# TD 11 : SÉRIES DE FONCTIONS

**PSI 1 2025-2026** **vendredi 28 novembre 2025**

**11.1** • Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in ]0;1]$ et $\exists m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{x} = m\pi + \dfrac{\pi}{2}$, alors $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = 1$ donc $f_n(x) = x$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$.

• Si $x \in ]0;1]$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{x} \neq m\pi + \dfrac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 < 1$ et la suite géométrique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 \in [0;1[$ tend donc vers $0$ ce qui justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall m \in \mathbb{N}$, $f\Big(\dfrac{2}{(2m+1)\pi}\Big) = \dfrac{2}{(2m+1)\pi}$ et $f(x) = 0$ sinon. Comme les $f_n$ sont continues sur $[0;1]$ (par opérations sur $]0;1]$ et car $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$) et que $f$ ne l'est pas, on n'a pas convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers $f$ sur $[0;1]$ par contraposée d'un théorème du cours.

**11.2** • Soit $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) < 1$ donc, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ est dérivable par opérations et $f_n'(x) = n\big(-n\sin^2 x + \cos^2 x\big)\cos^{n-1} x$ donc la fonction $f_n$ est croissante sur $\left[0;\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = x_n\right]$ et décroissante sur $\left[x_n;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $||f_n||_\infty = f_n\big(x_n\big)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$, $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\sin(\theta) \underset{0}{\sim} \theta$, on a l'équivalent $\sin(x_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. De plus, pour $\theta \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ donc $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}}$ car $\cos$ est positive sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, on obtient $\cos(x_n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1/2}$. Classiquement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(x_n) = e^{-1/2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Par conséquent, $||f_n||_\infty = f_n\big(x_n\big) \underset{+\infty}{=} \sqrt{\dfrac{n}{e}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Par contre, si $a \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, si $n$ est assez grand, on a $x_n < a$ donc $f_n$ est positive et décroissante sur $\left[a;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $||f_n||_{\infty,[a;\pi/2]} = f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\left[a;\dfrac{\pi}{2}\right]$ pour tout $a \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**11.3** **a.** • Si $x = 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in ]0;1]$, par croissances comparées, on a $(1-x)^n \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$ car $|1-x| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction nulle.

Puisque $f_n$ est dérivable sur $[0;1]$ par opérations, $\forall x \in [0;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$ par calcul. Ainsi, $f_n$ est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{n+1};1\right]$ et, comme $f_n$ est positive sur $[0;1]$, $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(\dfrac{1}{n+1}\Big) = \dfrac{n^\alpha}{n+1}\Big(1-\dfrac{1}{n+1}\Big)^n$. Comme $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$ et que l'on a $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$, on en déduit la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = -1$ donc, par continuité de la fonction $\exp$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Par conséquent, $||f_n||_{\infty,[0;1]} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$.

Il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers $f=0$ sur $[0;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n-0||_{\infty,[0;1]}=0$, donc il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction nulle sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha<1$.

Pour aller plus loin, comme le "problème" est au voisinage de $0$, si $a\in]0;1[$ et dès que $n$ est assez grand (en fait dès que $n+1\geqslant \dfrac{1}{a}$ d'après l'étude précédente), on a $||f_n||_{\infty,[a;1]}=f_n(a)$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a)=0$ donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a;1]$ indépendamment de la valeur de $\alpha$.

**b.** • Si $x=0$, comme $f_n(0)=0$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge.

• Si $x\in]0;1]$, on a $f_n(x)\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ à nouveau par croissances comparées. Ainsi, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc elle converge.

Ainsi, il y a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0;1]$ pour tout réel $\alpha$.

Posons $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ pour $x\in[0;1]$ et $n\in\mathbb{N}$.

• Comme $||f_n||_{\infty,[0;1]}=f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{n^{\alpha-1}}{e}=\dfrac{1}{en^{1-\alpha}}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha<0$ par comparaison aux séries de RIEMANN. Dans ce cas, comme convergence normale implique convergence uniforme, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

• Pour $\alpha<0$, si on ne s'intéresse qu'à la convergence uniforme, on pouvait aussi majorer $R_n$ sur $[0;1]$ car $0\leqslant R_n(x)\leqslant (n+1)^\alpha\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car puisque $\alpha<0$, on a $\forall k\geqslant n+1,\ k^\alpha\leqslant (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x\in]0;1]$, $0\leqslant R_n(x)\leqslant (n+1)^\alpha\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k=(n+1)^\alpha x\dfrac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)}=(n+1)^\alpha(1-x)^{n+1}\leqslant(n+1)^\alpha$. On a aussi $R_n(0)=0$. Ainsi $||R_n||_{\infty,[0;1]}\leqslant (n+1)^\alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^\alpha=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

• Si $\alpha\geqslant 0$, alors $R_n(x)\geqslant (n+1)^\alpha\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car $\forall k\geqslant n+1,\ k^\alpha\geqslant (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x\in]0;1]$, on a $R_n(x)\geqslant (n+1)^\alpha\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k=(n+1)^\alpha x\dfrac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)}=(n+1)^\alpha(1-x)^n$ et $R_n(0)=0$. Même si $R_n$ est bornée, on déduit de cette minoration que $||R_n||_{\infty,[0;1]}\geqslant (n+1)^\alpha=\lim\limits_{x\to 0^+}(n+1)^\alpha(1-x)^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^\alpha=1$ si $\alpha=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^\alpha=+\infty$ si $\alpha>0$.

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha<0$.

Pour aller plus loin à nouveau, si $a\in]0;1[$, dès que $n+1\geqslant\dfrac{1}{a}$, on a $||f_n||_{\infty,[a;1]}=f_n(a)$ et on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a)$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;1]$ indépendamment de la valeur de $\alpha$.

