TD 12 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 05 décembre 2025**

12.1 Soit $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(\theta) = e^{e^{i\theta}-i\theta} = e^{-i\theta}e^{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{in\theta}}{n!}$ car $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Ainsi, $f(\theta) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{i(n-1)\theta}}{n!}$. La fonction f est continue sur le segment $[0; 2\pi]$ donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}d\theta$ existe. De plus, en posant $f_n(\theta) = \dfrac{e^{i(n-1)\theta}}{n!}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement (donc uniformément) vers f sur $[0; 2\pi]$ car $||f_n||_{\infty,[0;2\pi]} = \dfrac{1}{n!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}$ converge.

D'après un théorème du cours, on peut intervertir $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta$. Or pour tout $n \neq 1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta = \left[\frac{e^{i(n-1)\theta}}{i(n-1)n!}\right]_0^{2\pi} = 0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = 2\pi$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}d\theta = 2\pi$.

12.2 **a.** • Si $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x = 0$, $u_n(x) = \ln(2)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge aussi grossièrement.

• Si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(e^{-x})^n$ converge (série géométrique avec $0 < e^{-x} < 1$) donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi le domaine de définition de f vaut $I = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$, comme u_n est décroissante et positive, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(a)$ converge d'après ce qui précède. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[a; +\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^* = I = \bigcup\limits_{a>0}[a; +\infty[$.

b. On a $u_0(x) = \ln(2)$ et $\forall n \geqslant 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur $[1; +\infty[$ et théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = \ln(2)$.

c. Les u_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, la fonction f est aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ par le théorème de la limite monotone. Supposons que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$, et soit un entier $n \in \mathbb{N}$, posons alors $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1 + e^{-kx})$, il vient donc $\lim\limits_{x\to 0^+} S_n(x) = (n+1)\ln(2)$. Comme toutes les u_k sont positives, $\forall x > 0,\ f(x) \geqslant S_n(x)$ (I) donc $\ell \geqslant (n+1)\ln(2)$ en passant à la limite dans (I) quand x tend vers 0 (elles existent). Il est impossible que cette inégalité soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, par l'absurde, on a montré que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Comme $f = \ln(2) + u_1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ et que u_1 est strictement décroissante, la fonction f est aussi strictement décroissante sur I car $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ est décroissante. D'après le théorème de la bijection, puisque f est continue sur I, on obtient donc $f(I) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right[=]\ln(2); +\infty[$.

12.3 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n =$ "$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$".

Initialisation : $u_1(x) = 1 + \int_0^x dt = x+1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x \leqslant \dfrac{x^{0+1}}{(0+1)!}$ et $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a donc $u_{n+2}(x) = 1 + \int_0^x u_{n+1}(t/2)dt$ et $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t/2)dt$ ce qui donne $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2))dt$ donc, comme $\forall t \in [0;x]$, $t/2 \in \mathbb{R}_+$, par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2) \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}0$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}dt = \dfrac{x^{n+2}}{2^{n+1}(n+2)!} \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$ car $2^{n+1} \geqslant 1$.

On conclut par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge absolument par le critère de d'Alembert ou car $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, la série télescopique à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}(x) - u_n(x))$ converge par comparaison. Par dualité suite-série, cela équivaut à la convergence de la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$. Ainsi, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction u.

b. Pour $a > 0$ et $x \in [0;a]$, $0 \leqslant u(x) - u_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}(x) - u_k(x)) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!} = R_{n,a}$.
Or $R_{n,a}$ est le reste d'ordre n d'une série convergente car $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a^n}{n!}$ converge et $e^a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$. Ainsi, on a $0 \leqslant ||u - u_n||_{\infty,[0;a]} \leqslant R_{n,a}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n,a} = 0$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u - u_n||_{\infty,[0;a]} = 0$ ce qui se traduit par la convergence uniforme de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers u sur le segment $[0;a]$.
Comme $a > 0$, $\left| \int_0^a u_n(t/2)dt - \int_0^a u(t/2)dt \right| = \left| \int_0^a \big(u_n(t/2) - u(t/2)\big)dt \right| \leqslant \int_0^a |u_n(t/2) - u(t/2)|dt$ par inégalité triangulaire, on a $\left| \int_0^a u_n(t/2)dt - \int_0^a u(t/2)dt \right| \leqslant \int_0^a ||u_n - u||_{\infty,[0;a]}dt = a||u_n - u||_{\infty,[0;a]}$ car $[0;a/2] \subset [0;a]$ donc, par encadrement, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a u_n(t/2)dt = \int_0^a u(t/2)dt$.

