Correction du DS3

Problème : Partie I

1. arctan est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\arctan(0)=0$ donc $\arctan\in E_0$ puis $\arctan'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{1}{(1+t^2)^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^4}$ donc $t\mapsto\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{\arctan\in E_2}$

On pose $t=\tan\theta$: tan est $\mathcal{C}^1$ bijective strictement croissante de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}^+$, $\mathrm{d}t=(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$, donc $N_2(f)^2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\times(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(1+\cos2\theta\big)\,\mathrm{d}\theta$ donc $\boxed{N_2(f)=\dfrac12\sqrt{\pi}}$

2. On a déjà vu que $\arctan\in E_0$; $t\mapsto\left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, puis $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2=1$ donc la fonction $t\mapsto\left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car arctan est bornée donc $t\mapsto\left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\boxed{\arctan\in E_1}$

3. a) Si $x\in\mathbb{R}^+$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$ puis $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}=x$ car $\arctan u\underset{0}{\sim}u$ et $t\mapsto\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0,1]$; enfin, $\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t\mapsto\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\boxed{\theta \text{ est définie sur } \mathbb{R}^+}$

b) Pour $x\neq1$, $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}=\dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{x^2}{1+(xt)^2}\right)$ donc $\theta'(x)=\left[\dfrac{\arctan t-x\arctan(xt)}{1-x^2}\right]_{t=0}^{t=+\infty}$.
Pour $x>0$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\arctan(xt)=\frac{\pi}{2}$, donc $\theta'(x)=\dfrac{\pi}{2(1-x^2)}(1-x)$. Comme θ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, θ' est continue en 1 et $\theta'(1)=\displaystyle\lim_{x\to1}\theta'(x)=\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\boxed{\forall x\geqslant0,\theta'(x)=\dfrac{\pi}{2(1+x)}}$ car $\theta'(0)=\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}$.

c) Pour $x\geqslant0$, $\theta(x)=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)+C$, car $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, puis, comme $\theta(0)=0$, $\boxed{\theta(x)=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)}$

4. $t\mapsto(\arctan t)^2$ et $t\mapsto-\dfrac{1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{(\arctan t)^2}{t}=0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{(\arctan t)^2}{t}=0$ donc, par IPP, on trouve $N_1(f)^2=\left[-\dfrac{(\arctan t)^2}{t}\right]_0^{+\infty}+\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\arctan t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ donc $N_1(f)^2=2\theta(1)$. Comme $N_1(f)\geqslant0$, $\boxed{N_1(f)=\sqrt{\pi\ln(2)}}$

Partie II

1. $t+\sqrt{t^2+1}\geqslant1$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(t)=\dfrac{1+\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$ donc $\boxed{f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}}$ Comme $f(0)=0$, $f\in E_0$, $t\mapsto f'(t)^2=\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $f\in E_2$ et $N_2(f)^2=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{N_2(f)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}$

2. $f(t)=\ln\left[t\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)\right]\underset{+\infty}{=}\ln(t)+O(1)$ donc $\boxed{f(t)\underset{+\infty}{\sim}\ln(t)}$. $f(t)\underset{0}{=}\ln(t+1+o(t))\underset{0}{=}t+o(t)$ donc $\boxed{f(t)\underset{0}{\sim}t}$

3. On a déjà vu que $f\in E_0$, $t\mapsto\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ est bien $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, $\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{(\ln t)^2}{t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2=1$ donc $t\mapsto\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{f\in E_1}$