**11.4** **a.** Pour $n\geqslant 0$, la fonction $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=\ln(1+t^n)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $I_n$ est bien défini. De plus, comme $\forall x>0,\ 0\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$, par croissance de l'intégrale, on en déduit l'inégalité $0\leqslant I_n\leqslant\int_0^1 t^n dt=\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{n+1}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0=\ell$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée mais c'est pus long !

**b.** On considère l'intégrale $I_n$ sur $]0;1]$ et on effectue, pour $n\geqslant 1$, le changement de variable $t=u^{1/n}=\varphi(u)$ avec $\varphi$ qui est une bijection strictement croissante et de classe $C^1$ (c'est pour ça qu'on a enlevé $0$ de l'intervalle) de $]0;1]$ dans $]0;1]$. Ainsi, $I_n=\int_0^1\ln(1+u)\dfrac{1}{n}u^{(1/n)-1}du=\dfrac{1}{n}\int_0^1\dfrac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}du$.

Soit, pour $n \geqslant 1$, la fonction $g_n : ]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = \dfrac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}$.

($H_1$) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in ]0;1]$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $g : ]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

($H_2$) Toutes les fonctions $g_n$ et la fonction $g$ sont continues sur $]0;1]$.

($H_3$) $\forall n \geqslant 1$, $\forall u \in ]0;1]$, $u^{1/n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant g_n(u) \leqslant g(u)$ et $g$ est intégrable sur $]0;1]$ car $g$ se prolonge par continuité en $0$ en posant $f(0) = 1$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n = \int_0^1 g$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^1 g$. Par définition, et comme $\displaystyle\int_0^1 g > 0$ car $g$ est continue, positive et non nulle sur $]0;1]$, on en déduit que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.

**c.** On considère cette fois l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$ sur $[0;1[$ avec $g(0) = 1$. On sait d'après le cours que $\forall u \in [0;1[$, $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^n}{n}$ donc $g(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$ (ceci est aussi valable pour $u = 0$). Or le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ donc on ne peut pas intégrer terme à terme par le théorème du cours puisqu'on n'est pas sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Posons $v_p : u \mapsto \dfrac{(-1)^p u^p}{p+1}$, alors $||v_p||_{\infty,[0;1[} = \dfrac{1}{p+1}$ donc on ne peut pas non plus utiliser la convergence normale sur un intervalle borné. Il reste le théorème d'intégration terme à terme.

($H_1$) La série $\sum\limits_{p\geqslant 0} v_p$ converge simplement vers $g$ sur $[0;1[$ (on en vient).

($H_2$) Les fonctions $v_p$ sont continues et intégrables sur $[0;1[$ et $g$ est continue sur $[0;1[$.

($H_3$) $\displaystyle\int_0^1 |v_p(u)|du = \left[\frac{u^{p+1}}{(p+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(p+1)^2}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{p\geqslant 0} \dfrac{1}{(p+1)^2}$ converge.

Ainsi, $g$ est intégrable sur $[0;1[$ (on le savait déjà) et $I = \displaystyle\int_0^1 g(u)du = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 v_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$. Posons, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $S'_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$ en séparant indices pairs et impairs. Ensuite, $S'_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{S_n}{2}$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \dfrac{\pi^2}{6}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \dfrac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $I = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \dfrac{\pi^2}{12}$ et, d'après la question précédente, on a donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

**11.5** **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et elle est positive car $f_n : x \mapsto x^n \sin(\pi x)$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$. Par intégration par parties (simple à justifier), il vient $u_n = -\dfrac{\pi}{n+1}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\cos(\pi x)dx$ donc, par l'inégalité de la moyenne, $|u_n| \leqslant \dfrac{\pi}{n+1}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument par RIEMANN et le théorème de comparaison car $\dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Bien sûr, la majoration $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ ne suffit pas pour conclure.

**b.** Comme $\forall x \in [0;1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(\pi x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$. Il vient :

($H_1$) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ sur $[0;1[$.

($H_2$) Les fonctions $f_n$ sont continues et intégrables sur $[0;1[$ (même sur $[0;1]$) et $f$ est continue sur $[0;1[$.

($H_3$) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \displaystyle\int_0^1 |f_n|$ converge d'après ce qui précède (question **a.**).

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $f$ est intégrable sur $[0;1[$ (ce qu'on pouvait voir en écrivant $f(x) = \dfrac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}$ ce qui montre que $f$ se prolonge par continuité en $1$ en posant $f(1) = \pi$) et il vient $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$. Or, par le changement de variable $x = 1 - \dfrac{u}{\pi} = \varphi(u)$ (cela revient à poser $u = \pi(1-x)$) avec $\varphi$ bijection de classe $C^1$ strictement décroissante de $]0;\pi]$ dans $[0;1[$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u}du$. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u}du \sim 1,85$.

**11.6** Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, $h_n : t \mapsto \dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, $h_n(t) = \dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}} \underset{0}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ donc $h_n$ est intégrable en $0$. Comme on a aussi $h_n(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nt}) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$, par comparaison, $h_n$ est aussi intégrable en $+\infty$. Ainsi, $a_n$ est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelle que soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_n : t \mapsto nt$ est une bijection strictement croissante de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, par changement de variable, en posant $u = nt = \varphi_n(t)$, on a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}du$ par linéarité de l'intégrale. On pose $g_n : u \mapsto \dfrac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}$ de sorte que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)du$.

($H_1$) Comme $f$ est continue en $0$, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $g : u \mapsto \dfrac{e^{-u}f(0)}{\sqrt{u}}$.

($H_2$) Les fonctions $g_n$ et la fonction $g$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

($H_3$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$, $|g_n(u)| = \dfrac{e^{-u}|f(u/n)|}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{e^{-u}||f||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{\sqrt{u}} = \varphi(u)$ et $\varphi$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}+^*$ car $\varphi(u) \underset{0}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Big)$ et $\varphi(u) \underset{+\infty}{=} o(e^{-u})$ comme avant.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 2f(0) \int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv$ en posant $u = \psi(v) = v^2$ avec $\psi$ bijection strictement croissante de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît l'intégrale de Gauss et on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\sqrt{\pi} \neq 0$ par hypothèse d'où, avec le calcul précédent, que $a_n \underset{+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme en **a.**, on a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin(u/n)}{\sqrt{u}}du$. Pour pouvoir utiliser $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, on écrit plutôt $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}du$. On pose $k_n : u \mapsto \dfrac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}$ de sorte que, dorénavant, on aura $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} k_n(u)du$.

