1),(1,-1,0),(0,0,1))$ (car $\det(P) = -1$) $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \mathrm{diag}(1,2,2).}$

1.2 Commutant de A

1.2.1 Si $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on vérifie aisément que $ND = DN \iff n_{1,2} = n_{1,3} = n_{2,1} = n_{3,1} = 0$ par un calcul extensif, c'est-à-dire que $\boxed{ND = DN \iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5,\ N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}.}$

1.2.2 Ainsi, $\mathcal{C}(D) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3})$ et $\mathcal{F} = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est libre en tant que sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{C}(D)$. Ainsi, $\boxed{\dim(\mathcal{C}(D)) = 5.}$

1.2.3 Comme A est semblable à D, en utilisant le résultat admis, $\boxed{\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{C}(D)) = 5.}$

PARTIE 2 : COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME NILPOTENT D'INDICE 2

2.1 Une décomposition de E

2.1.1 Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists x \in E,\ y = f(x)$. Alors $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$

2.1.2 G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E donc $n = \dim(G) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Par la formule du rang appliquée à f, on a $n = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$ donc, en soustrayant, on obtient $\boxed{\dim(G) = \mathrm{rg}(f).}$

$\boxed{2.1.3}$ Les espaces $\mathrm{Im}(f)$ et F sont inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$ donc les deux premières colonnes (par blocs) de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ sont nulles. De plus, $f(G) \subset \mathrm{Im}(f)$ donc les deux derniers blocs de la troisième colonne sont aussi nuls. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc de la forme de l'énoncé.

Si $r = \mathrm{rg}(f)$, on a $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. De plus, A est la matrice de l'application linéaire $\tilde{f} : G \to \mathrm{Im}(f)$ qui est une restriction de f. D'après le théorème du rang, comme G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$, $\tilde{f}$ est un isomorphisme donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

$\boxed{2.2}$ Commutant de f

$\boxed{2.2.1}$ Un calcul par blocs montre que $f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow (M_4A = M_7A = AM_7 = AM_8 = 0, M_1A = AM_9)$ avec les notations de l'énoncé. Comme A est inversible, ces conditions sont équivalentes à $M_4 = M_7 = M_8 = 0$ et $M_9 = A^{-1}M_1A$. Ainsi, $\boxed{f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow M_4 = M_7 = M_8 = 0 \text{ et } M_9 = A^{-1}M_1A.}$

$\boxed{2.2.2}$ Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M \in \mathcal{C}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & M_5 & M_6 \\ 0 & 0 & A^{-1}M_1A \end{pmatrix}$ (par blocs). Ainsi φ, dont la linéarité est claire, est un isomorphisme de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_s(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}(\mathrm{Mat}_B(f))$ si $s = \dim(F) = n - 2r$: la bijectivité vient de l'équivalence précédente. D'après le cours, on a la dimension $\dim\left(\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_s(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})\right) = r^2 + rs + r^2 + s^2 + sr = 2r^2 + 2r(n-2r) + (n-2r)^2$, donc $\dim(\mathcal{C}(\mathrm{Mat}_B(f))) = 2r^2 + n^2 - 2rn$. Avec ce qui a été admis dans l'énoncé, $\boxed{\dim(\mathcal{C}(f)) = (n-r)^2 + r^2.}$

PARTIE 3 : ENDOMORPHISMES TELS QUE $(u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\,\mathrm{id}_E)^2 = 0$

$\boxed{3.1}$ Cas diagonalisable

$\boxed{3.1.1}$ $(X-1)(X-2)^2$ annule u donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1, 2\}$ d'après le cours. Comme u est supposé diagonalisable, $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$ et si par exemple, on avait $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$, la matrice de u dans une base de vecteurs propres (qui existe car u est diagonalisable) serait I_n donc on aurait $u = \mathrm{id}_E$ (de même, on n'a pas $\mathrm{Sp}(u) = \{2\}$ car $u \neq 2\mathrm{id}_E$). Comme on a supposé que u n'était pas une homothétie, on ne peut qu'avoir $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{1, 2\}.}$

$\boxed{3.1.2}$ Si $E_1(u)$ et $E_2(u)$ sont stables par v, pour $x \in E_i(u)$ $(i \in \{1, 2\})$, on a $u(x) = ix$ donc $v \circ u(x) = iv(x)$ et $v(x) \in E_i(u)$ par stabilité donc $u \circ v(x) = iv(x)$ aussi. Les endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur $E_1(u)$ et $E_2(u)$, et comme $E = E_1(u) \oplus E_2(u)$, on a $u \circ v = v \circ u$. La réciproque est une propriété du cours car si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Par double implication, on a l'équivalence $\boxed{u \circ v = v \circ u \Longleftrightarrow E_1(u) \text{ et } E_2(u) \text{ sont stables par } v.}$

3.1.3 Avec la question précédente, si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = E_1(u) \oplus E_2(u)$, d'après le cours, $\boxed{u \circ v = v \circ u \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \text{ avec } V_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \text{ et } V_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R}).}$

3.1.4 L'ensemble des matrices de la forme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ est de dimension $n_1^2 + n_2^2$ (même justification qu'à la question **2.2.2**) donc $\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) = n_1^2 + n_2^2.}$

3.2 Cas non diagonalisable

3.2.1 Comme en **2.1.1**, on prouve que si $(u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\mathrm{id}_E)^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}(u - 2\mathrm{id}_E)^2 \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ (ou alors c'est du cours directement) et comme on a aussi $(u - 2\mathrm{id}_E)^2 \circ (u - \mathrm{id}_E) = 0$ (les polynômes en u commutent), on obtient $\boxed{\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \subset E_2 \text{ et } \mathrm{Im}[(u - 2\,\mathrm{id}_E)^2] \subset E_1.}$

