TD 11 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 28 novembre 2025**

11.1 *CCP PSI 2016* Sylvin Bielle I (8,69) Soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2n}$ si $x \in]0;1]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément vers $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ à préciser.

11.2 *ICNA PSI 2017 sans préparation* Aloïs Blarre Soit $f_n : \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

11.3 *Mines PSI 2016 et 2019* Thomas Corbières I et Louis Destarac I (14 et 16)

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.
a. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$.
b. Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0;1]$.

11.4 *CCP PSI 2019* Thomas Brémond et Lucas Maisonnave I (12 et 15,61)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$. On rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
a. Montrer la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 0}$ vers un réel ℓ à déterminer.
b. Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$.
c. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

11.5 *CCP PSI 2019 et CCP PSI 2015* Julien Tissot I et Agatha Courtenay I On pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\mathrm{d}x$.
a. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
b. Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$.

11.6 *X PSI 2022* Lucas Lacampagne I (12)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $f(0) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.
a. Trouver un équivalent de a_n.
b. Que se passe-t-il si $f = \sin$?

11.7 *ENS Cachan PSI 2022* Noé Chassagne I (16) On définit, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q(x)\mathrm{d}x$.
a. Montrer l'existence de $I_{p,q}$ pour toutes valeurs des entiers naturels p et q.
b. Calculer $I_{p,q}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
c. En déduire que $\int_0^1 x^x\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

11.8 *Centrale Maths1 PSI 2022* Joël Lascoumes (7) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{t}\mathrm{d}t$.
a. Montrer que u_n est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
c. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge.
d. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

11.9 *Mines PSI 2022* Olivier Courmont II (17) Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1}dt$.

11.10 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche III (17) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{-1/n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}dx$.

11.11 *Centrale Maths1 PSI 2024* Antoine Métayer Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$. On définit aussi $f :]-1;0[\to \mathbb{R}$ par $\displaystyle f(x) = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}dt$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Montrer que f est bien définie et que $\forall x \in]-1;0[,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!}$.

11.12 *Mines PSI 2024* Tristan Cheyrou II (11) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

a. Justifier que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est bien définie.
b. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à déterminer.
c. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.
d. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 2}(I_n - \ell)$.

11.13 *Mines PSI 2024* Tiago Genet II (12,5) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0,\ f_0(x) = x$ et, si $n \in \mathbb{N}$, par $\forall x > 0,\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_n(x) + \dfrac{x}{f_n(x)}\right)$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11.14 *Mines PSI 2024* Lucie Girard I (10) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)dt$.

a. Montrer la convergence de la suite $\big(H_n - \ln(n)\big)_{n\geqslant 1}$. On note γ sa limite.
b. Établir la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$. On note $\displaystyle I = \int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt$.
c. Prouver l'existence de I_n et trouver un lien simple entre I_n et H_n.
d. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et trouver un lien entre γ et I.

11.15 *Mines PSI 2021 (3) et Mines PSI 2024* Quentin Granier IV et Baptiste Pozzobon III et Raffi Sarkissian III et Valentine Girard III (19,5 et 15 et 16 et 12,5) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

11.16 *CCP PSI 2019 (2) et CCINP PSI 2024* Louis Destarac et Victor Margueritte I et Amélia Arangoits I (15,81 et 14,91 et 19,36) Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S selon les valeurs de a.
Dans la suite de l'exercice, on impose $|a| < 1$.
b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour $x > 0$.
d. Trouver un équivalent de S en 0.
e. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
f. Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

11.17 *CCINP PSI 2024* Amjad Belmiloud II Soit $f_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin\left(nx\,e^{-nx^2}\right)$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.
b. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.
c. En considérant $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[-1;1]$?