En passant à la limite (elles existent) quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1}(a) = 1 + \int_0^a u_n(t/2)dt$, on obtient $u(a) = 1 + \int_0^a u(t/2)dt$ donc u est solution de (E) car ceci est vrai pour tout $a > 0$ et aussi pour $a = 0$ car $u(0) = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0)$ puisqu'on a facilement $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(0) = 1$ par récurrence.
Soit v une autre fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui est solution de (E), alors la fonction $f = u - v$ vérifie $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \int_0^x f\left(\dfrac{t}{2}\right)dt$. On en déduit en dérivant par le théorème fondamental de l'intégration que $\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Par récurrence, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(k)}(x) = \dfrac{1}{2^{k-1}} f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$ (I).
Soit $a > 0$, la fonction f est continue sur le segment $[0;a]$ donc elle y est bornée, on peut donc définir le réel $M = ||f||_{\infty,[0;a]}$. Comme $u(0) = v(0) = 1$, on a $f(0) = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = 0$ d'après la relation (I) précédente. Par Taylor reste intégral, $\forall x \in [0;a],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} + \dfrac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.
Or d'après (I), $||f^{(n+1)}||_{\infty,[0,a]} \leqslant \dfrac{M}{2^n}$ car si $x \in [0;a]$, $\dfrac{x}{2^{n+1}} \in [0;a]$. Ainsi, par l'inégalité de la moyenne et puisque $(x-t)^n \geqslant 0$ dans l'intégrale précédente, on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{n!2^n}\int_0^x (x-t)^n dt = \dfrac{M}{(n+1)!2^n}$. Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ et $\forall x \in [0;a],\ f(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc $v = u$. Il y a donc une unique solution de l'équation (E) et c'est la fonction $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ de la question **a.**.

12.4 Pour tout l'exercice, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$. L'ensemble de définition sur $\mathbb{R}$ de f_n est $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{n} \right\}$.

a. • Si $x = 0$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ diverge grossièrement car $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| = 1$.

• S'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $x = -\dfrac{1}{p}$, $f_p(x)$ n'est pas défini donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x)$ non plus.

• Si $x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{ -\dfrac{1}{p} \;\middle|\; p \in \mathbb{N}^* \right\}$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alternée si $x > 0$ et elle l'est à partir d'un certain rang $n_0 = \left\lfloor -\dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1$ si $x < 0$. La suite $\left(\left| \dfrac{1}{1+nx} \right| \right)_{n \geqslant n_0}$ étant décroissante et tendant vers 0, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}^* \setminus \left\{ -\dfrac{1}{p} \;\middle|\; p \in \mathbb{N}^* \right\}$.

On pouvait aussi dire que $\dfrac{(-1)^n}{1+nx} = \dfrac{(-1)^n}{nx} \times \dfrac{1}{1+1/(nx)} \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{nx}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{nx} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $x \in D$. Or $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{nx}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{nx}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument par RIEMANN. Ainsi $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge par somme.

On vient de voir que $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur D. Il est clair que $||f_n||_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n}$ et, si $a > 0$, que $||f_n||_{\infty, [a;+\infty[} = ||f_n||_{\infty, [a;b]} = \dfrac{1}{1+na}$ si $b > a$ car $|f_n|$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, il n'y a pas convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ vers f ni sur $\mathbb{R}_+^*$, ni sur $[a;+\infty[$, ni sur $[a;b]$.

Intéressons-nous donc à la convergence uniforme, et tout d'abord sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a;+\infty[$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{1+kx}$. Alors $\left|R_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)x} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)a}$ toujours par le critère spécial. On a donc $||R_n||_{\infty, [a;+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers f sur $[a;+\infty[$. Comme chaque f_n est continue sur D, on en déduit d'après le cours que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $n \geqslant 1$ et $a < -\dfrac{1}{n}$, posons $g_n = f - \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} f_k$. Soit $x \in]-\infty; a[$, $\sum\limits_{k \geqslant n} f_k(x)$ est alternée et $\left(\left| \dfrac{1}{1+kx} \right| \right)_{k \geqslant n}$ décroît et tend vers 0 d'où, en posant $\overline{R_m}(x) = \sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a la majoration, pour tout entier $m \geqslant n$, $|\overline{R_m}(x)| = \left| \sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \left| \dfrac{1}{1+(m+1)x} \right| \leqslant \left| \dfrac{1}{1+(m+1)a} \right|$ dont on déduit la nouvelle majoration $||\overline{R_m}||_{\infty,]-\infty;a]} \leqslant \left| \dfrac{1}{1+(m+1)a} \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} f_k$ converge uniformément sur $]-\infty;a]$. Ainsi, g_n est continue sur $]-\infty;a]$ car les f_k) sont toutes continues si $k \geqslant n$. Par somme, $f = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k + g_n$ est continue sur $D \cap \left] -\infty; -\dfrac{1}{n} \right[$. Comme ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f est continue sur D.