($H_1$) Comme $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, $(k_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $k : u \mapsto \sqrt{u}e^{-u}$.

($H_2$) Les fonctions $k_n$ et la fonction $k$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(H_3)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$, $|k_n(u)| = \dfrac{\sqrt{u}e^{-u}|\sin(u/n)|}{(u/n)} \leqslant \sqrt{u}e^{-u} = \psi(u)$ car il est classique que $\forall t > 0,\ |\sin(t)| \leqslant t$ et $\psi$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\psi$ se prolonge par continuité en $0$ en posant $\psi(0) = 0$ et que $\psi(u) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(u/2)})$ par croissances comparées.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty} k(u)du$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-u}du = I$. Par intégration par parties, en posant $a(u) = \sqrt{u}$ et $b(u) = -e^{-u}$, comme $a$ et $b$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{u\to 0^+} a(u)b(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$, on a $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après **a.**. Ainsi, si $f = \sin$, $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$.

$\boxed{\textbf{11.7}}$ **a.** Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $f_{p,q} : x \mapsto x^p \ln^q(x)$ est continue sur $]0; 1]$ et $f_{0,q}(x) = (\ln(x))^q \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{p,q}(x) = 0$ si $p \geqslant 1$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0; 1]$ donc $I_{p,q}$ existe.

**b.** Si $q = 0$, alors $I_{p,0} = \displaystyle\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$. De plus, pour $q \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u : x \mapsto (\ln x)^q$ et $v : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$, $u$ et $v$ sont bien de classe $C^1$ sur $]0; 1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ et $u(1)v(1) = 0$. Ainsi, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 f_{p,q}(x)dx = -\frac{q}{p+1}\int_0^1 (\ln x)^{q-1}x^p\,dx = -\frac{qI_{p,q-1}}{p+1}$.

Alors, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{p,q} = -\dfrac{qI_{p,q-1}}{p+1} = \dfrac{q}{p+1} \times \dfrac{(q-1)I_{p,q-2}}{p+1} = \cdots = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} I_{p,0} = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

**c.** La fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ est continue sur $]0; 1]$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc $f$ se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ existe car $f$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$. Comme $x^x = e^{x\ln(x)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p(\ln x)^p}{p!}$ en développant l'exponentielle en série entière, on a $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{p=0}^{+\infty} f_{p,p}(x)dx$.

$(H_1)$ La série de fonctions $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f_{p,p}}{p!}$ converge simplement vers la fonction $f$ sur $]0; 1]$.

$(H_2)$ Toutes les fonctions $f_{p,p}$ sont continues et intégrables sur $]0; 1]$ (on vient de le voir) et la fonction $f$ est continue sur $]0; 1]$.

$(H_3)$ Pour $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}| = \frac{1}{(p+1)^{p+1}}$ d'après **b.** et la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}|$ converge par comparaison aux séries de Riemann car $u_p = \dfrac{1}{(p+1)^{p+1}} \leqslant \dfrac{1}{p^2}$ dès que $p \geqslant 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, $f$ est intégrable sur $]0; 1]$ (on le savait déjà) et il vient $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^{p+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^p}$ après changement d'indice.

$\boxed{\textbf{11.8}}$ **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin^n(t)}{t}$ est continue sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par opérations et elle se prolonge par continuité en $0$ en posant $f_1(0) = 1$ et $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$ car $f_n(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^n}{t} = t^{n-1}$. Ainsi, $f_n$ étant maintenant continue sur le segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**b.** Utilisons le théorème de convergence dominée :

$(H_1)$ la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ (attention à $t = \dfrac{\pi}{2}$),

$(H_2)$ les fonctions $f_n$ et la fonction nulle sont continues sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

$(H_3)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, comme $\sin(t) \leqslant t$, on a $|f_n(t)| = \dfrac{\sin(t)}{t} \times \sin^{n-1}(t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ et la fonction $\varphi$ est clairement continue et intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 0.dt = 0$.

**c.** Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leqslant \dfrac{\sin^{n+1}(t)}{t} \leqslant \dfrac{\sin^n(t)}{t}$, par positivité et croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et elle tend vers $0$ d'après la question précédente. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ converge.

**d.** <u>Méthode 1</u> : comme la fonction $\sin$ est concave sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur cet intervalle, sa courbe est en dessus de ses cordes, et on a donc la minoration suivante $\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^n \frac{1}{t}dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\pi/2} t^{n-1}dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n}$. Comme la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge, par minoration, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

<u>Méthode 2</u> : supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge, comme

$(H_1)$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers $S : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t(1-\sin(t))}$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ (série géométrique),

$(H_2)$ les $f_n$ sont continues et intégrables sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ d'après **b.** et la fonction $S$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

$(H_3)$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\displaystyle\int_0^{\pi/2}|f_n(t)|dt$ converge par hypothèse

Par le théorème d'intégration terme à terme, $S$ est intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} S(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Or $S(t) = \dfrac{\sin(t)}{t(1-\sin(t)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \dfrac{2}{\pi(1-\sin(t))} = \dfrac{2}{\pi\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \dfrac{4}{\pi\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}$ car $1-\cos(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ donc $S$ n'est pas intégrable en $\dfrac{\pi}{2}$ par RIEMANN. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

