DEVOIR 11 : RÉDUCTION

PSI 1 2025-2026 **mardi 25 novembre 2025**

QCM

1 *Diagonalisabilité : on note* $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. *Est-il vrai ou faux que les matrices suivantes sont diagonalisables dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *?*

1.1 A_1

1.2 A_2

1.3 A_3

1.4 A_4

2 *Diagonalisabilité : soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 3 *et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *(DZ pour diagonalisable)*

2.1 χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X] \Longrightarrow u$ DZ

2.2 u DZ $\Longrightarrow \chi_u$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$

2.3 $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$

2.4 $\det(u) < 0 \Longrightarrow \exists \lambda < 0,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

3 *Diagonalisabilité : soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* u *un endomorphisme de* E *(DZ pour diagonalisable)*

3.1 u DZ $\Longleftrightarrow u^2$ DZ

3.2 $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u

3.3 Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$

3.4 Si $u \in GL(E),\ u$ DZ $\Longleftrightarrow u^{-1}$ DZ

4 *Sous-espaces stables : soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* F, G *deux sous-espaces de* E *stables par* u *tels que* $E = F \oplus G$

4.1 χ_{u_F} divise χ_u

4.2 $\chi_{u_F}\chi_{u_G} = \chi_u$

4.3 Si λ valeur propre de u_F, alors λ valeur propre de u

4.4 Si λ valeur propre de u, alors λ valeur propre de u_F

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner deux conditions nécessaires et suffisantes de la diagonalisabilité de u qui font intervenir un polynôme annulateur de u.

Preuve Soit E un espace de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par u, on note u_F l'endomorphisme induit par u dans F.

Montrer que si u est diagonalisable, alors u_F est aussi diagonalisable.

Exercice 1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation $M^T + M^2 = I_n$.

a. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow 1 \notin \mathrm{Sp}(M)$. Indication : calculer $\chi_M(1)$ en fonction de $\det(M)$.

b. Trouver un polynôme annulateur de degré 4 de M. Indication : calculer de 2 manières différentes $(M^T)^2$. En déduire que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour a tel que A n'est pas diagonalisable, trouver $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DEVOIR 11 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 11 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X		X	
2		X	X	X	
3				X	
4	X	X	X		

1.1 Faux : $\chi_{A_1} = (X-2)^2$ mais $X-2$ n'annule pas A_1 **1.2** Vrai : $\chi_{A_2} = (X-1)(X-2)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ **1.3** Faux : $\chi_{A_3} = X^2+2$ n'a aucune racine dans $\mathbb{R}$ **1.4** Vrai : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $A_4X = 10X$, comme $\mathrm{tr}(A_4) = 7$, l'autre valeur propre est -3 : A_4 est semblable à $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2.1 Faux : si u est nilpotent non nul, $\chi_u = X^3$ et u non DZ **2.2** Vrai : la matrice de u dans $\mathcal{B}$ quelconque est semblable à $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ donc $\chi_u = \chi_D = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ **2.3** Vrai : χ_u est un polynôme réel de degré 3 unitaire donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_u(x) = -\infty$ donc χ_u s'annule par le TVI **2.4** Vrai : s'il n'y a pas de valeur propre réelle négative, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on aurait $\det(u) = \det(A) = \prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)} \geqslant 0$ car il y aurait soit trois valeurs propres réelles positives, soit une valeur propre positive et deux valeurs propres complexes conjuguées et $z\bar{z} = |z|^2 > 0$.

3.1 et **3.2** Faux : si $u : (x,y) \mapsto (y,0)$, $u^2 = 0$, $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$ donc u^2 DZ alors que u non DZ et X n'annule pas u **3.3** Faux : $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$ n'est pas forcément inclus dans $\mathrm{Im}(u)$ **3.4** Vrai : une base $\mathcal{B}$ est de vecteurs propres pour u ssi elle l'est pour u^{-1}.

4.1 Vrai : cours **4.2** Vrai : dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ adaptée, on a $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(u_G)$ et on se sert de $\chi_u = \chi_M = \det(XI_n - M)$ et des déterminants par blocs **4.3** Vrai : si $x \in F$ et $x \neq 0_E$ tel que $u_F(x) = \lambda x$ alors $u(x) = \lambda x$ donc λ est aussi valeur propre de u **4.4** Faux : si $u(x,y,z) = (y,x,0)$ alors 0 est valeur propre de u mais ne l'est pas de u_F si $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a les deux équivalences :

$$\big(u \text{ diagonalisable}\big) \iff \big(\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0 \text{ et } P \text{ scindé à racines simples (dans } \mathbb{K})\big).$$
$$\big(u \text{ diagonalisable}\big) \iff \Big(P = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda) \text{ vérifie } P(u) = 0\Big).$$

Preuve On sait que u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples puisque u est diagonalisable. Or tout polynôme annulateur de u l'est aussi de u_F. En effet, si $P(u) = 0$, alors pour tout vecteur $x \in F$, si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a $P(u_F)(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k u_F^k(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = P(u)(x) = 0_E$. Ainsi, u_F est aussi diagonalisable.

Exercice 1 **a.** $\det(M)^2 = \det(M^2) = \det(I_n - M^T) = \det(I_n - M) = \chi_M(1)$ donc $\det(M) \neq 0 \iff \chi_M(1) \neq 0$.

b. $I_n - 2M^2 + M^4 = (I_n - M^2)^2 = (M^T)^2 = (M^2)^T = (I_n - M^T)^T = I_n - M$ donc $P = X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de M. Or $P = X(X-1)(X^2+X-1)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ car le discriminant de X^2+X-1 est égal à $5 > 0$ donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Comme A est triangulaire supérieure, $\chi_A = X(X-1)(X-a)$.

- Si $a \notin \{0,1\}$, χ_A étant scindé à racines simples et annulateur de A par Cayley-Hamilton : A est DZ.
- Si $a = 0$, $\chi_A = X^2(X-1)$ et $\dim(E_0(A)) = 2 = 3 - \mathrm{rg}(A)$ car A est clairement de rang 1. Comme les ordres de multiplicité algébrique et géométrique de 0 et de 1 sont égaux : A est diagonalisable.
- Si $a = 1$, $\chi_A = X(X-1)^2$ et $\dim(E_1(A)) = 1 = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3)$ car $A - I_3$ est de rang 2. Les ordres de multiplicité algébrique et géométrique de 1 ne coïncident pas : A n'est pas diagonalisable. On a $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,-1,0)$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1,0,0)$ et l'équation $Av_3 - v_3 = v_2$ a pour solution, par exemple, $v_3 = (0,1,1)$. Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, P est inversible car $\det(P) = 1 \neq 0$ et $A = PTP^{-1}$.