b. Pour $n \geqslant 0$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{(1+nx)^2}$. Soit $x > 0$ et $g_x : t \mapsto \dfrac{t}{(1+tx)^2}$, alors g_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x'(t) = \dfrac{1-xt}{(1+xt)^3}$ donc g_x est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{x}; +\infty\right[$. Ainsi, la suite $(|f_n'(x)|)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et tend vers 0 si on pose $n_0 = \lfloor 1/x \rfloor + 1$. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n'(x)$ converge. Posons $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$. Soit $a > 0$ et $x \in [a;+\infty[$, si $n_0 \geqslant \dfrac{1}{a}$, alors $n_0 \geqslant \dfrac{1}{x}$ donc, comme g_x est décroissante sur $[n_0;+\infty[$, la suite $(|f_n'(x)|)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial, $|r_n(x)| \leqslant |f'_{n+1}(x)| = \dfrac{n}{(1+nx)^2} \leqslant \dfrac{n}{(1+na)^2}$. Ainsi, $||r_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \dfrac{n}{(1+na)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$: f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n}{(1+nx)^2}$.

c. On a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f sur $[1;+\infty[$ (par exemple), $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$ si $n \geqslant 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \ell_0 = 1$. Ainsi, par théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$. Pour $x > 0$, on a $f(x)-1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ et on conjecture (en négligeant les 1 du dénominateur) que $f(x)-1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(2)}{x}$ car il est classique que $\ln(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. On écrit donc, pour $x > 0$, $x(f(x)-1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x}{1+nx}$ et on pose, pour $n \geqslant 1$, $h_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x}{1+nx}$. La suite $(|h_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial, $|\widetilde{R_n}(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} h_k(x)\right| \leqslant |h_{n+1}(x)| = \dfrac{x}{1+(n+1)x} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, $||\widetilde{R_n}||_{\infty,[1;+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ sur $[1;+\infty[$. Pour $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Par double limite toujours, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(f(x)-1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ donc $f(x)-1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(2)}{x}$.

Si on veut un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$, on peut regrouper les termes deux par deux. Ainsi, on a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (f_{2n}(x) + f_{2n+1}(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2nx+1} - \dfrac{1}{(2n+1)x+1}\right)$. Pour $x > 0$, en définissant la fonction $g_x : u \mapsto \dfrac{x}{(2ux+1)\big((2u+1)x+1\big)} = \dfrac{1}{2ux+1} - \dfrac{1}{(2u+1)x+1}$, g_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} g_x(u)du \leqslant \dfrac{1}{2nx+1} - \dfrac{1}{(2n+1)x+1} = g_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(u)du$. Comme g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_x(n)$ converge, on somme ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}^*$ à droite et pour $n \in \mathbb{N}$ à gauche : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(u)du \leqslant f(x) \leqslant g_x(0) + \int_0^{+\infty} g_x(u)du$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(u)du = \left[\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{2ux+1}{2u+x+1}\right)\right]_0^{+\infty}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(u)du = \frac{\ln(1+x)}{2x}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(1+x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{\ln(1+x)}{2x}$.

12.5 **a.** Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

- Comme $f_0 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, f_0 n'est pas définie en -1, f non plus. Par contre, toutes les f_n sont définies sur $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 1$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^{2^n} \geqslant 1 > 0$. Le domaine de définition de f est donc inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Pour $|x| > 1$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{x^{2^n}} = \dfrac{2^n}{x}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ diverge grossièrement.
- Si $x = 1$, $f_n(x) = 2^{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ diverge grossièrement à nouveau.
- Si $x \in]-1;1[$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} 2^n x^{2^n-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ par croissances comparées car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 x^{n-1} = 0$ si $|x| < 1$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, par composition de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n x^{2^n-1} = 0$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ converge absolument par comparaison à la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ qui converge d'après le cours.

En conclusion, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-1;1[$.

b. Soit $x \in]-1;1[$. Effectuons une récurrence sur N.

Initialisation : $\forall x \in]-1;1[,\ \prod\limits_{n=0}^{0} (1+x^{2^n}) = 1+x$ et $\prod\limits_{n=0}^{1} (1+x^{2^n}) = (1+x)(1+x^2) = 1+x+x^2+x^3$.