<u>Méthode 3</u> : beaucoup plus précis mais pas nécessaire si c'est juste pour répondre à la question de l'énoncé, on peut chercher un équivalent de $u_n$. On pose $u = \sin^n(t) = \varphi_n(t)$ et $\varphi_n$ est une bijection $C^1$ strictement croissante de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $]0;1]$, ce qui revient à poser $t = \varphi_n^{-1}(u) = \mathrm{Arcsin}(u^{1/n})$ et on a par changement de variable $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{\mathrm{Arcsin}(u^{1/n})}\frac{u^{(1/n)-1}}{\sqrt{1-u^{2/n}}}du$. Or $1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n}\ln(u)$ donc on écrit plutôt $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{(1/n)}}{\mathrm{Arcsin}(u^{1/n})}\frac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \frac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}du$. Soit $g_n : ]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = \dfrac{u^{(1/n)}}{\mathrm{Arcsin}(u^{1/n})}\dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$(H_1)$ Comme $1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n}\ln(u)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{Arcsin}(u^{1/n}) = \dfrac{\pi}{2}$, la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{2}{\pi\sqrt{-\ln(u)}}$ sur $]0;1[$.

$(H_2)$ Les fonctions $g_n$ et la fonction $g$ sont continues sur $]0;1[$.

$(H_3)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in ]0;1[$, $\mathrm{Arcsin}(u^{1/n}) \geqslant u^{1/n} > 0$ et $0 < 1-u^{2/n} = 1-e^{(2/n)\ln(u)} \leqslant -\dfrac{2}{n}\ln(u)$ donc

$0 < \dfrac{u^{(1/n)}}{\text{Arcsin}(u^{1/n})} \dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \leqslant 1$ et $|g_n(u)| \leqslant \varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$. Or $\varphi$ est continue sur $]0;1[$ où elle est intégrable par RIEMANN car $\lim\limits_{u\to 0^+} \varphi(u) = 0$ et $\varphi(u) \underset{u\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(t)dt = I$. En posant $u = e^{-x} = \psi(x)$, comme $\psi$ est $C^1$, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$, on a $I = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{2}{\pi\sqrt{-\ln(e^{-x})}}(-e^{-x})dx$ donc $I = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$. On pose $x = v^2$ et, comme $v \mapsto v^2$ est $C^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $I = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS) donc $I = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi n}}$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

**11.9** Si $n = 0$, $f_0 : t \mapsto \dfrac{\sin(0.t)}{e^t - 1}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t-1}dt$ existe et $I_0 = 0$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin(n.t)}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en $0$ en posant $f_n(0) = n$ car $\sin(nt) \underset{0}{\sim} nt$ et $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$. De plus, $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ donc, par comparaison, $f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t-1}dt$ existe.

Pour utiliser l'indication de l'énoncé, on peut penser à poser $t = \dfrac{u}{n} = \varphi(u)$ avec $\varphi$ qui est une bijection de classe $C^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{n(e^{u/n}-1)}du$. On constate que $e^{u/n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u}$. Mais comme cette fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u}$ n'est pas intégrable, on ne peut pas utiliser directement le théorème de convergence dominée. Il faut d'abord effectuant une intégration par parties en posant $a(u) = 1 - \cos(u)$, $b(u) = \dfrac{1}{n(e^{u/n}-1)}$ de sorte que $a$ et $b$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0^+} a(u)b(u) = 0$ car $1 - \cos(u) \underset{0}{=} \dfrac{u^2}{2}$ et $n(e^{u/n}-1) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, on a une nouvelle expression de $I_n$, à savoir $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n}-1)^2}du$. Posons, $g_n(u) = \dfrac{(1-\cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n}-1)^2}$.

($H_1$) Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, comme $n^2(e^{u/n}-1)^2 \underset{+\infty}{\sim} u^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u/n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} = g(u)$. Ainsi, la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

($H_2$) Les fonctions $g_n$ et la fonction $g$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

($H_3$) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(u)| = \dfrac{(1-\cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n}-1)^2} = \dfrac{(1-\cos(u))}{n^2(e^{u/2n}-e^{-u/2n})^2}$ donc on a l'expression $|g_n(u)| = \dfrac{(1-\cos(u))}{4n^2 \text{sh}\,(u/2n)^2}$. Or sh est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\text{sh}'' = \text{sh} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\text{sh}\left(\dfrac{u}{2n}\right) \geqslant \dfrac{u}{2n}$. Ainsi, $|g_n(u)| \leqslant \dfrac{(1-\cos(u))}{4n^2(u/2n)^2} = g(u)$ et $g$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $g$ se prolonge par continuité en $0$ en posant $g(0) = \dfrac{1}{2}$ car $1 - \cos(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ et $g(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$. Or en posant $a(u) = 1 - \cos(u)$ et $b(u) = -\dfrac{1}{u}$, les fonctions $a$ et $b$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{\substack{u\to+\infty \\ u\to 0^+}} a(u)b(u) = 0$ car $\dfrac{1-\cos(u)}{u} \underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$. Par intégration par parties, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} = \frac{\pi}{2}$ d'après l'énoncé (classique intégrale de DIRICHLET). Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t-1}dt = \frac{\pi}{2}$.

**11.10** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : ]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^{-1/n}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}$ est positive et continue sur $]0;1]$ et $f_n(x) \underset{0}{\sim} x^{-1/n}$. Par comparaison avec RIEMANN, $\int_0^1 f_n$ converge si et seulement si $n \geqslant 2$.

($H_1$) Pour $x \in ]0;1]$, par continuité de l'exponentielle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{-1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\ln(x)/n} = e^0 = 1$ et $\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n} = \exp\Big(-n\ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big)$ alors que $\ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n} = e^{-x}$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

($H_2$) On a vu ci-dessus que les fonctions $f_n$ sont continues et intégrables sur $]0;1]$ pour $n \geqslant 2$. De plus, la fonction $f$ est aussi continue sur $]0;1]$.

