CHAPITRE 8
INTÉGRALES À PARAMÈTRE

$\odot$ Nous entrons dans le champ des transformées de fonctions. Une transformée est une opération consistant à associer à une fonction appartenant à un espace fonctionnel une nouvelle fonction, la plupart du temps définie de manière intégrale, et appartenant à un espace fonctionnel potentiellement différent. Une transformation est donnée en général par $T : f \mapsto \left(T(f) : u \mapsto \int_I f(t)K(u,t)dt\right)$ où K est appelé le noyau de la transformation T sur un intervalle temporel I (sous réserve de convergence).

Au début du XIX^e siècle, Fourier montre que toute fonction périodique peut se décomposer comme somme d'une série de fonctions $t \mapsto \cos(kt)$ et $t \mapsto \sin(kt)$ (les harmoniques), il utilise cette décomposition pour étudier les solutions de l'équation de la chaleur. Mais il généralise cette propriété à toute fonction non périodique par la transformée de Fourier à valeurs réelles ou complexes dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation : cette transformation permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel (spectre).

La transformation de Laplace généralise la transformation de Fourier ; elle est utilisée pour résoudre les équations différentielles. Contrairement à cette dernière, elle tient compte des conditions initiales et peut ainsi être utilisée en théorie des vibrations mécaniques ou en électricité dans l'étude des régimes forcés sans négliger le régime transitoire. Elle est très utilisée en automatique.

Il y a beaucoup d'autres transformations intégrales, par exemple et de manière non exhaustive, celles de Mellin, de Hankel, de Stieltjes, de Hilbert, de Weierstass....

Ces transformations sont d'autant plus intéressantes qu'elles sont bijectives et qu'on a une expression exploitable de la transformation inverse. Ce faisant, le travail sur les fonctions transformées peut donc donner en retour des informations sur le signal originel : par exemple, la résolution d'équations différentielles linéaires par la transformée de Laplace qui ramène cette résolution à une équation algébrique.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

Dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

1 : Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de continuité :	
si A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction définie sur* $A \times I$, *telle que :* *- pour tout* $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* A *;* *- pour tout* $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;* *- il existe une fonction* φ *intégrable sur* I, *telle que pour tout* $(x,t) \in A \times I$, *on ait* $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$ *;* *alors la fonction* $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ *est définie et continue sur* A.	*En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de* A, *ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.*
Théorème de convergence dominée à paramètre continu :	
si A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$, a *une borne de* A *et* f *une fonction définie sur* $A \times I$ *telle que :* *- pour tout* $t \in I$, $f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$ *;* *- pour tout* $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *et* $t \mapsto \ell(t)$ *sont continues par morceaux sur* I *;* *- il existe une fonction* φ *intégrable sur* I, *telle que pour tout* $(x,t) \in A \times I$, *on ait* $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$ *;* *alors* ℓ *est intégrable sur* I *et* $\int_I f(x,t)\,dt \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\,dt$.	*On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*
Théorème de dérivation :	
si A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction définie sur* $A \times I$, *telle que :* *- pour tout* $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* C^1 *sur* A *;* *- pour tout* $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* I *;* *- pour tout* $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;* *- il existe une fonction* φ *intégrable sur* I, *telle que pour tout* $(x,t) \in A \times I$, *on ait* $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\rvert \leqslant \varphi(t)$ *;* *alors la fonction* $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ *est de classe* C^1 *sur* A *et vérifie* $\forall x \in A,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.	*La démonstration n'est pas exigible.* *En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de* A, *ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.*
Extension à la classe C^k *d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de* $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *et d'intégrabilité des* $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *pour* $0 \leqslant j < k$.	
	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.

PARTIE 8.1 : CONTINUITÉ DES INTÉGRALES À PARAMÈTRE

8.1.1 : Version universelle

On note I et J deux "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$; c'est-à-dire qu'ils contiennent au moins deux réels distincts.

THÉORÈME DE CONTINUITÉ SOUS LE SIGNE SOMME (ÉNORME) 8.1 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :
- (H_1) **pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux,**
- (H_3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ **continue par morceaux, intégrable sur J avec $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

<u>EXEMPLE 8.1</u> : *Prenons ici $I = \mathbb{R}$, $J =]0;1]$ et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}$.*
Les hypothèses (H_1) et (H_2) sont clairement vérifiées. (H_3) l'est-elle ?

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 8.1</u> : • *On remarque encore que (H_3) entraîne l'intégrabilité dans (H_2).*
• *Si les intervalles I et J sont des segments et si f est une fonction continue (de deux variables) sur $I \times J$, on verra que les fonctions "partielles" des hypothèses (H_1) et (H_2) sont continues et que f est bornée (par M) sur $I \times J$ donc on peut choisir $\varphi(t) = M$ ci-dessus.*

<u>EXERCICE 8.2</u> : *Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}dt$. Donner l'ensemble de définition D de g et montrer que g est continue sur D.*

8.1.2 : Version "sur tout segment"

THÉORÈME DE CONTINUITÉ SOUS LE SIGNE SOMME (VERSION SUR TOUS LES SEGMENTS) (ÉNORME) 8.2 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :
- (H_1) **pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,**
- (H_3) **pour tout segment $[a;b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in [a;b] \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$.**