Hérédité : soit $N \geqslant 1$ tel que $\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k$ (c'est donc vrai aux rangs $N=0$ et $N=1$). Alors $\prod_{n=0}^{N+1}(1+x^{2^n}) = \prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\Big) \times (1+x^{2^{N+1}}) = \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^{k+2^{N+1}}\Big)$ donc, en posant $j = k+2^{N+1}$ dans la seconde somme, $\prod_{n=0}^{N+1}(1+x^{2^n}) = \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\Big) + \Big(\sum_{k=2^{N+1}}^{2^{N+1}+2^{N+1}-1} x^j\Big) = \sum_{k=0}^{2^{N+2}-1} x^k$.

Par principe de récurrence, $\forall x \in]-1;1[$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k = \dfrac{1-x^{2^{N+1}}}{1-x}$ (formule classique).

c. Pour $x \in]-1;1[$, on a $\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \dfrac{1}{1-x}$ car $\lim_{N\to+\infty} x^{2^{N+1}} = 0$. Par continuité de $\ln$, tout étant strictement positif, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln(1+x^{2^n}) = -\ln(1-x)$, donc $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2^n}) = -\ln(1-x)$.

Posons donc $v_n(x) = \ln(1+x^{2^n})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1;1[$:

(H_1) On vient de voir que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge simplement vers $S : x \mapsto -\ln(1-x)$ sur $]-1;1[$.

(H_2) Toutes les fonctions v_n sont de classe C^1 sur $]-1;1[$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1;1[$, $v_n'(x) = \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}} = f_n(x)$. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a;a]$, alors $|v_n'(x)| \leqslant 2^n a^{2^n-1}$ car $1+x^{2^n} \geqslant 1$ donc $||v_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant 2^n a^{2^n-1}$ et on a vu à la question **a.** que $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a^{2^n-1}$ convergeait. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} v_n'$ converge normalement (v_0' est continue sur le segment $[-a;a]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes) sur tout segment de $]-1;1[$.

Par théorème, la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = -\ln(1-x)$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$ (ce qu'on savait déjà) et $\forall x \in]-1;1[$, $h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$.

On en déduit que $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = (-\ln(1-x))' = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

12.6 **a.** • Si $x \in]0;1[$ et $n \geqslant 2$, $\lim_{n\to+\infty} x^n \ln(n) = 0^+$ par croissances comparées donc, comme $\ln(x) < 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = -\infty$ et la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x = 1$, $u_n(1) = 0$ donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n(1)$ converge.

• Si $x > 1$, $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(x^{-n})$ donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi, l'ensemble de définition D de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ vaut $D = [1;+\infty[$.

b. Pour $n \geqslant 2$, u_n est positive et dérivable sur $[1;+\infty[$ et $u_n'(x) = \dfrac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)}$ donc u_n est croissante sur $[0;e^{1/n}]$ et décroissante sur $[e^{1/n};+\infty[$ ce qui montre que $|u_n = u_n$ est maximale en $e^{1/n}$ et on a $||u_n||_{\infty,D} = u_n(e^{1/n}) = \dfrac{1}{e n\ln(n)}$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur D et qu'une de ses primitives $x \mapsto \ln(\ln(x))$ admet une limite infinie en $+\infty$, la série de BERTRAND $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Soit $x \in]1;+\infty[$ et $n \geqslant 1$, alors $0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^k \ln(k+1)}$ et, pour tout entier $k \geqslant n$, $\ln(k+1) \geqslant \ln(n+1)$ donc on peut majorer $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1/x)^k = \dfrac{\ln(x)}{x-1} \times \dfrac{(1/x)^n}{\ln(n+1)}$.

Or $0 \leqslant (1/x)^n \leqslant 1$ et, comme $\forall x > 1,\ \ln(x) \leqslant x-1$, on a $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x-1} \leqslant 1$. Par conséquent, comme $R_n(1) = 0$, on a $\forall x \in D,\ \forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. On déduit de **c.** que $||R_n||_{\infty,D} \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,D} = 0$ par encadrement et $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément sur D donc, comme toutes les u_n sont continues sur D, S est continue sur D.

e. Pour $x > 1$, d'après la question précédente, $0 \leqslant S(x) = R_1(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x-1} \times \dfrac{(1/x)}{\ln(2)} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$ et S est continue sur D. Ainsi, la fonction S est intégrable sur D par comparaison à une intégrale de RIEMANN.

12.7 **a.** Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- (H_1) Soit $x > 0$, alors $u_n(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN. Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement vers S sur I.
- (H_2) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur I et $u_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$ après simplification.
- (H_3) Ainsi, u_n' est décroissante et positive, donc bornée sur I pour $n \geqslant 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} u_n'(x) = \dfrac{1}{n^2}$ et on a $\forall x > 0,\ 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ de sorte que $||u_n'||_{\infty,I} = \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} u_n'(x)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n'||_{\infty,I}$ converge et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur I.

