

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 11

PSI 1 2025-2026

du lundi 08/12 au vendredi 12/12

1 Suites et séries de fonctions :

- convergence simple d'une suite de fonctions : limite simple ;
- convergence uniforme d'une suite de fonctions, exemples et contre-exemples ;
- convergence uniforme sur tout segment et implications entre ces trois notions ;
- convergence simple d'une série de fonctions : fonction somme, fonction R_n reste d'ordre n ;
- convergence uniforme de la série de fonctions si $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle ; convergence uniforme de la série de fonctions sur tout segment ;
- convergence normale de la série de fonctions et convergence normale sur tout segment ; exemples et contre-exemples ; implications entre ces cinq notions ;
- conservation de propriétés par convergence simple : parité, croissance, périodicité ;

2 Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions :

- théorème de convergence dominée - exemples ;
- théorème d'intégration terme à terme classique ;
- interversion série/intégrale sur un intervalle quelconque par théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles ;

3 Convergence uniforme et régularité :

- convergence uniforme d'une suite de fonctions continues vers une fonction continue ;
- théorème de la double limite pour une suite de fonctions convergeant uniformément ;
- convergence uniforme (ou normale) d'une série de fonctions continues vers une fonction continue ;
- théorème de la double limite pour série de fonctions si convergence uniforme ;

4 Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions :

- l'intégrale sur un segment $[a; b]$ d'une limite uniforme de suites de fonctions continues est la limite des intégrales sur $[a; b]$ de ces fonctions ;
- l'intégrale sur $[a; b]$ de la somme d'une série de fonctions convergeant uniformément est la somme de la série des intégrales de ces fonctions sur $[a; b]$ (majoration si la convergence est normale) ;
- dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle telle que la suite des dérivées converge uniformément ;
- dérivation de la somme d'une série de fonctions de classe C^1 convergeant simplement sur un intervalle telle que la série des fonctions dérivées converge uniformément ;
- récurrence avec le théorème de dérivation pour montrer qu'une somme de série de fonctions est C^∞ ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir la convergence simple d'une série de fonctions sur une partie (déf. 6.4)
- 2 définir la convergence uniforme d'une série de fonctions sur une partie (déf. 6.5)
- 3 définir la convergence normale d'une série de fonctions sur une partie (déf. 6.6)
- 4 énoncer le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions (th. 6.6)
- 5 énoncer le théorème de la double limite pour les séries de fonctions (th. 6.7)
- 6 énoncer le théorème d'intégration terme à terme par convergence uniforme sur un segment (th. 6.9)
- 7 énoncer le théorème d'interverson série/dérivée pour les séries de fonctions (th. 6.13)
- 8 prouver que si les f_n sont paires et que $\sum f_n$ CVS sur \mathbb{R} , alors sa somme est paire (rem. 6.4)
- 9 prouver que la convergence normale de $\sum f_n$ sur I implique sa convergence uniforme sur I (th. 6.2)
- 10 prouver le théorème d'interverson limite/intégrale si convergence uniforme sur segment (th. 6.8)

Prévision pour la prochaine semaine : révisions des suites et séries de fonctions et début des espaces préhilbertiens