

**L'usage des calculatrices est interdit**

Le sujet se compose d'un problème d'analyse et d'un exercice de probabilités indépendants. Veuillez changer de page entre les deux (inutile de faire deux copies séparées).

**PROBLEME**

(Inspiré de CCP PSI 2004 maths 1)

**Notations et but du problème**

$E_0$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs réelles, de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifiant  $f(0) = 0$ .

$E_1$  est l'ensemble des fonctions  $f$  appartenant à  $E_0$  et telles que la fonction  $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

$E_2$  est l'ensemble des fonctions  $f$  appartenant à  $E_0$  et telles que la fonction  $t \mapsto (f'(t))^2$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

On note

$$N_1(f) = \left[ \int_0^{+\infty} \left( \frac{f(t)}{t} \right)^2 dt \right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_1 \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left[ \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt \right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_2.$$

Le but du problème est de comparer les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  d'une part, les fonctions  $N_1$  et  $N_2$  d'autre part.

Les parties I et II sont consacrées à deux exemples, la partie III aborde le problème de comparaison de façon plus générale.

**Partie I - Exemple I**

Dans cette partie, on suppose que  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(t) = \arctan t$ .

1. Montrer que  $f$  appartient à  $E_2$  puis calculer la valeur de  $N_2(f)$ ; on pourra utiliser le changement de variable  $t = \tan \theta$ .
2. Montrer que  $f$  appartient à  $E_1$ .

**3. Étude d'une fonction auxiliaire**

Pour  $x \in \mathbb{R}^+$  on pose  $\theta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$ .

- a) Justifier que  $\theta$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

On admet que la fonction  $\theta$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et que, pour tout  $x \geq 0$ , on a

$$\theta'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$$

- b) Déterminer la valeur de  $\theta'(x)$  pour  $x \geq 0$ ,  $x \neq 1$  (sans symbole intégral). On pourra chercher deux réels  $a$  et  $b$ , dépendants de  $x \neq 1$ , tel que  $\frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+(xt)^2}$ . Que vaut  $\theta'(1)$ ?
  - c) Déterminer la valeur de  $\theta(x)$ , pour  $x \geq 0$  (sans symbole intégral à nouveau).
4. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre  $(N_1(f))^2$  et  $\theta(1)$  puis en déduire la valeur de  $N_1(f)$ .

**Partie II - Exemple II**

Dans cette partie, on suppose que  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(t) = \ln \left( t + \sqrt{t^2 + 1} \right).$$

On rappelle que  $\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$  pour  $u \in \mathbb{R}$ , et la relation  $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ .

1. Calculer  $f'(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}^+$ .

En déduire que  $f$  est élément de  $E_2$ . Quelle est la valeur de  $N_2(f)$  ?

2. Déterminer un équivalent (simple!) de  $f(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$  (respectivement lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ).

3. Montrer que  $f$  appartient à  $E_1$ .

**4. Calcul d'une intégrale.**

- a) Montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{t}{\operatorname{sh}(t)}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

On note désormais  $J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} dt$ .

- b) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto te^{-(2k+1)t}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Expliciter la valeur de  $J_k = \int_0^{+\infty} te^{-(2k+1)t} dt$ .

- c) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'égalité  $\sum_{k=0}^n J_k = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} (1 - e^{-(2n+2)t}) dt$

- d) Montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{t}{\operatorname{sh}(t)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ; on pourra étudier la fonction  $t \mapsto \operatorname{sh}(t) - t$ .

- e) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} e^{-(2n+2)t} dt = 0$  puis que

$$J = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

- f) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale  $J$ , sachant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**5. Calcul de  $N_1(f)$ .**

Pour simplifier on note  $I = [N_1(f)]^2 = \int_0^{+\infty} \left( \frac{f(t)}{t} \right)^2 dt$ .

- a) Montrer que  $I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t \sqrt{t^2 + 1}} dt$ .

- b) Justifier le changement de variable  $t = \operatorname{sh}(u)$  dans l'intégrale obtenue dans la question précédente. Que devient  $I$  quand on effectue ce changement ?

- c) En déduire la valeur de  $N_1(f)$ .

### Partie III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part les ensembles  $E_1$  et  $E_2$ , d'autre part les fonctions  $N_1$  et  $N_2$ .

1. Soit  $f$  une fonction quelconque appartenant à  $E_0$  (donc de classe  $C^1$  et telle que  $f(0) = 0$ ). On associe à  $f$  deux fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$  et  $h(t) = \frac{f(t)}{t}$  pour tout  $t > 0$ . On pose  $\alpha = f'(0)$ .

- a) Quelle est la limite de  $h(t)$  (respectivement de  $g(t)$ ) quand  $t \rightarrow 0^+$  ?

- b) Exprimer  $f'(t) - g'(t)\sqrt{t}$  en fonction de  $h(t)$  lorsque  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .

- c) Quelle est la limite de  $g'(t)\sqrt{t}$  (respectivement de  $g(t) \times g'(t)$ ) lorsque  $t \rightarrow 0^+$ ? (on exprimera les résultats en fonction de  $\alpha = f'(0)$ ).

