DM 06 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025/2026 **pour le vendredi 12 décembre 2025**

Soit dans tout le sujet un réel strictement positif α.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par*

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha\left(1 + nx^2\right)}.$$

Là où c'est possible, on définit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

En cas de convergence, on note

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)}.$$

1 Modes de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$

1.1 Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Que dire de S ?

1.2 Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

1.3 Soit deux réels a et b tels que $0 < a < b$. Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

Y-a-t-il convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

1.4 On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, établir $|R_n(x)| \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|x|}{\sqrt{2n}\left(1 + kx^2\right)}$.

En déduire, si $a > 0$, que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge uniformément ni sur $[0; a]$, ni sur $[-a; a]$, ni sur $\mathbb{R}$.

2 Continuité et limites de S

2.1 Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, S est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2.2 Déterminer la limite et un équivalent de S en $\pm\infty$.

2.3 Montrer que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors S est continue sur $\mathbb{R}$.

2.4 Soit dans cette question $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, minorer $\sum_{n=1}^{p} u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$. La fonction S est-elle continue en 0 ?

2.5 Soit dans cette question $\alpha < \frac{1}{2}$. Soit $x \in]0; 1[$, déterminer l'unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{p+1}} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$.
Montrer que $\lim_{x\to 0^+} S(x) = +\infty$. Que vaut $\lim_{x\to 0^-} S(x)$?

3 Dérivabilité de S

3.1 Établir que $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3.2 Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si $\alpha > 1$.

3.3 Justifier que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in]0;1]$.

3.4 Pour $\alpha \in]0;1]$, montrer que S n'est pas dérivable en 0.

4 Équivalent en 0

4.1 Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0 si $\alpha > 1$.

4.2 Si $0 < \alpha \leqslant 1$, pour un réel $x > 0$, on définit $f_x : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_x(t) = \dfrac{x}{t^\alpha\left(1+tx^2\right)}$.

Montrer que f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ et justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t$.

4.3 Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, déterminer la valeur exacte de $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)$.

4.4 Si $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

4.5 Justifier l'existence de I_α pour $\alpha \in]0;1[$. Si $0 < \alpha < 1$, montrer que $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} I_\alpha\, x^{2\alpha-1}$.

On admet que $\forall \alpha \in]0;1[,\ \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}+t^{-\alpha}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

4.6 En déduire, toujours si $0 < \alpha < 1$, que $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\, x^{2\alpha-1}$.