DEVOIR 12 : SERIES RÉDUITES

PSI 1 2025-2026 **mardi 02 décembre 2025**

QCM

1 *CNS de diagonalisabilité : soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$

1.1 u DZ $\Longleftrightarrow 3u$ DZ

1.2 u DZ $\Longrightarrow \chi_u$ est SARS

1.3 u DZ $\Longleftrightarrow (\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u))$

1.4 u DZ $\Longleftrightarrow$ (il existe une famille libre de E composée de vecteurs propres de u)

2 *Suites de fonctions : soit* I *un intervalle réel,* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$

2.1 $f_n \xrightarrow{CVS} f \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \geqslant 0,\ \forall x \in I,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

2.2 $f_n \xrightarrow{CVS} f \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

2.3 $f_n \xrightarrow{CVU} f \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

2.4 $f_n \xrightarrow{CVU} f \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

3 *Suites de fonctions : soit la fonction* $f : [0;\pi[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 0$ *si* $x \in]0;\pi[$ *et* $f(0) = 1$ *puis, pour* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $f_n : [0;\pi[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = (\cos(x))^n$ *;* 0 *représente la fonction nulle*

3.1 $f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur $[0;\pi[$

3.2 $f_n \xrightarrow{CVS} 0$ sur $[0;\pi[$

3.3 $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $]0;\pi[$

3.4 $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[a;\pi[$ si $a \in]0;\pi[$

4 *Séries de fonctions : soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement vers* S *sur* $\mathbb{R}$

4.1 $(\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est bornée$) \Longrightarrow S$ est bornée

4.2 $(\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue$) \Longrightarrow S$ est continue

4.3 $(\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est paire$) \Longrightarrow S$ est paire

4.4 (les f_n sont 2π-périodiques) $\Longrightarrow S$ est 2π-périodique

Énoncé Donner (précisément) le théorème de convergence dominée.

Preuve Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes qui converge simplement sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est croissante.

Exercice 1 On pose $u_n(x) = \dfrac{nx}{1+(nx)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$. Indication: considérer $u_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

c. Étudier la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2 Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

DEVOIR 12 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 12	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X		
2		X	X	X	
3	X				
4			X	X	

1.1 Vrai : une base de vecteurs propres de u en est aussi une pour $3u$ (avec des valeurs propres triples) **1.2** Faux : $u = id_E$ est DZ alors que $\chi_u = (X-1)^n$ n'est pas scindé à racines simples **1.3** Vrai : χ_u est scindé car le corps est $\mathbb{C}$ et c'est du cours **1.4** Faux : $u(x,y) = (y,0)$ alors $u^2 = 0$ donc 0 est la seule valeur propre de u alors que $u \neq 0$ donc u n'est pas DZ, mais $\big((1,0)\big)$ est une famille libre de vecteur propre de u.
2.1 Faux : pour $\varepsilon = 0$, toutes les suites $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ seraient stationnaires **2.2** et **2.3** et **2.4** Vrais : cours.
3.1 Vrai : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ si $x \in]0;\pi[$ car $|\cos(x)| < 1$ **3.2** Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$ **3.3** Faux : $||f_n||_{\infty,]0;\pi[} = 1 \not\to 0$ **3.4** Faux : $||f_n||_{\infty,[a;\pi[} = \lim\limits_{x\to\pi} |\cos(x)|^n = 1 \not\to 0$.

4.1 Faux : $f_n(x) = n$ si $x \in [n;n+1[$ et $f_n(x) = 0$ sinon, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est la fonction partie entière non bornée **4.2** Faux : $f_n(x) = x^n$ sur $[0;1]$ (classique) **4.3** Vrai : cours **4.4** Vrai : cours.

Énoncé Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

(H_1) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,
(H_2) les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur I,
(H_3) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leqslant \varphi$.

Alors : (R_1) Les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et (R_2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Preuve Pour $(x,y) \in I^2$ et $n \in \mathbb{N}$, si $x \leqslant y$, comme f_n est croissante, on a $f_n(x) \leqslant f_n(y)$. Or on sait par hypothèse que les deux suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent par la convergence simple sur I de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \leqslant f(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$ ce qui prouve que f est croissante sur I.

Exercice 1 **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ et car $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$ si $x > 0$.
b. $||u_n||_\infty \geqslant u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc $(||u_n||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
c. Comme $u_n'(x) = \dfrac{n(1-(nx)^2)}{(1+(nx)^2)^2}$, u_n est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{n};+\infty\right[$, donc en fait $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$. Si $a > 0$, à partir d'un certain rang (dès que $\dfrac{1}{n} < a$), la fonction u_n sera décroissante et positive sur $[a;+\infty[$ donc $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a) = \dfrac{na}{1+(na)^2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{na}{1+(na)^2} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = 0$ et il y a convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 sur $[a;+\infty[$.

Exercice 2 On pose, pour $n \geqslant 0$, $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(t) = f(t^n)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ si $t \in [0;1[$:
(H_1) : $f_n \xrightarrow{CVS} g$ telle que $g(t) = f(0)$ si $t \in [0;1[$ (f est continue en 0) et $g(1) = f(1)$.
(H_2) : les fonctions f_n et la fonction g sont continues par morceaux sur le segment $[0;1]$.
(H_3) : comme f est continue sur un segment, elle est bornée et il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0;1]$, $|f(t)| \leqslant M$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $|f_n(t)| \leqslant M$ avec $\varphi : t \mapsto M$ qui est intégrable sur $[0;1]$.
Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = \int_0^1 g(t)dt = f(0)$.