4. a) $t\mapsto\dfrac{t}{\mathrm{sh}(t)}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{t}{\mathrm{sh}(t)}=1$ et $\dfrac{t}{\mathrm{sh}(t)}\underset{+\infty}{\sim}2te^{-t}\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t\mapsto\dfrac{t}{\mathrm{sh}(t)} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) Pour $k\geqslant0$, on a $2k+1>0$ donc $t\mapsto te^{-(2k+1)t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,+\infty[$ et $te^{-(2k+1)t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t\mapsto te^{-(2k+1)t} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$ On effectue une IPP : les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto\dfrac{e^{-(2k+1)t}}{2k+1}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{te^{-(2k+1)t}}{2k+1}=0$ donc $J_k=\left[\dfrac{-te^{-(2k+1)t}}{2k+1}\right]_0^{+\infty}+\dfrac{1}{2k+1}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{J_k=\dfrac{1}{(2k+1)^2}}$

c) Pour $t>0$, on a $e^{-2t}\neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} te^{-(2k+1)t} = te^{-t}\frac{1-e^{-(2n+2)t}}{1-e^{-2t}} = \frac{t}{2\operatorname{sh}(t)}\left(1-e^{-(2n+2)t}\right)$. Les fonctions $t\mapsto te^{-(2k+1)t}$ et $t\mapsto \dfrac{t}{\operatorname{sh}(t)}$ étant intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$, il en de même, par linéarité, de $t\mapsto \dfrac{te^{-(2n+2)t}}{\operatorname{sh}(t)}$ et en intégrant cette égalité, on obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} J_k = \int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh}(t)}\left(1-e^{-(2n+2)t}\right)\mathrm{d}t}$

d) $t\mapsto \operatorname{sh}(t)-t$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et nulle en 0 donc, pour $t>0$, on a $0<t\leqslant \operatorname{sh}(t)$ ce qui donne $\boxed{0\leqslant \dfrac{t}{\operatorname{sh}(t)}\leqslant 1}$

e) On en déduit $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh}(t)}e^{-(2n+2)t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2n+2)t}\,\mathrm{d}t$ (qui existe car $2n+2>0$) donc, en calculant l'intégrale de droite, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh}(t)}e^{-(2n+2)t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \dfrac{1}{2n+2}$ et, par encadrement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh}(t)}e^{-(2n+2)t}\,\mathrm{d}t = 0}$

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} J_k = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$ ce qui signifie bien que $\boxed{\displaystyle J = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}}$ par définition de la somme d'une série.

f) On passe par les sommes partielles : en séparant les termes pairs et impairs $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$ donc $\boxed{J=\dfrac{\pi^2}{4}}$

5. a) On effectue une IPP : les fonctions $t\mapsto f(t)^2$ et $t\mapsto \dfrac{-1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\dfrac{f(t)^2}{t}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{(\ln t)^2}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)^2}{t} = 0$ donc $I = \left[\dfrac{-f(t)^2}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ puis $\boxed{\displaystyle I = 2\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t}$

b) La fonction sh est $\mathcal{C}^1$ bijective strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(\operatorname{sh} u)}{\operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(u)}\operatorname{ch}(u)\,\mathrm{d}u$ et on vérifie que $f(\operatorname{sh} u) = u$ donc $\boxed{\displaystyle I = 2\int_0^{+\infty}\frac{u}{\operatorname{sh}(u)}\,\mathrm{d}u}$

c) Avec la valeur de J trouvée précédemment, on a $\boxed{N_1(f) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}}$

Partie III

1. a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ (d'après la formule de Taylor-Young) : $f(x) \underset{0}{=} f(0)+\alpha x + o(x)$. On en déduit $\boxed{\lim_0 g = 0 \text{ et } \lim_0 h = \alpha}$

b) Par quotient, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; pour $t>0$, $f(t) = \sqrt{t}g(t)$ donc $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \dfrac{g(t)}{2\sqrt{t}}$ donc

$\boxed{f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = \frac{1}{2}h(t) \text{ pour } t>0}$

c) $\lim_0 h = \alpha$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0}\sqrt{t}g'(t) = \lim_0\left(f' - \frac{1}{2}h\right)$ et $g'(t)g(t) = \sqrt{t}g'(t)\times h(t)$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{t\to 0}\sqrt{t}g'(t) = \frac{\alpha}{2} \text{ et } \lim_0 gg' = \frac{\alpha^2}{2}}$