($H_3$) Pour $n \geqslant 2$ et $x \in ]0;1]$, on a $0 \leqslant x^{-1/n} \leqslant x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ car $\ln(x) \leqslant 0$. De plus, $0 \leqslant \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n} \leqslant 1$ donc $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or $\varphi$ est continue et intégrable sur $]0;1]$ par RIEMANN.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{-1/n}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 f(x)dx$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{-1/n}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}dx = \int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1-e^{-1} \sim 0,63$.

**11.11** **a.** Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \ln\Big(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\Big) = \alpha\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) + \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big)$ donc, avec l'hypothèse de l'énoncé, $a_n \underset{+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + \ln\Big(1 - \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge ce qui donne l'existence d'un réel $k$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n^\alpha u_n) = k$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \lambda = e^k > 0$ donc que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

**b.** Soit $x \in ]-1;0[$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1-(1-t)^x}{t}$ est continue sur $]0;1[$.

<u>En $1^-$</u> Comme $x < 0$, $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)^x = +\infty$ donc $g_x(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{-x}}$ et, comme $-x < 1$, $g_x$ est intégrable sur $\Big[\frac{1}{2};1\Big[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

<u>En $0^+$</u> On sait que $(1-t)^x \underset{0}{=} 1 - xt + o(t)$ donc $g_x(t) \underset{0}{=} \frac{xt+o(t)}{t} \underset{0}{=} x + o(1)$ donc $g_x$ se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$. Ainsi, $g_x$ est intégrable sur $\Big]0;\frac{1}{2}\Big]$.

Par conséquent, $g_x$ est intégrable sur $]0;1[$ (même $[0;1[$) donc $f$ est bien définie sur $]-1;0[$.

Pour $t \in [0;1[$, on a $(1-t)^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}(-t)^n$ d'après le cours sur les séries entières donc $g_x(t) = \frac{1}{t}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^n$ pour $t \in ]0;1[$, ce qui se simplifie en (relation vraie pour $t = 0$ car on a posé $g_x(0) = x$) $g_x(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

Posons donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $u_n : t \mapsto (-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

($H_1$) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers $g_x$ sur $[0;1[$ (on vient de le voir).

($H_2$) Les $u_n$ sont continues et intégrables sur $[0;1[$ si $n \in \mathbb{N}$ car elles sont polynomiales sur le segment $[0;1]$.

(H3) La fonction $g_x$ est continue sur $[0;1[$.

(H4) Posons $I_n = \int_0^1 |u_n| = \dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n!}\left[\dfrac{t^n}{n}\right]_0^1 = \dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n.n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On calcule $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n-x)n.n!}{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n+1).(n+1)!} = \dfrac{n(n-x)}{(n+1)^2} = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2}$ ce qui donne, par développements limités, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{+\infty}{=} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ et il vient donc $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{+\infty}{=} 1-\dfrac{x+2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit d'après la question précédente qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{x+2}}$ donc, toujours par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} I_n$ converge car $x+2>1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a l'intégrabilité de $g_x$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 g_x(t)dt = \int_0^1 \dfrac{1-(1-t)^x}{t}dt = f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n$.

**11.12** **a.** Pour $n \geqslant 2$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$. La fonction $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$ donc $f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison à une intégrale de RIEMANN car $n > 1$. Ainsi, $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^n}$ converge pour $n \geqslant 2$ et la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est bien définie.

**b.** Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in [0;1[$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $x \in ]1;+\infty[$.

(H2) Les fonctions $f_n$ et $f$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H3) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0;1[$ et $\varphi(x) = f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ si $x \in [1;+\infty[$ avec $\varphi$ qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

D'après le théorème évoqué, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 dx = 1 = \ell$.

**c.** Pour $n \geqslant 2$, $I_n - \ell = I_n - 1 = \int_0^1 (f_n(x)-1)dx + \int_1^{+\infty} f_n(x)dx = -\int_0^1 \dfrac{x^n dx}{1+x^n} + \int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^n}$ avec la relation de CHASLES. On pose $x = u^{1/n} = \varphi_n(u)$ dans les deux intégrales car $u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection strictement croissante de classe $C^1$ de $]0;1]$ dans $]0;1]$ mais aussi de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$, ce qui donne la relation $I_n - 1 = \dfrac{1}{n}\int_0^1 \dfrac{u^{1/n}du}{1+u} + \dfrac{1}{n}\int_1^{+\infty}\dfrac{u^{1/n}du}{u(1+u)}$ donc $n(I_n-1) = \int_0^1 g_n(u)du + \int_1^{+\infty} h_n(u)du$ en posant $g_n(u) = \dfrac{u^{1/n}}{1+u}$ et $h_n(u) = \dfrac{u^{1/n}}{u(1+u)}$.

(H1) $(g_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $g : ]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(u) = \dfrac{1}{1+u}$ et $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers $h : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \dfrac{1}{u(1+u)}$.

(H2) Les fonctions $g_n$ et $g$ sont continues sur $]0;1]$ et les $h_n$ et $h$ sont continues sur $[1;+\infty[$.

(H3) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall u \in ]0;1]$, $|g_n(u)| \leqslant \alpha(u) = 1$ et $\forall u \in [1;+\infty[$, $|h_n(u)| \leqslant \beta(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}(1+u)}$ avec $\alpha$ continue et intégrable sur $]0;1]$ et $\beta$ continue et intégrable sur $[1;+\infty[$ car $\beta(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$.

D'après le théorème de convergence dominée appliqué deux fois, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(u)du = \ln(2)$

et $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} h_n(u)du = \int_1^{+\infty} h(u)du = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)du = \left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(2)$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n(I_n-1) = -\ln(2)+\ln(2) = 0$ d'où $I_n - 1 \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ ne donne pas d'équivalent de $I_n - 1$ : damned !

