CHAPITRE 8
INTÉGRALES À PARAMÈTRE

THÉORÈME ÉNORME 8.1 :
Continuité "sous le signe somme" : soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H_1) **pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,**
- (H_3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, intégrable sur J avec $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

THÉORÈME ÉNORME 8.2 :
Continuité "sous le signe somme" : soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H_1) **pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,**
- (H_3) **pour tout segment $[a;b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in [a;b] \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$.**

Alors la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

THÉORÈME ÉNORME 8.3 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ et a une borne de I ($a = \pm\infty$ est possible) telles que :

- (H_1) **il existe $h : J \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $t \in J$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = h(t)$,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ et h sont continues par morceaux sur J,**
- (H_3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ cont. par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors h est intégrable sur J et la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ admet une limite en a qui est donnée par la relation $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \int_J h$ (TCD à paramètre continu).

THÉORÈME ÉNORME 8.4 :
Dérivation "sous le signe somme" : soit I et J des intervalles et $f : I \times J \to \mathbb{K}$ telle que :

- (H_1) **pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I,**
- (H_2) **$\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morc. sur J et $t \mapsto f(x,t)$ y est intégrable,**
- (H_3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est C^1 sur I et $\forall x \in I,\ g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ (Leibniz).

THÉORÈME ÉNORME 8.5 :
Dérivation "sous le signe somme" : soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

(H_1) **$\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I,**

(H_2) **$\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morc. sur J et $t \mapsto f(x,t)$ y est intégrable,**

(H_3) **pour tout segment $[a;b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in [a;b] \times J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$.**

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ (LEIBNIZ).

PROPOSITION 8.6 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

- **$\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^n sur I.**
- **$\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.**
- **$\forall [a;b] \subset I$, il existe une fonction $\exists \varphi_{a,b,n} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in [a;b] \times J$, $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b,n}(t)$.**

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est C^n sur I et $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\forall x \in I$, $g^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.

REMARQUE 8.1 : Pour montrer que g est de classe C^∞, on montre qu'elle est C^n pour tout $n \geqslant 1$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 8.1 : Soit Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$:

- Γ (fonction "Gamma" d'EULER) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et de classe C^∞ sur son ensemble de définition.
- $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

EN PRATIQUE : Pour étudier une fonction définie par $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$:

- *On identifie l'intervalle J (on inclut ou pas les bornes a ou b).*
- *On vérifie que $t \mapsto f(x,t)$ est bien continue par morceaux et on détermine l'ensemble de définition de g qu'on décompose en intervalles I.*
- *On traite si possible élémentairement la parité, monotonie, limite aux bornes....*
- *On montre l'aspect C^0 de g avec le théorème ad hoc éventuellement sur tout segment.*
- *On montre l'aspect C^1 de g avec le théorème ad hoc éventuellement sur tout segment.*
- *Pour obtenir une nouvelle expression de $g(x)$ (sans intégrale), on peut utiliser la formule de* LEIBNIZ *pour établir une équation différentielle vérifiée par g qu'on intègre.*