3.2.2 Comme $x = (u - 2\mathrm{id}_E)^2(x) - (u - \mathrm{id}_E)((u - 3\mathrm{id}_E)(x))$ (facile), $E \subset \mathrm{Im}(u - 2\mathrm{id}_E)^2 + \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \subset E_1 + E_2$, on a donc $E = E_1 + E_2$. Reste à vérifier que la somme est directe. Si $x \in E_1 \cap E_2$, on a $u(x) = x$ donc $u^2(x) = x$ et $0 = (u - 2\mathrm{id}_E)^2(x) = u^2(x) - 4u(x) + 4x = x$ donc $x = 0$ et on a bien $\boxed{E = E_1 \oplus E_2.}$

3.2.3 Comme p, d et w sont des polynômes en u, si v commute avec u alors il commute avec d et w. Réciproquement, comme $u = w + d$, si v commute avec d et w, v commute aussi avec u.
Ainsi $\boxed{\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(d) \cap \mathcal{C}(w).}$

3.2.4 $p^2 = (u - 2\mathrm{id}_E)^4 = (u - 2\mathrm{id}_E)^2 \circ ((u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 3\mathrm{id}_E) + \mathrm{id}_E) = (u - \mathrm{id}_E)^2 = p$ en utilisant le polynôme annulateur $(X - 2)^2(X - 1)$ de u donné par l'énoncé. p est donc la projection sur $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = E_2$. Comme $p - \mathrm{id}_E = (u - 3\mathrm{id}_E) \circ (u - \mathrm{id}_E)$ et $u - 3\mathrm{id}_E$ est inversible (car 3 n'est pas valeur propre de u), on a $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E_1$. p est donc la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
On pouvait aussi vérifier que $E_1 \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ en vérifiant que si $u(x) = x$ alors $p(x) = x$ aussi et terminer avec un argument de dimension avec $\dim(E_1) = n - \dim(E_2) = n - \dim(\mathrm{Ker}(p))$. La matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc celle de d est $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 2I_{n_2} \end{pmatrix}.}$

3.2.5 $w = u - 2\mathrm{id}_E + (u^2 - 4u + 4\mathrm{id}_E) = (u - 2\mathrm{id}_E) \circ (u - \mathrm{id}_E)$ et $w^2 = (u - 2\mathrm{id}_E)^2 \circ (u - \mathrm{id}_E)^2$ par commutativité des polynômes en u donc $w^2 = 0$ car $(X - 2)^2(X - 1)$ est annulateur de u. De plus $w \neq 0$ car sinon, $(X - 1)(X - 2)$ serait un polynôme annulateur scindé à racines simples de u donc u serait diagonalisable d'après le cours. Ainsi, $\boxed{w = (u - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \mathrm{id}_E),\ w^2 = 0 \text{ et } w \neq 0.}$

3.2.6 On a $(u - 2\mathrm{id}_E)^2 \circ w = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(w) \subset E_2}$ et si $u(x) = x$ alors $w(x) = (u - 2\mathrm{id}_E)(0) = 0$ donc $\boxed{E_1 \subset \mathrm{Ker}(w).}$ Comme $E_1 \subset \mathrm{Ker}(w)$, la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$ est nulle et le premier bloc de la deuxième colonne est nul car $w(E_2) \subset \mathrm{Im}(w) \subset E_2$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \text{ avec } N \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R}).}$

$\boxed{\textbf{3.2.7}}$ Comme $w^2 = 0$, $N^2 = 0$. N est la matrice de l'endomorphisme $\tilde{w}$ induit par w sur E_2. Si $x \in E_2$, on a $u^2(x) - 4u(x) + 4x = 0$ donc $\tilde{w}(x) = u^2(x) - 3u(x) + 2x = u(x) - 2x$ et $\tilde{w}(x) = 0 \iff (u - 2\mathrm{id}_E)(x) = 0$ d'où $\mathrm{Ker}(\tilde{w}) = E_2 \cap \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E)$. $\boxed{\mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}(\tilde{w}) = n_2 - \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E))}$ (form. rang).

$\boxed{\textbf{3.2.8}}$ Comme on l'a vu dans **3.1** (d est diagonalisable), v commute avec $d \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$; une telle matrice commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \iff NV_2 = V_2N$. On a l'équivalence demandée avec **3.2.3**.

$\boxed{\textbf{3.2.9}}$ On peut utiliser la partie **2** pour N car $N^2 = 0$ et $N \neq 0$. En effet, si on avait $N = 0$, on aurait $u = d$ diagonalisable ce qui n'est pas ! D'après la partie **2**, si $r_2 = n_2 - \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E))$ le rang de N, le commutant de N est de dimension $r_2^2 + (n_2 - r_2)^2$ donc $\dim(\mathcal{C}(u)) = n_1^2 + r_2^2 + (n_2 - r_2)^2$ et $\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) = n_1^2 + (n_2 - \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E)))^2 + \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E))^2}$ car $\dim(\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})) = n_1^2$.

$\boxed{\textbf{3.3}}$ Si $\mathrm{Sp}(u) = \{2\}$ alors $u - \mathrm{id}_E$ est bijective donc $(u - 2\mathrm{id}_E)^2 = 0$. On a donc $u = 2\mathrm{id}_E + w$ avec w nilpotent d'indice 2 car on a forcément $w \neq 0$ car sinon on aurait $u = 2\mathrm{id}_E$ ce qui est exclu. Comme id_E commute avec tout endomorphisme, on en déduit $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(w)$. D'après la partie **2**, on a donc $\dim(\mathcal{C}(u)) = r^2 + (n - r)^2$ où $r = \mathrm{rg}(u - 2\mathrm{id}_E)$ puis $\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E))^2 + (n - \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E)))^2.}$