Changeons de stratégie. Dans $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}$, on pose $x = \frac{1}{u} = \psi(u)$ avec $\psi$ une bijection de classe $C^1$ strictement décroissante de $]0;1]$ dans $[1;+\infty[$, et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n} = \int_1^0 \frac{1}{1+(1/u)^n}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{1+u^n}du$. Ainsi, pour $n \geqslant 2$, $I_n - 1 = \int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{1+x^n}dx$ et on pose $x = u^{1/n} = \varphi_n(u)$ car $\varphi_n$ est une bijection strictement croissante de classe $C^1$ de $]0;1]$ dans $]0;1]$ pour avoir $I_n - 1 = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{n-2}{n}} - u}{1+u}\times u^{(1/n)-1}du$ et on obtient $I_n - 1 = -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u}\left(u^{2/n}-1\right)du$. Comme $\forall u \in ]0;1]$, $u^{2/n}-1 = \exp\left(\frac{2\ln(u)}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(u)}{n}$ car $e^t \underset{0}{=} 1+t+o(t)$, on écrit plutôt $I_n - 1 = -\frac{2}{n^2}\int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u}\times\frac{u^{2/n}-1}{\frac{2\ln(u)}{n}}\times\ln(u)du$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons $h_n : u \mapsto \frac{u^{-(1/n)}}{1+u}\times\frac{u^{2/n}-1}{\frac{2\ln(u)}{n}}\times\ln(u)$ :

- ($H_1$) $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers la fonction $h : ]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \frac{\ln(u)}{1+u}$.
- ($H_2$) Les fonctions $h_n$ et $h$ sont continues sur $]0;1]$.
- ($H_3$) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall u \in ]0;1]$, $|h_n(u)| \leqslant \theta(u)$ avec $\theta(u) = \frac{u^{-1/2}\ln(u)}{1+u}$ si $u \in ]0;1]$ car $n \geqslant 2$ et qu'il est classique que $\forall t \in \mathbb{R}_-^*$, $e^t - 1 \geqslant t$ donc $\forall u \in ]0;1[$, $\frac{u^{2/n}-1}{\frac{2\ln(u)}{n}} \leqslant 1$ en prenant $t = \frac{2\ln(u)}{n} < 0$. De plus, $\theta$ est continue et intégrable sur $]0;1]$ par comparaison à une intégrale de Riemann $\left(\frac{3}{4} < 1\right)$ car on a $\theta(u) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{u^{3/4}}\right)$ par croissances comparées.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2}(1-I_n) = \int_0^1 h(u)du = J$.

Or $\forall u \in ]0;1[$, $h(u) = \ln(u)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n\ln(u)$. Si $a_n : u \to (-1)^n u^n \ln(u)$ pour $n \in \mathbb{N}$ :

- ($H_1$) La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge simplement vers $h$ sur $]0;1]$ car $h(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(1) = 0$.
- ($H_2$) Les fonctions $a_n$ sont continues et intégrables sur $]0;1]$ pour $n \in \mathbb{N}$ car elles se prolongent par continuité en $0$ avec $a_n(0) = 0$ dès que $n \geqslant 1$ et $a_0(u) = \ln(u) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$ par croissances comparées.
- ($H_3$) La fonction $h$ est continue sur $]0;1]$.
- ($H_4$) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : u \mapsto \frac{u^{n+1}}{n+1}$ et $v : u \mapsto -\ln(u)$ sont de classe $C^1$ sur $]0;1]$ et $\lim_{u\mapsto 0} u_n(u)v(u) = 0$ par croissances comparées donc $J_n = \int_0^1 |a_n| = \int_0^1 u_n'(u)v(u)du = [u_n(u)v(u)]_0^1 - \int_0^1 u_n(u)v'(u)du$ donc $J_n = \int_0^1 \frac{u^n}{n+1}du = \frac{1}{(n+1)^2}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}$ converge car $2 > 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $J = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 a_n(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$. En séparant termes d'indices pairs et impairs, $J = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2)^2}$ et il vient

$J=-\zeta(2)+\dfrac{\zeta(2)}{2}=-\dfrac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{2}(I_n-1)=-J=\dfrac{\pi^2}{12}$ donc $I_n-1\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{6n^2}$.

**d.** Par comparaison à une série de RIEMANN convergente car $2>1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(I_n-1)$ converge.

**11.13** Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive car $f_0(x)=x>0$ et, si $f_n(x)>0$ est bien défini pour un entier $n\in\mathbb{N}$, le réel $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{2}\Big(f_n(x)+\dfrac{x}{f_n(x)}\Big)$ est aussi bien défini et strictement positif. Si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell_x\in\mathbb{R}_+$, en passant à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ dans la relation de récurrence $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{2}\Big(f_n(x)+\dfrac{x}{f_n(x)}\Big)$, $\ell_x=\dfrac{1}{2}\Big(\ell_x+\dfrac{x}{\ell_x}\Big)\Longleftrightarrow \ell_x^2=x\Longleftrightarrow \ell_x=\sqrt{x}$ car $\ell_x\geqslant 0$.

<u>Convergence simple</u> : soit $x>0$, $f_{n+1}(x)-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Big(f_n(x)+\dfrac{x}{f_n(x)}-2\sqrt{x}\Big)=\dfrac{(f_n(x)-\sqrt{x})^2}{2f_n(x)}\geqslant 0$ donc on a la minoration $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(x)\geqslant\sqrt{x}$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N},\ f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{x}{f_n(x)}-f_n(x)\Big)$ qui se transforme en $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-f_n(x))(\sqrt{x}+f_n(x))}{2f_n(x)}\leqslant 0$ dès que $n\geqslant 1$ donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minore par $\sqrt{x}$ donc elle converge et on a vu précédemment que sa limite est forcément $\sqrt{x}$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}$.