d) Les fonctions f', $t\mapsto\sqrt{t}g'(t)$ et h sont continues sur $]0,x]$ et prolongeables par continuité en 0 donc sont toutes de carré intégrable sur $]0,x]$.
Si $t>0$, on a $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \dfrac{1}{2}h(t)$ donc $f'(t)^2 = \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 + \sqrt{t}g'(t)h(t) + \dfrac{1}{4}h(t)^2$ et on vérifie l'égalité $\sqrt{t}g'(t)h(t) = g'(t)g(t) = \dfrac{1}{2}\left(g^2\right)'(t)$ donc en intégrant entre 0 et x, comme $\lim_0 g = 0$, on obtient la relation (R) :
$\boxed{\displaystyle\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}g(x)^2 + \int_0^x\left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^x h(t)^2\,\mathrm{d}t}$

2. a) Soit $f\in E_2$, on déduit de (R), $\displaystyle\int_0^x (h(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty}(f'(t))^2\,\mathrm{d}t$ car $(f')^2\geqslant 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x (h(t))^2\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $h^2\geqslant 0$, on en déduit que h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $f \in E_1$, ce qui prouve $\boxed{E_2 \subset E_1}$

b) Si $f = \sin$ ($\in E_0$), on a $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ qui est continue sur $]0, +\infty[$; de plus $\lim\limits_{0}(h^2) = 1$ donc h^2 est intégrable sur $]0, 1]$ et $h(t)^2 \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc h^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui donne $\sin \in E_1$.

Par contre $f' = \cos$, donc on vérifie que $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$: $f'(t)^2 = \cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ donc $\displaystyle\int_{\pi}^{x} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\pi}^{x} = \frac{x - \pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$ n'a pas de limite finie en $+\infty$ donc $\sin \notin E_1$ ce qui confirme bien que $\boxed{E_1 \not\subset E_2}$

3. a) On a $E_2 \subset E_0$ par définition de E_2, $0 \in E_2$ et si $(f, g) \in E_2^2$, on a $|f'g'| \leqslant \dfrac{1}{2}\left((f')^2 + (g')^2\right)$ donc $f'g'$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $(\alpha f' + \beta g')^2 = \alpha^2 (f')^2 + 2\alpha\beta f'g' + \beta^2 (g')^2$ donc $(\alpha f' + \beta g')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E_0}$

b) On a, d'après (R), $\displaystyle\int_0^x h(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^x f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$ donc en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\boxed{N_1(f) \leqslant 2N_2(f)}$

c) f_n est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $f_n(0) = 0$ donc $f_n \in E_0$. De plus $f_n'(t) = -e^{-t}\sin(nt) + ne^{-t}\cos(nt)$ donc $(f_n')^2$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f_n'(t)^2 \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $(f_n')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\boxed{f_n \in E_2}$

$f_n'(t)^2 = e^{-2t}\left(\sin^2(nt) - 2n\sin(nt)\cos(nt) + n^2\cos^2(nt)\right) = e^{-2t}\left(\dfrac{1 + n^2}{2} - n\sin(2nt) + \dfrac{(n^2 - 1)\cos(2nt)}{2}\right)$

donc $f_n'(t)^2 = \dfrac{1 + n^2}{2}e^{-2t} - n\,\mathrm{Im}\left(e^{-2(1-in)t}\right) + \dfrac{n^2 - 1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{-2(1-in)t}\right)$. Comme $\left|e^{-2(1-in)t}\right| = e^{-2t}$, la fonction $t \mapsto e^{-2(1-in)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient $N_2(f_n)^2 = \dfrac{1 + n^2}{4} - n\,\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{2(1 - in)}\right) + \dfrac{n^2 - 1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2(1 - in)}\right)$

donc $N_2(f_n)^2 = \dfrac{1 + n^2}{4} - \dfrac{n^2}{2(1 + n^2)} + \dfrac{n^2 - 1}{2} \times \dfrac{1}{2(1 + n^2)}$ puis $\boxed{N_2(f_n) = \dfrac{n}{2}}$

d) On a $N_1(f_n)^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(nt)}{t}\right)^2 e^{-2t}\,\mathrm{d}t$; on pose $t = \dfrac{u}{n}$, $u \mapsto \dfrac{u}{n}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, et on obtient $N_1(f_n)^2 = n\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 e^{-u/n}\,\mathrm{d}u \leqslant n\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \mathrm{d}u$ (intégrabilité déjà prouvée) donc $N_1(f_n) \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\sqrt{n}\right)$