Par le fameux théorème, $S - u_0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur I donc S l'est aussi par somme car u_0 est C^1 sur I. De plus, $\forall x > 0,\ S'(x) = u_0'(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$ car $u_0'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ puisque $u_0(x) = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$.
On pouvait utiliser le théorème sur tout segment de I car si $[a;b] \subset I$, on a a $\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n'||_{\infty,[a;b]} = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+a)^2}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur tout segment de I. On a alors directement la conclusion que S est de classe C^1 sur I et que $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

b. Pour $x \in I$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{n+x-(n+1)}{(n+1)(n+x)} = \dfrac{x-1}{(n+1)(n+x)} = u_n(x)$. Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+p}\Big) = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dfrac{1}{j} - \sum\limits_{j=n+2}^{n+p} \dfrac{1}{j}$ par télescopage ou changement d'indice dans les deux sommes. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S(p) = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dfrac{1}{j}$.

c. Par comparaison série-intégrale, on montre très classiquement que $S(p) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Or on a vu en **a.** que S est croissante donc, si $p \leqslant x < p+1$ (ce qui caractérise $p = \lfloor x \rfloor$), alors $S(p) \leqslant S(x) \leqslant S(p+1)$. Comme $S(p) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$ et $S(p+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p+1) = \ln(p) + \ln\Big(1 + \dfrac{1}{p}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$, par encadrement, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Or, par croissance de $\ln$, $\ln(p) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(p+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$ donc $\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Ainsi, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

12.8 **a.** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{sh}\,(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\mathrm{sh}\,(x) \underset{0}{\sim} x$ et on a $\mathrm{sh}\,(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées ce qui montre que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, I existe.
Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}\,(x)} = \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = 2xe^{-x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}$ car $0 < e^{-2x} < 1$

(série géométrique). Soit, pour $n \geqslant 0$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 2xe^{-(2n+1)x}$.

(H_1) $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on en vient).

(H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto 2x$ et $v : x \mapsto -\dfrac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)v(x) = u(0)v(0) = 0$, comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \Big[-2\frac{e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^2}$ converge par RIEMANN.

Par théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et on a la valeur de I car $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

b. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Or $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\,\text{pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\,\text{impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{S_n}{4} + T_n$. Ainsi, $T_n = S_{2n+1} - \dfrac{S_n}{4}$ admet une limite finie en $+\infty$ (on le savait déjà) qui vaut $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$. Avec la question précédente, $I = \dfrac{\pi^2}{4} \sim 2,47$.

12.9 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{e^{-nt}}{n^2 + t^2}$. Traitons deux cas :

- si $t < 0$, comme $n^2 \underset{+\infty}{=} o(e^{-nt})$ par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(t) = +\infty$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(t)$ diverge.
- si $t \geqslant 0$, $e^{-nt} \underset{+\infty}{=} O(1)$ donc $u_n(t) \underset{+\infty}{\sim} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(t)$ converge par comparaison à RIEMANN.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc u_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on a $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = u_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, d'après le cours, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} u_n(t) = \ell_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

Comme $u_{n+1}(t) \underset{+\infty}{=} o(u_n(t))$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut conjecturer que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} u_1(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-t}}{t^2}$.
Posons $g(t) = \dfrac{f(t)}{u_1(t)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+t^2}{n^2+t^2} e^{-(n-1)t}$ de sorte que $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = \dfrac{1+t^2}{n^2+t^2} e^{-(n-1)t}$.
La fonction $g_1 : t \mapsto 1$ est bornée sur $[1; +\infty[$ avec $||g_1||_{\infty,[1;+\infty[} = 1 = e^{-(1-1)}$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $|g_n(t)| = g_n(t) \leqslant e^{-(n-1)t} \leqslant e^{-(n-1)}$ donc g_n est bornée sur $[1; +\infty[$ et $||g_n||_{\infty,[1;+\infty[} \leqslant e^{-(n-1)}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} e^{-(n-1)}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{t \to +\infty} g_1(t) = 1 = \ell'_1$ et, pour $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{t \to +\infty} g_n(t) = 0 = \ell'_n$. Par le théorème de double limite à nouveau, $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ell'_n = 1$. On a donc bien $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{u_1(t)} = 1$ donc $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-t}}{t^2}$.

$\boxed{12.10}$ **a.** • Pour $x=0$, $u_n(0)=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge et $S(0)=0$.