<u>Convergence uniforme</u> : la fonction $f_0-f:x\mapsto x-\sqrt{x}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_0(x)-f(x))=+\infty$. De même, $f_1-f:x\mapsto\dfrac{x+1}{2}-\sqrt{x}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x)-f(x))=+\infty$. Si on suppose que $f_n(x)-f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{2^n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, alors $f_n(x)=(f_n(x)-f(x))+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}\underset{+\infty}{=}o(x)$ donc, par somme, $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{2^n}$ et la relation $f_{n+1}(x)-\sqrt{x}=\dfrac{(f_n(x)-\sqrt{x})^2}{2f_n(x)}$ montre, par quotient, que $f_{n+1}(x)-f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\frac{x^2}{2^{2n}}}{2\frac{x}{2^n}}=\dfrac{x}{2^{n+1}}$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x)-f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{2^n}$ donc $f_n-f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-f(x))=+\infty$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}$.

**11.14** **a.** Posons $u_n=H_n-\ln(n)$ si $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\geqslant 2$, $u_n-u_{n-1}=(H_n-H_{n-1})-(\ln(n)-\ln(n-1))$ donc $u_n-u_{n-1}=\dfrac{1}{n}+\ln\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n-u_{n-1})$ converge absolument donc converge et, par dualité suite-série, $(u_n)_{n\geqslant 1}=\big(H_n-\ln(n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers un réel $\gamma\sim 0,577$ appelé constante d'EULER.

**b.** $f:t\mapsto\ln(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(t)\underset{0}{\sim}\ln(t)\underset{0}{=}o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et $f(t)\underset{+\infty}{=}e^{-t/2}$ par croissances comparées donc, par comparaison à des intégrales de référence, $f$ est intégrable en $0^+$ et $+\infty$ donc $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$ est donc absolument convergente donc convergente, ainsi I existe.

**c.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n:t\mapsto\Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^{n-1}\ln(t)$ est continue sur $]0;n]$ et $f_n(t)\underset{0}{\sim}\ln(t)\underset{0}{=}o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ donc, comme avant, $f_n$ est intégrable sur $]0;n]$ donc $I_n$ existe.

Dans l'intégrale $I_n$, on effectue le changement de variable $t=nu=\varphi_n(u)$ avec $\varphi_n$ qui est bijective et de classe $C^1$ de $]0;1]$ dans $]0;n]$, et on obtient $I_n=\displaystyle\int_0^1\Big(1-\dfrac{nu}{n}\Big)^{n-1}\ln(nu)(ndu)$ donc, par linéarité de l'intégrale, comme tout converge, $I_n=n\ln(n)\displaystyle\int_0^1(1-u)^{n-1}du+n\int_0^1(1-u)^{n-1}\ln(u)du$. Or il vient

$\int_0^1 (1-u)^{n-1}du = \left[-\frac{(1-u)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$ et, en posant $a : u \mapsto \frac{1-(1-u)^n}{n}$ et $b : u \mapsto \ln(u)$ qui sont de classe $C^1$ sur $]0;1]$, comme $\lim\limits_{u\to 0+} a(u)b(u) = 0$ par croissances comparées car $1-(1-u)^n \underset{0}{\sim} nu$, on obtient $I_n = \ln(n) + \left[\frac{(1-(1-u)^n)\ln(u)}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}du = \ln(n) + \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{1-(1-u)}du$. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $1-u \neq 1$ et on a donc la relation $I_n = \ln(n) - \int_0^1 \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1-u)^k\Big)du = \ln(n) - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \ln(n) - H_n = -u_n$.

**d.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = f_n(t)$ si $t \leqslant n$ et $g_n(t) = 0$ si $t > n$. Alors $g_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^n f_n = I_n$ d'après la question précédente.

- $(H_1)$ Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, dès que $n \geqslant t$, on a $g_n(t) = f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t) = \ln(t)\exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = f(t) = \ln(t)e^{-t}$ par continuité de l'exponentielle car $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$. Ainsi, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $(H_2)$ Les fonctions $g_n$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et y sont intégrables d'après ce qui précède et la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $(H_3)$ Par concavité de $\ln$, $\forall n \geqslant 2$, $|g_n(t)| = |f_n(t)| \leqslant |\ln(t)|e^{(n-1)(-t/n)} = |\ln(t)|e^{-t}e^{t/n}$ donc $|g_n(t)| \leqslant |\ln(t)|e^{-t}e^{t/2} = |\ln(t)|e^{-t/2} = \varphi(t)$ si $t \leqslant n$ et $|g_n(t)| = 0 \leqslant \varphi(t)$ sinon. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(t)| \leqslant \varphi(t) + |f_1(t)| = \psi(t)$ et la fonction $\psi$ est continue et intégrable (comme somme de fonctions intégrables) sur $\mathbb{R}_+^*$ avec les mêmes arguments qu'avant.

Par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ donc, avec la question **a.**, on a donc $I = -\gamma$.

**11.15** La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ donc $f$ est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ par comparaison aux intégrales de Riemann. De plus, $f$ est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ car $f(x) \underset{1^-}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ car $\ln(x) \underset{1}{\sim} x-1$ donc $f$ se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ par croissances comparées. Comme on sait que $\forall x \in ]0;1[$, $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, il vient, avec $f_n : ]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par avec $f_n(x) = -\frac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$, la relation $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Le fonctions $f_n$ sont continues sur $]0;1]$ et, comme $f_1(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et que $\lim\limits_{x\to0+} f_n(x) = 0$ par croissances comparées donc que $f_n$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$, les fonctions $f_n$ sont intégrables sur $]0;1]$.

D'abord, en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, les fonctions $u$ et $v$ sont bien de classe $C^1$ sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{x\to0+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geqslant 1$ donc, par intégration par parties, on obtient la relation $\int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^n\ln x}{n^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n^2}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n^3}$ si $n \geqslant 1$.