S'il existait une constante $C > 0$ telle que $N_2 \leqslant CN_1$, on aurait $N_2(f_n) \leqslant CN_1(f_n)$, ie $\dfrac{n}{2} \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\sqrt{n}\right)$, ce qui est faux.

4. $t \mapsto \sqrt{t}g'(t)$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^+$, et d'après (R), $\displaystyle\int_0^x \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t \leqslant N_2(f)^2$.

Comme $t \mapsto (\sqrt{t}g'(t))^2 \geqslant 0$, cette majoration prouve que $t \mapsto \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Les trois fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x h(t)^2 \,\mathrm{d}t$ admettent une limite finie en $+\infty$ donc g^2 admet une limite ℓ en $+\infty$. Comme $f \in E_2 \subset E_1$, $t \mapsto \dfrac{g^2(t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui impose, d'après Riemann $\ell = 0$ (car sinon $\dfrac{g^2(t)}{t} \sim \dfrac{\ell}{t}$) donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = 0}$

Exercice :

1. a) On a $X_0 = P_1 \cap P_2 \in \mathcal{A}$ et par indépendance de P_1 et P_2, $P(X_0) = P(P_1)P(P_2)$ donc $\boxed{P(X_0) = \dfrac{4}{9}}$

Puis $X_1 = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \in \mathcal{A}$ puis par incompatibilité de $F_1 \cap P_2 \cap P_3$ et $P_1 \cap F_2 \cap P_3$, on a $P(X_1) = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) = P(F_1)P(P_2)P(P_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)$ par indépendances ; on en déduit $\boxed{P(X_1) = \dfrac{8}{27}}$

De même, on a $X_2 = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \in \mathcal{A}$ et, à nouveau par incompatibilité deux à deux, puis indépendance, $\boxed{P(X_2) = \dfrac{4}{27}}$

b) E_n est le temps d'attente du premier succès dans la répétition indépendante d'épreuve de Bernoulli (« obtenir Pile ») de paramètre $\dfrac{2}{3}$ donc $P(E_n) = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ puis $\boxed{P(E_n) = \dfrac{2}{3^n}}$ Les $(E_n)_{n \geqslant 1}$ constituent un système

quasi-complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(X_n)=\sum_{k=1}^{+\infty}P_{E_k}(X_n)P(E_k)$.
Pour $k\geqslant n+2$, on a $P_{E_k}(X_n)=0$ car si le premier Pile intervient au k-ième lancer avec $k\geqslant n+2$, on ne pourra pas avoir un deuxième Pile au $(n+2)$-ième lancer. On a donc $P(X_n)=\sum_{k=1}^{n+1}P_{E_k}(X_n)P(E_k)$. Enfin , si on suppose E_k réalisé (donc le premier Pile au k-ième lancer), la probabilité que le deuxième Pile apparaisse au $(n+2)$-ième lancer est la même que le premier Pile apparaisse au $(n+2-k)$-ième lancer (une fois le premier Pile obtenu, on peut considérer que l'expérience reprend au début et que l'on attend à nouveau le premier Pile).