• Si $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Par conséquent, la fonction somme S est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, comme toutes les fonctions u_n sont impaires, on en déduit (par convergence simple) que S est aussi impaire.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, après calculs, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$ donc u_n est décroissante sur $]-\infty;n]$ et $[n;+\infty[$ et croissante sur $[-n;n]$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u_n(x)=0$, le tableau de variations de u_n montre que $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |u_n(-n)| = u_n(n) = \dfrac{1}{2n}$. Ainsi, la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge et il n'y a pas converge normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

c. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(H_2) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après **a.**.

(H_3) Soit $a>0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a;a]$, $|u_n'(x)| = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2} \leqslant \dfrac{n^2+x^2}{(x^2+n^2)^2} = \dfrac{1}{(x^2+n^2)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ par inégalité triangulaire donc $||u_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n'||_{\infty,[-a;a]}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par le théorème évoqué ci-dessus, S est de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$.

d. Comme $S(0)=0$ et $S'(0)=\dfrac{\pi^2}{6}$ d'après la question précédente, puisque S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a $S(x) \underset{0}{=} S(0) + xS'(0) + o(x)$ par le théorème de TAYLOR-YOUNG. On a donc $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2 x}{6}$.

Pour être plus précis, pour $x \in \mathbb{R}$, $\left|S(x) - \dfrac{\pi^2 x}{6}\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+n^2} - \dfrac{x}{n^2}\right)\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^3}{n^2(x^2+n^2)}\right|$ donc on a $|S(x)| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|^3}{n^2(x^2+n^2)} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|^3}{n^4} = \zeta(4)|x|^3 = \dfrac{\pi^4|x|^3}{90}$ ce qui prouve que $S(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi^2 x}{6} + O(x^3)$ ce qui montre que $S(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi^2 x}{6} + o(x)$ et, à nouveau, $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2 x}{6}$.

e. On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $x>0$ fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k) = u_k(x) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi_x(t)dt$. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)dt$ donc $\left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} = \left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après la question précédente, on n'a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ vers f sur $\mathbb{R}$ (ni sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ pour la même raison).

12.11 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, comme $\ln(1+nx^2) = \ln(n)+\ln\left(x^2+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} O(1)$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc, par comparaison à une série de RIEMANN convergente car $\frac{3}{2} > 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument donc converge. Ainsi, S est définie sur $\mathbb{R}$.

Toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par opérations. De plus, pour $a > 0$, comme u_n est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x \in [-a;a]$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$ donc $||u_n||_{\infty,[-a;a]} = u_n(a)$ et on vient de voir en **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(a)$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, ce qui assure, d'après le cours, la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

b. Les fonctions u_n tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc ne sont même pas bornées sur $\mathbb{R}$. On n'a donc pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

c. Toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \frac{2x}{n(1+nx^2)}$ et on se rappelle que $2ab \leqslant a^2 + b^2$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ donc $1 + nx^2 \geqslant 2\sqrt{n}|x|$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $0 \leqslant |u_n'(x)| \leqslant \frac{2|x|}{2n\sqrt{n}|x|} = \frac{1}{n^{3/2}}$ donc $||u_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$ et, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On pouvait bien sûr dériver u_n' pour en faire son tableau de variations. Ainsi, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d. $S(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $u_n(x) \geqslant \frac{\ln(nx^2)}{n^2} = \frac{2\ln(x)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}$ (1). Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge car $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, en notant $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$, on obtient en sommant les inégalités (1) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S(x) \geqslant \frac{\pi^2 \ln(x)}{3} + A$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

e. On vient de voir que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n(1+nx^2)} = 2x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$. Soit $x > 0$, on définit $g_x : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $g_x(t) = \frac{1}{t(1+tx^2)}$. Alors g_x est continue sur $[1;+\infty[$ et y est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_x(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n)$ (2). Comme $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$, par comparaison à une intégrale de RIEMANN convergente, g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$. En sommant (1) pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient $2x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_x(n+1) = S'(x) - 2xg_x(1) = S'(x) - \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 2x\int_1^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant S'(x) = 2x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_x(n)$ (tout converge). Comme $g_x(t) = \frac{1+tx^2-tx^2}{t(1+tx^2)} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$, $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt = \Big[\ln(t) - \ln(1+tx^2)\Big]_1^{+\infty}$ donc $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt = \left[\ln\left(\frac{t}{1+tx^2}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x^2) - 2\ln(x)$. En réorganisant les termes, on arrive à l'encadrement $2x\ln(1+x^2) - 4x\ln(x) \leqslant S'(x) \leqslant 2x\ln(1+x^2) - 4x\ln(x) + \frac{2x}{1+x^2}$. Or on a les équivalents $2x\ln(1+x^2) - 4x\ln(x) \underset{0^+}{\sim} -4x\ln(x)$ et $2x\ln(1+x^2) - 4x\ln(x) + \frac{2x}{1+x^2} \underset{0^+}{\sim} -4x\ln(x)$ donc, par encadrement, on obtient $S'(x) \underset{0^+}{\sim} -4x\ln(x)$. Ceci montre, par exemple, que S n'est pas deux fois dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{S'(x)-S'(0)}{x-0} = +\infty$ car $\frac{S'(x)-S'(0)}{x-0} \underset{0^+}{\sim} -4\ln(x)$ puisque $S'(0) = 0$.