<u>Méthode 1</u> : par linéarité de l'intégrale, comme la fonction $f_1 : x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0;1]$, et donc $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = f - f_1$ aussi d'après ce qui précède, on a $I = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Pour $n \geqslant 2$, $f_n$ est continue sur $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. De plus, $f_n$ est dérivable sur

$]0;1]$ et $\forall x \in ]0;1]$, $f'_n(x) = -\frac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}\Big)$ donc, avec le tableau de variations de $f_n$, on trouve $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\Big) = \frac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n^2}$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ par RIEMANN. Par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ sur le segment $[0;1]$, d'après le cours, $\int_0^1 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3)-1$. Comme $\int_0^1 f_1 = 1$, on obtient la valeur $I = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

Méthode 2 : utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

- $(H_1)$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers $f$ sur $]0;1[$ (on en vient).
- $(H_2)$ Les $f_n$ sont continues et intégrables sur $]0;1[$ (déjà vu).
- $(H_3)$ La fonction $f$ est continue sur $]0;1[$.
- $(H_4)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^3}$ converge.

Par le fameux théorème, on conclut que $f$ est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1,202$.

**11.16** **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, pour que $S(x)$ existe, on doit au moins avoir $\forall n \in \mathbb{N},\ n+x \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin (-\mathbb{N})$. Soit donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}\setminus(-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{a^n}{n+x}$. Traitons alors quatre cas :

- Si $|a| < 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n$ converge car $|a|<1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries géométriques.
- Si $|a| > 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $a = 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge par comparaison à la série harmonique.
- Si $a = -1$, alors $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}\times\frac{1}{1+(x/n)} \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ car $\frac{1}{1+(x/n)} \underset{+\infty}{=} 1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(f_n(x) - \frac{(-1)^n}{n}\Big)$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, par somme, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge (mais pas absolument).

Le domaine de définition de $S$ vaut donc $D_S = \emptyset$ si $|a| > 1$ ou $a = 1$, $D_S = \mathbb{R}\setminus(-\mathbb{N})$ si $|a| < 1$ ou $a = -1$.

**b.** Tout d'abord, les fonctions $f_n$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 1 : soit $0 < \alpha < \beta$, alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\alpha;\beta]$, comme $|f_n| : x \mapsto \frac{|a|^n}{n+x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $|f_n(x)| \leqslant |f_n(\alpha)|$ donc $f_n$ est bornée sur $[\alpha;\beta]$ et $||f_n||_{\infty,[\alpha;\beta]} = |f_n(\alpha)| \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0}|a|^n$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement vers $S$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On sait d'après le cours que ceci implique la continuité de $S$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : $f_0$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, pour $n \geqslant 1$, comme $|f_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \lim\limits_{x\to 0^+}|f_n(x)| = \frac{|a|^n}{n} \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1}|a|^n$ converge car $|a| < 1$ par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $T : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

d'après le cours. Comme $S = T + f_0$ et que $f_0$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, $S$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

**c.** Soit $x > 0$, $a\,S(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} af_n(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1}}{n+x+1} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{a^p}{p+x}$ en effectuant le changement d'indice $p = n+1$. Ainsi, $aS(x+1) = S(x) - f_0(x) = S(x) - \dfrac{1}{x}$.

**d.** $\forall x > 0,\ S(x) = \dfrac{1}{x} + a\,S(x+1)$ or $S$ est continue en $1$ d'après **b.** donc $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x+1) = S(1)$. Ainsi, $S$ est bornée au voisinage de $1$ et $S(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O(1) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ ce qui montre bien que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

**e.** Méthode 1 : la borne $\beta$ n'est pas intervenue dans les calculs de la question **b.** donc $||f_n||_{\infty,[\alpha;+\infty[} = |f_n(\alpha)|$ à nouveau et on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[\alpha;+\infty[$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, par théorème de la double limite, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Méthode 2 : Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **b.** et que $\forall n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$, par double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0 + 0 = 0$.

**f.** Comme $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^n}{x}$, si on admet pouvoir sommer les équivalents, on aurait $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{x} = \dfrac{1}{(1-a)x}$.

Pour le montrer rigoureusement, on écrit $x\,S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ avec $g_n(x) = \dfrac{a^n x}{n+x} = a^n - \dfrac{na^n}{n+x}$, la fonction $|g_n| : x \mapsto |a|^n - \dfrac{n|a|^n}{n+x}$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} |g_n(x)| = |a|^n$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = |a|^n$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a|^n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la double limite, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$. Par conséquent, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(1-a)x}$.

Pour être plus précis, pour $x > 0$, $\left|S(x) - \dfrac{1}{(1-a)x}\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{a^n}{n+x} - \dfrac{a^n}{x}\right)\right|$ car $\dfrac{1}{1-a} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ donc, par inégalité triangulaire, on a $\left|S(x) - \dfrac{1}{(1-a)x}\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{na^n}{x(n+x)}\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n|a|^n}{x^2} = \dfrac{A}{x^2}$ en posant $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n|a|^n$. Ainsi, $S(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ ce qui est plus précis que ce qu'on a obtenu avant.

**11.17** **a.** • Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. • Si $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0 = \ell$ car $x^2 > 0$ donc, par continuité de la fonction $\sin$ en $0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(\ell) = 0$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $F : x \mapsto 0$ sur $[-1;1]$.

**b.** Soit $a \in ]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a;1]$, alors $0 \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na^2} = 0$ par croissances comparées, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $ne^{-na^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Par croissance de $\sin$ sur $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sin(ne^{-na^2})$ donc $||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = ||f_n||_{\infty,[a;1]} \leqslant \sin(ne^{-na^2})$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(ne^{-na^2}) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = 0$ d'où, par définition, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction $F$ sur tout $[a;1]$ avec $a \in ]0;1[$.

**c.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \sin\big(e^{-1/n}\big) \geqslant \sin(e^{-1})$ car $\sin$ est croissante sur $[e^{-1};1[$ donc, comme $||f_n||_{\infty,[-1;1]} \geqslant f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \geqslant \sin(e^{-1})$ puisque $\dfrac{1}{n} \in [-1;1]$, la suite $\big(||f_n||_{\infty,[-1;1]}\big)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers $0$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction $F$ sur $[-1;1]$.