On en déduit donc $\boxed{P(X_n)=\sum_{k=1}^{n+1}P(E_{n+2-k})P(E_k)}$

c) On en déduit $P(X_n)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2}{3^k}\times\frac{2}{3^{n+2-k}}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{4}{3^{n+2}}$ donc $\boxed{P(X_n)=(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}}$

2. a) Si X_n est réalisé, on peut tirer une boule dont le numéro sera dans $[\![0,n]\!]$ mais comme l'entier n pour lequel X_n est réalisé est quelconque, le numéro de la boule tirée peut être n'importe quel entier de $\mathbb{N}$.

b) Si X_n est réalisé, on ne peut pas tirer une boule dont le numéro k est $>n$. Par contre, si $k\leqslant n$ la probabilité de tirer une boule donnée étant uniforme, on a $\boxed{P_{X_n}(U_k)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

c) On commence par vérifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet : les X_n sont deux à deux incompatibles et $\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_n)=\frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{4}{9}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=1$. Par la formule des probabilités totales, on a $P(U_k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P_{X_n}(U_k)P(X_n)=\sum_{n=k}^{+\infty}P_{X_n}(U_k)P(X_n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}P(X_n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{4}{3^{n+2}}\overset{h=n-k}{=}\frac{4}{3^{k+2}}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{3^h}$ donc $\boxed{P(U_k)=\frac{2}{3^{k+1}}}$

d) Si X_n est réalisé, l'événement V_k sera lui aussi réalisé si le numéro de la boule tirée est $n-k$ (ce qui impose donc $n-k\geqslant 0$) donc $P_{X_n}(V_k)=P_{X_n}(U_{n-k})$ donc $\boxed{P_{X_n}(V_k)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$ On en déduit donc par le même calcul que $\boxed{P(V_k)=\frac{2}{3^{k+1}}\text{ pour tout } k\in\mathbb{N}}$ Là encore toutes les valeurs entières sont possibles puisque n est un entier quelconque et le numéro de la boule tirée peut toujours être 0 donc k est un entier de $\mathbb{N}$.

e) L'événement $U_k\cap V_h$ correspond au cas où la boule tirée porte le numéro h et où on a obtenu $k+h$ Face donc on a $U_k\cap V_h=X_{k+h}\cap U_k$. Ainsi, $P(U_k\cap V_h)=P(U_k\cap X_{k+h})=P_{X_{k+h}}(U_k)P(X_{k+h})=\frac{1}{k+h+1}\times(k+h+1)\frac{4}{3^{k+h+2}}$ et comme $P(U_k)P(V_k)=\frac{2}{3^{k+1}}\times\frac{2}{3^{h+1}}$, on a $P(U_k\cap V_h)=P(U_k)P(V_h)$ donc $\boxed{U_k \text{ et } V_h \text{ sont indépendants}}$

3. a) La probabilité que le joueur B obtienne Face pour la première fois au n-ième tirage est $p(1-p)^{n-1}$ (temps d'attente du premier succès) donc $P(B_n)=p(1-p)^n$ car le joueur B aura n Face (exactement) si le premier Pile apparaît au tirage $n+1$. On a $Y_n=\bigcup_{k\geqslant n}B_k$, les événements de cette réunion étant deux à deux incompatibles, on a $P(Y_n)=\sum_{k=n}^{+\infty}p(1-p)^k\overset{h=n-k}{=}\sum_{h=0}^{+\infty}p(1-p)^{n+h}=p(1-p)^n\times\frac{1}{1-(1-p)}$ donc $\boxed{P(Y_n)=(1-p)^n}$

b) Les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituent un système quasi-complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(G_A)=\sum_{n=0}^{+\infty}P_{X_n}(G_A)P(X_n)$. Si X_n est réalisé, le joueur A a obtenu n Face donc il gagne si B obtient au moins n Face ; on en déduit $P_{X_n}(G_A)=P(Y_n)$ et $\boxed{P(G_A)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_n)P(Y_n)}$

c) On a $P(G_A)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}(1-p)^n=\frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{1-p}{3}\right)^n=\frac{4}{9}\times\frac{1}{\left[1-\left(\frac{1-p}{3}\right)\right]^2}$ donc $\boxed{P(G_A)=\left(\frac{2}{2+p}\right)^2}$

d) Le jeu est équitable si et seulement si $P(G_A)=P(G_B)=\frac{1}{2}$ (car B gagne si A ne gagne pas d'après le texte) donc si et seulement si $\frac{2}{2+p}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc si et seulement si $\boxed{p=2(\sqrt{2}-1)}$