- d) Établir, pour  $x > 0$ , la relation :

$$(R) \quad : \quad \int_0^x (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2} (g(x))^2 + \int_0^x (g'(t)\sqrt{t})^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^x (h(t))^2 dt$$

(après avoir justifié l'intégrabilité sur  $]0, x]$  de chacune des fonctions qui interviennent).

**2. Comparaison de  $E_1$  et  $E_2$ .**

- a) Déduire de la relation  $(R)$  l'inclusion  $E_2 \subset E_1$ .

- b) Les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction  $t \mapsto \sin t$ )

**3. Comparaison de  $N_1$  et  $N_2$ .**

- a) Montrer que  $E_2$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E_0$ . On pourra utiliser l'inégalité, valable pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
- b) Justifier l'inégalité  $N_1(f) \leq 2N_2(f)$ , pour  $f \in E_2$ .
- c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $f_n$  par  $f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$ . Vérifier que  $f_n \in E_2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et calculer  $N_2(f_n)$ .
- d) Existe-t-il une constante  $C > 0$  telle que  $\forall f \in E_2, N_2(f) \leq CN_1(f)$  ?
4. Soit  $f$  appartenant à  $E_2$ ; en utilisant la relation (R) montrer que  $g(t)$  admet une limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Quelle est cette limite?

————— Fin du problème —————

## EXERCICE

(d'après EM Lyon ECE 2018)

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et Face avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

On effectue une succession de lancers avec cette pièce. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  de sorte que, si pour  $k \geq 1$ , on définit les événements  $P_k$  (respectivement  $F_k$ ) par « Pile au  $k$ -ième lancer » (respectivement « Face au  $k$ -ième lancer ») alors la famille  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est supposée indépendante.

On admettra que, si  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

### 1. Première expérience

On note  $X_n$  l'événement « on obtient  $n$  fois Face avant l'obtention du deuxième Pile ».

- a) Décrire  $X_0$ ,  $X_1$  et  $X_2$  en fonction des événements  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ . En déduire que  $X_0$ ,  $X_1$  et  $X_2$  sont bien des événements et déterminer leurs probabilités.
- b) On introduit les événements  $E_n$  « on obtient Pile pour la première fois au  $n$ -ième lancer ». Déterminer  $P(E_n)$  puis justifier que

$$P(X_n) = \sum_{j=1}^{n+1} P(E_j)P(E_{n+2-j})$$

- c) En déduire que  $P(X_n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2. Une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; puis en fonction du nombre  $n$  de Face obtenus, on place  $n+1$  boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à  $n$  et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note  $U_n$  l'événement « la boule tirée porte le numéro  $n$  ».

- a) Quels peuvent être les numéros des boules tirées ?
- b) Pour  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ , déterminer la probabilité de  $U_k$  sachant  $X_n$ .
- c) En déduire, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ :

$$P(U_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X_n) \quad \text{puis} \quad P(U_k) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

On note  $V_k$  l'événement « on a obtenu  $k$  Face de plus que le numéro de la boule tirée ». L'événement  $V_1$  est par exemple réalisé si on a obtenu 4 Face et tiré la boule numéro 3 (mais ce n'est pas la seule possibilité!).

- d) Déterminer la probabilité de  $V_k$  sachant  $X_n$  et en déduire  $P(V_k)$ , en précisant les valeurs possibles pour  $k$ .
- e) Montrer que les événements  $U_k$  et  $V_h$  sont indépendants, pour tout  $(h, k) \in \mathbb{N}^2$ .

### 3. Un jeu à deux joueurs

Dans cette question,  $p$  désigne un réel de  $]0, 1[$ .

Deux joueurs  $A$  et  $B$  s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- Le joueur  $A$  dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile. On note  $A_n$  l'événement « le joueur  $A$  a obtenu  $n$  Face ».
- le joueur  $B$  dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité  $p$  (et Face avec la probabilité  $1 - p$ ) et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile. On note  $B_n$  l'événement « le joueur  $B$  a obtenu  $n$  Faces ».
- le joueur  $A$  gagne si le nombre de Face qu'il obtient est inférieur ou égal au nombre de Face obtenus par  $B$  ; sinon c'est le joueur  $B$  qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré si les deux joueurs  $A$  et  $B$  ont la même probabilité de gagner.

- a) On note  $Y_n$  l'événement « le joueur  $B$  obtient au moins  $n$  Face (ie  $n$  Face ou plus) ».

Montrer que  $P(Y_n) = (1 - p)^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- b) On note  $G_A$  l'événement « le joueur  $A$  gagne ».

$$\text{Montrer que } P(G_A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n)P(Y_n)$$

- c) En déduire la valeur de  $P(G_A)$ .

- d) Pour quelle(s) valeur(s) de  $p$  le jeu est-il équitable ?

\_\_\_\_\_ Fin de l'exercice \_\_\_\_\_