Alors la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

<u>REMARQUE 8.2</u> : • *La fonction $\varphi_{a,b}$ peut dépendre de a et b mais elle doit être <u>indépendante de x</u>.*
• *Dans le théorème ci-dessus, on n'est pas obligé de considérer des segments, si par exemple on prouve que f est continue sur tous les intervalles de la forme $[a;+\infty[$ pour $a > 0$ (le problème se trouvant dans ce cas au voisinage de 0), alors on conclura tout de même à la continuité de g sur $\mathbb{R}_+^*$.*

<u>EXERCICE 8.3</u> : *Justifier que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$ converge pour tout $x > 0$ et que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $g(x) + g(x+1)$ pour $x > 0$ et en déduire un équivalent de g en 0^+ et en $+\infty$.*

8.1.3 : Version "limite"

THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE À PARAMÈTRE CONT. (ÉNORME) 8.3 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ et a une borne de I ($a = \pm\infty$ est possible) telles que :

(H1) **il existe $h : J \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $t \in J$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = h(t)$,**

(H2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J, h aussi**

(H3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ cont. par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors h est intégrable sur J et la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ admet une limite en a qui est donnée par la relation $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \int_J h$.

EXEMPLE 8.4 *: Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 e^{t^x}}$.

PARTIE 8.2 : DÉRIVATION DES INTÉGRALES À PARAMÈTRE

8.2.1 : Version universelle

THÉORÈME DE DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME (ÉNORME) 8.4 :

Soit I et J des intervalles et $f : I \times J \to \mathbb{K}$ telle que

(H_1) **pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I,**

(H_2) **pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur J et $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J,**

(H_3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors :

(R_1) **La fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I.**

(R_2) $\forall x \in I$, $g'(x) = \int_J \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ **(formule de LEIBNIZ).**

DÉMONSTRATION : Non exigible.

REMARQUE 8.3 : Souvent, l'étude de la monotonie de g ne nécessite pas l'utilisation de ce théorème.

EXEMPLE 8.5 *: Justifier que* $g : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

ORAL BLANC 8.6 *: Montrer l'existence et trouver une expression simple de* $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

8.2.2 : Version "sur tout segment"

THÉORÈME DE DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME (VERSION SUR TOUS LES SEGMENTS) (ÉNORME) 8.5 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

(H_1) **pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I,**

(H_2) **pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur J et $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J,**

(H_3) **pour tout segment $[a;b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in [a;b] \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$.**

Alors :

(R_1) **La fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur I.**

(R_2) $\forall x \in I,\ g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ **(formule de Leibniz).**

EXERCICE 8.7 *: Ensemble de définition, dérivée et valeur de* $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}dt$.

THÉORÈME 8.6 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

(H_1) $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ **est de classe C^n sur I,**

(H_2) $\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ \forall x \in I,\ t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ **est continue par morceaux et intégrable sur J,**

(H_3) $\forall x \in I,\ t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ **est continue par morceaux et intégrable sur J,**

(H_4) $\forall [a;b] \subset I$, **il existe une fonction $\exists \varphi_{a,b,n} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in [a;b] \times J,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b,n}(t)$.**

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est C^n sur I et $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \forall x \in I,\ g^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.

Démonstration : Non exigible.

REMARQUE 8.4 : Pour montrer qu'une fonction g comme dans le théorème précédent est de classe C^∞, il s'agit de montrer qu'elle est de classe C^n pour tout n donc il convient de dominer toutes les dérivées partielles de f (ou en tous cas une infinité).

EXEMPLE FONDAMENTAL 8.8 *: Soit Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$:*

- *Γ (appelée fonction "Gamma" d'Euler) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *Γ est de classe C^∞ sur son ensemble de définition.*
- *$\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.*
- *$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.*

EN PRATIQUE : Pour étudier une fonction définie par $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ *:*

- *On identifie l'intervalle* J *(on inclut ou pas les bornes* a *ou* b*).*
- *On vérifie que* $t \mapsto f(x,t)$ *est bien continue par morceaux et on détermine l'ensemble de définition de* g *qu'on décompose en intervalles* I*.*
- *On traite si possible élémentairement la parité, monotonie, limite aux bornes....*
- *On montre l'aspect* C^0 *de* g *avec le théorème ad-hoc éventuellement sur tout segment.*
- *On montre l'aspect* C^1 *de* g *avec le théorème ad-hoc éventuellement sur tout segment.*
- *Pour obtenir une nouvelle expression de* $g(x)$ *(sans intégrale), on peut utiliser la formule de* LEIBNIZ *pour établir une équation différentielle vérifiée par* g *qu'on intègre.*

EXERCICE CONCOURS 8.9 **:** *Mines PSI 2015 Arthur Lacombe*

On définit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)dt}{1+t^2}$ *et, pour* $x \in [0;1]$*, on pose* $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)dt}{1+t^2}$.

a. *Expliciter* $g(x)$ *et en déduire la valeur de* I*.*

b. *Par un changement de variable dans* I*, retrouver le résultat.*

COMPÉTENCES

- *reconnaître le cadre de la continuité ou la dérivabilité sous le signe somme quand* $g(x) = \int_I f(x,t)dt$.
- *énoncer une à une toutes les hypothèses de ces théorèmes lors de leurs utilisations.*
- *dominer* $|f(x,t)|$ *ou* $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|$ *par une fonction intégrable sur* I *et* *indépendante de* x.