Mathilde Arnaud I et Lucie Girard I (13,98 et 12,09)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. On définit aussi $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S et montrer que S est continue sur D.

b. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ sur D ?

c. Calculer $S'(x)$ pour x convenable.

d. En déduire une expression simple de $S(x)$ pour $x \in D$.

$\boxed{\textbf{12.12}}$ **a.** Le domaine de définition D de S vaut $D = \mathbb{R}_+$ car :

Si $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(0) = \dfrac{(-1)^n}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0.

Si $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx}) \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument par le critère de Riemann car $2 > 1$ ou par comparaison aux séries géométriques.

Si $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.

Pour $x \geqslant 0$, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et tend vers 0 donc, d'après le critère spécial des séries alternées, en posant les restes $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. La convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit d'après le cours que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Les fonctions u_n sont toutes dérivables sur D et on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D,\ u_n'(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx}$ donc $||u_n'||_{\infty,D} = |u_n'(0)| = 1$ et, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1$ diverge, on n'a pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ sur D. On n'a même pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ sur D car la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_un'(0)$ diverge grossièrement.

On ne peut donc pas conclure facilement que S est de classe C^1 sur D.

c. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$:

(H_1) On a vu en **a.** la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $D = \mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx}$.

(H_3) Soit $a > 0$ et $n \geqslant 1$, comme $|u_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $||u_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = |u_n'(a)| = e^{-na}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-na}$ converge (série géométrique avec $0 < e^{-a} < 1$) donc on a convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ sur $[a;+\infty[$ donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le fameux théorème, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}e^{-nx} = e^{-x}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(-e^{-x})^p$ donc $S'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \big(-\ln(1+e^{-x})\big)'$.

d. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe donc $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ S(x) = k - \ln(1+e^{-x})$. Pour déterminer la valeur de k, plutôt que d'évaluer en une valeur particulière de x, on va faire tendre x vers $+\infty$:

(H_1) D'après la question **b.**, on a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0 = \ell_n$.

Par théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(1+e^{-x}) = 0$, on en déduit que $k=0$ donc que $\forall x > 0,\ S(x) = -\ln(1+e^{-x})$.

Comme S est continue en 0 d'après **b.**, on a $S(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln(1+e^{-x})) = -\ln(2) = -\ln(1+e^{-0})$ donc on peut conclure que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = -\ln(-e^{-x})$.

On pouvait constater, ce qui rend ces dernières questions inutiles, que si $x > 0$, on a $-e^{-x} \in]-1;1[$ donc, comme on reconnaît le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ qui est de rayon de convergence 1, on a directement $\ln(1+e^{-x}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(e^{-x})^n}{n} = -S(x)$.

$\boxed{\textbf{12.13}}$ **a.** • S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = -\dfrac{1}{n}$, f_n n'est pas définie en x donc f ne peut pas l'être non plus.

• Si $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique diverge donc f n'est pas définie en 0.

• Pour $x \in D = \mathbb{R}^* \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left\{ -\dfrac{1}{n} \right\}$, $f_n(x)$ est bien défini pour tout entier n et $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN ($2 > 1$).

Par conséquent, le domaine de définition de f est exactement $D = \mathbb{R}^* \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left\{ -\dfrac{1}{n} \right\}$.

Les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f aussi (la convergence simple suffit). En effet, si $0 < x \leqslant y$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) \geqslant f_k(y)$, en sommant, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(y) = S_n(y)$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ (les limites existent), on a donc $f(x) \geqslant f(y)$.

Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^* \subset D$.

(H_2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonctions f_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall x > 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{1}{(1+nx)^2}$.

