DEVOIR 13 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025-2026 **mardi 09 décembre 2025**

QCM

1 *Convergence dominée : soit pour* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* $f_n : [0;\pi/2] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = (n+1)\cos(x)(\sin(x))^n$*. On note* θ *la fonction nulle.*

1.1 $f_n \overset{CVS}{\to} \theta$ sur $[0;\pi/2]$

1.2 Les f_n et θ sont int. sur $[0;\pi/2]$

1.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n = \int_0^{\pi/2} \theta$

1.4 $\exists \varphi : [0;\pi/2] \to \mathbb{R}$ int. telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant \varphi$ sur $[0;\pi/2]$

2 *Séries de fonctions : soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions bornées continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et intégrables sur* $\mathbb{R}$*, on suppose que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement vers* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux*

2.1 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVNTS $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU

2.2 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVNTS

2.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ CV$\Longrightarrow \int_I S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

2.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVUTS sur $\mathbb{R} \Longrightarrow S$ continue sur $\mathbb{R}$

3 *Séries de fonctions : soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions bornées continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on suppose que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement vers* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(TS pour "sur Tout Segment") ; on suppose que chaque* f_n *admet une limite finie* ℓ_n *en* $+\infty$

3.1 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVNTS $\Longrightarrow S$ continue

3.2 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU $\Longrightarrow S$ bornée

3.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVUTS $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$

3.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVN $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$

4 *Séries et dérivation :* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de classe* C^1 *définies sur un intervalle* I *telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement vers* S *(CVN, CVNTS, CVU, CVUTS comme habituellement)*

4.1 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVUTS sur $I \Longrightarrow S$ de classe C^1 sur I

4.2 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVN sur $I \Longrightarrow S$ de classe C^1 sur I

4.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f'_n$ CVNTS sur $I \Longrightarrow S$ de classe C^1 sur I

4.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f'_n$ CVU sur $I \Longrightarrow S$ de classe C^1 sur I

Énoncé Donner (précisément) le théorème de la double limite pour des séries de fonctions.

Preuve Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues d'un segment $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right)$.

Exercice 1 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $S'(x)$, donner sans preuve la valeur de $S(0)$ et en déduire que $\forall x > 0,\ S(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Exercice 2 Montrer que $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est de classe C^1 sur $]1;+\infty[$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

DEVOIR 13 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 13 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X	X			
2			X	X	
3	X	X		X	
4			X	X	

1.1 Vrai : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\pi/2) = 0 = \theta(0)$ car $\cos(\pi/2) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = \theta(0)$ par C.C. si $x \in [0; \pi/2[$ **1.2** Vrai : clair **1.3** Faux : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n = [\sin(x)^{n+1}]0^{i/2} = 1$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta = 0$ **1.4** Faux : on n'a pas (H_3) avec 1.3. **2.1** Faux : f_n nulle partout sauf $f_n(x) = (x-n)(n+1-x)$ pour $x \in [n; n+1]$; $\forall n \geqslant 0$, $||R_n||_\infty = \dfrac{1}{4}$ **2.2** Faux : $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ alors $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ par le CSSA alors que $||f_n||_{\infty,[a;b]} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ pour tout segment $[a; b]$ **2.3** Vrai : TITT **2.4** Vrai : cours. **3.1** Vrai : CVN et continuité des f_n assure la continuité de S sur chaque segment de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ **3.2** Vrai : par hypothèse il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $||S - S_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant 1$ or $S = S - S_{n_0} + S_{n_0}$ alors que $S - S_{n_0}$ et S_{n_0} sont bornées donc S est bornée **3.3** Faux : si $f_n(x) = \dfrac{|x|^n e^{-|x|}}{n!}$, alors f_n est bornée sur $\mathbb{R}$, $\ell_n = 0$ mais $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 1 \neq 0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ même si $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVN donc CVU sur chaque segment $[-a; a]$ (avec $a > 0$) car $||f_n||_{\infty,[-a;a]} = \dfrac{a^n e^{-a}}{n!}$ dès que n est assez grand (calcul) **3.4** Vrai : double limite. **4.1** et **4.2** Faux : c'est la convergence de la série des dérivées qui compte **4.3** et **4.4** Vrais : CVU ou CVNTS implique la CVUTS qui suffit à garantir que S est C^1 sur I.

Énoncé Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, a un réel adhérent à I ($a = \pm\infty$ possible) tels que (H_1) : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ CVU (ou CVN) sur I vers S et (H_2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a. Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ CV, S admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \lim\limits_{x\to a} \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Preuve f est continue sur $[a; b]$ car limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Les f_n et f sont intégrables sur $[a; b]$ car continues sur un segment. Par linéarité de l'intégrale et inégalité de la moyenne : $\Big|\displaystyle\int_a^b f - \int_a^b f_n\Big| \leqslant \int_a^b |f - f_n| \leqslant (b-a)||f - f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big)$.

Exercice 1 Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc $\sum f_n(x)$ converge par le CSSA. De plus, $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$. Comme les f_n sont C^0 sur $\mathbb{R}_+$, S aussi. Toutes les f_n sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f_n'(x) = (-1)^n e^{-nx}$ et $\sum f_n'$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ car si $0 < a < b$, $||f_n'||_{\infty,[a;b]} = e^{-na}$ et $\sum (e^{-a})^n$ converge car $0 < e^{-a} < 1$. Ainsi, S est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(-e^{-x}\big)^n = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $S(x) = \ln(1 + e^{-x}) + k$. Comme $S(0) = \ln(2)$, par continuité de S en 0, on a $k = 0$ donc $\forall x > 0$, $S(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Exercice 2 Pour $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto 1/n^x$ est C^1 sur $]1; +\infty[$ et $f_n'(x) = -\ln(n)/n^x$; $\sum f_n$ CVS sur $]1; +\infty[$ par Riemann et, si $b > a > 1$, comme $||f_n'||_{\infty,[a;b]} = |f_n'(a)| = \dfrac{\ln(n)}{n^a} \underset{+\infty}{=} o\big(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\big)$ car $|f_n'|$ est décroissante sur $]1; +\infty[$, $\sum f_n'$ CVNSTS de $]1; +\infty[$. Par théorème, ζ est C^1 sur $]1; +\infty[$. De plus, $||f_n||_{\infty,[2;+\infty[} = 1/n^2$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ CVN sur $[2; +\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = \delta_{n,1}$ et, par double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$.