(H_2) Soit $a > 0$, comme $|f_n'|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{1}{(1+na)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2a^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le cours, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+nx)^2} < 0$ et on retrouve le fait que f est décroissante (et même strictement) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $x > 0$, $\left| f(x) - \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \right| = \left| \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2x+n} - \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \right| = \left| \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2x+n} - \dfrac{1}{n^2x} \right) \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(n^2x+n)n^2x}$ et, comme $n^2x \geqslant 0$, $\left| f(x) - \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(nx+1)n^2x} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3x^2} = \dfrac{\zeta(3)}{x^2} = \dfrac{a}{x^2}$ en posant $a = \zeta(3) \sim 1,2$.

c. On vient de voir que $f(x) - \dfrac{\zeta(2)}{x} = f(x) - \dfrac{\pi^2}{6x} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ce qui montre que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

d. Pour $x > 0$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_x(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k)$ par comparaison série-intégrale. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ ($f(x)$ existe et φ_x est continue sur $[1;+\infty[$ et $\varphi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xt^2}$ donc φ_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_x(k+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)-\varphi_x(1)\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+tx)}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_x(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ donc on a l'encadrement $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+tx)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1+x}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+tx)}$. Or $\frac{1}{t(1+tx)}=\frac{1+tx-tx}{t(1+tx)}=\frac{1}{t}-\frac{x}{1+tx}$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+tx)}=\Big[\ln(t)-\ln(1+tx)\Big]_1^{+\infty}=\ln(1+x)-\ln(x)$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{t}{1+tx}\right)=-\ln(x)$ donc on a l'encadrement $\ln(1+x)-\ln(x)\leqslant f(x)\leqslant\ln(1+x)-\ln(x)+\frac{1}{1+x}$ qui donne $f(x)\underset{0}{\sim}-\ln(x)$ par le théorème des gendarmes car $\ln(1+x)-\ln(x)\underset{0}{\sim}\ln(1+x)-\ln(x)+\frac{1}{1+x}\underset{0}{\sim}-\ln(x)$.

$\boxed{\textbf{12.14}}$ **a.** Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=\frac{1}{n!(x+n)}$ est bien défini car $x+n>0$. Comme $f_n(x)\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{n!}\Big)$ et que la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant0}\frac{1}{n!}$ converge, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant0}f_n(x)$ converge donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 1 : pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, $0\leqslant f_n(x)\leqslant\lim\limits_{t\to0^+}f_n(t)=\frac{1}{n.n!}$ car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=\frac{1}{n.n!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{1}{n.n!}$ converge car $\frac{1}{n.n!}\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{n!}\Big)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci assure, par théorème de continuité des séries de fonctions, puisque toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, que la fonction $f-f_0=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais $f_0:x\mapsto\frac{1}{x}$ est elle-même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par somme, $f=f_0+(f-f_0)=f_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : soit $a>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme f_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[}=f_n(a)$ et $\sum\limits_{n\geqslant0}f_n(a)$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant0}f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Puisque toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $x>0$, $g(x)=xf(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{n!(x+n)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}g_n(x)$ avec $g_n(x)=\frac{x}{n!(x+n)}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, g_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)=\frac{1}{n!}=\ell_n$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant0}\frac{1}{n!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant0}g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème de la double limite, comme g_n admet une limite finie $\ell_n=\frac{1}{n!}$ en $+\infty$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$. Ainsi, $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e}{x}$.

On écrit, pour $x>0$, $h(x)=x^2\Big(f(x)-\frac{e}{x}\Big)=x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n!(x+n)}-\frac{1}{n!x}\Big)$ donc $h(x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^2}{n!(x+n)x}$. Posons $h_n(x)=\frac{nx^2}{n!(x+n)x}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, comme $0\leqslant h_n(x)=\frac{nx}{n!(x+n)}=\frac{n}{n!(1+(n/x))}\leqslant\frac{n}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}$, on a $||h_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}\leqslant\frac{1}{(n-1)!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{1}{(n-1)!}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant1}h_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}=\ell'_n$, par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ell'_n=-\frac{1}{e}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\Big(f(x)-\frac{e}{x}\Big)=-\frac{1}{e}$ donc $x^2\Big(f(x)-\frac{e}{x}\Big)\underset{+\infty}{=}-\frac{1}{e}+o(1)$ ou encore $f(x)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{ex}-\frac{1}{ex^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$.

Plus simplement, $\Big|f(x)-\frac{1}{ex}+\frac{1}{ex^2}\Big|=\Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(x+n)}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!x}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!x^2}\Big|=\Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^2-x(x+n)+n(x+n)}{n!(x+n)x^2}\Big|$ et on a donc $\Big|f(x)-\frac{1}{ex}+\frac{1}{ex^2}\Big|=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!(x+n)x^2}\leqslant\frac{1}{x^3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}$ donc on a mieux qu'avec la méthode précédente puisqu'on peut conclure que $f(x)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{ex}-\frac{1}{ex^2}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)$.