DS 4.1 : INSPIRÉ DE CCP MP 2012 MATHS2

PSI 1 2025/2026 **samedi 06 décembre 2025**

Dans tout le problème, n *est un entier naturel supérieur ou égal à* 2.
On note $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* I_n *sa matrice unité.*
Dans tout le problème, A *est une matrice quelconque de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *canoniquement associé à la matrice* A. *L'ensemble des matrices* $P(A)$ *pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$ *est noté* $\mathbb{R}[A]$.

On note ϕ_A *l'application de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$\phi_A(M) = AM - MA.$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A.
Les parties sont indépendantes entre elles.

PARTIE 1 : GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES

1.1 Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_n et A appartiennent à $\mathrm{Ker}(\phi_A)$.

1.2 *Cas* $n = 2$ *:* dans cette question, on suppose $n = 2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2.1 Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2.2 En déduire que ϕ_A est nulle si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

Dans toute la suite de ce cas $n = 2$, *on suppose que* $A \neq \lambda I_2$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et donc que* ϕ_A *n'est pas nulle.*

1.2.3 Montrer que A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

1.2.4 Vérifier que $\chi_{\phi_A} = X^2\left(X^2 - (d-a)^2 - 4bc\right)$.

1.2.5 En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

1.3 *Cas d'une projection :* dans cette question, on revient au cas général $n \geqslant 2$ et on suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un projecteur, donc qui vérifie $A^2 = A$; on suppose également que $A \neq 0$ et $A \neq I_n$.

1.3.1 Montrer que $X^3 - X$ est annulateur de ϕ_A.

1.3.2 Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de ϕ_A ?

1.3.3 Justifier que ϕ_A est diagonalisable et que $0 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)$.

1.3.4 Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $r \in [\![1; n-1]\!]$ tels que $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

1.3.5 Soit $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et $M = P\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. Calculer $\phi_A(M)$.

1.3.6 En déduire $\mathrm{Sp}(\phi_A)$.

PARTIE 2 : ÉTUDE DES VALEURS PROPRES DE ϕ_A

Dans cette partie, même si la matrice A *est réelle, on la considère comme une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *(ce qui est possible car* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*).*
On prolonge ϕ_A *en un endomorphisme* $\widetilde{\phi}_A$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *défini par* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\widetilde{\phi}_A(M) = AM - MA$.
La matrice A *étant réelle, on admettra que* ϕ_A *et* $\widetilde{\phi}_A$ *ont les mêmes polynômes caractéristiques :* $\chi_{\phi_A} = \chi_{\widetilde{\phi}_A}$.

2.1 *Trigonalisabilité de* A : soit α, β deux valeurs propres complexes de A et $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \alpha X$.

2.1.1 Justifier qu'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $A^T Y = \beta Y$.

2.1.2 En calculant $\widetilde{\phi}_A(XY^T)$, montrer que $\alpha - \beta$ est une valeur propre de ϕ_A.

2.1.3 En déduire $\alpha - \overline{\alpha} \in \mathrm{Sp}(\widetilde{\phi}_A)$ puis que si ϕ_A est trigonalisable alors A est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

2.2 *Réciproque* : soit λ une valeur propre (complexe) de $\widetilde{\phi}_A$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\widetilde{\phi}_A(M) = \lambda M$.

2.2.1 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k M = M(A + \lambda I_n)^k$.

2.2.2 En déduire $P(A)M = MP(A + \lambda I_n)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ puis que $\chi_A(A + \lambda I_n)$ n'est pas inversible.

2.2.3 En écrivant $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$, les α_i étant complexes et éventuellement égaux (comptés avec leur multiplicité), et en calculant $\det[\chi_A(A + \lambda I_n)]$, montrer qu'il existe deux indices i et j tels que $\lambda = \alpha_i - \alpha_j$.

2.2.4 Si on suppose A trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), ϕ_A est-il trigonalisable ?

2.3 Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $\chi_N = X^n$.

2.4 *Nilpotence de* ϕ_A : on suppose, dans cette question, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A - \alpha I_n$ soit nilpotente.

2.4.1 Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.

2.4.2 En déduire que ϕ_A est nilpotent.

2.5 *Réciproque* : on suppose cette fois que ϕ_A est nilpotent.

2.5.1 Déterminer $\mathrm{Sp}(\widetilde{\phi}_A)$ et en déduire que A ne possède qu'une seule valeur propre complexe α.

2.5.2 Justifier que $\alpha \in \mathbb{R}$ puis que $A - \alpha I_n$ est nilpotente.

PARTIE 3 : ÉTUDE DE DIAGONALISABILITÉ

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

3.1 *Diagonalisabilité de* ϕ_A : on suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *une base de* $\mathbb{R}^n$ *formée de vecteurs propres de* u *(défini au début du problème) et, pour tout entier* $i \in [\![1; n]\!]$, λ_i *la valeur propre associée au vecteur* v_i. *On note alors* P *la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}_0$ *à la base* $\mathcal{B}$ *et* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$. *Enfin, pour* $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, *on pose* $B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$.

3.1.1 Exprimer, pour $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i, λ_j.

3.1.2 Démontrer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, la matrice $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

3.1.3 En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

3.2 *Réciproque* : on suppose ici que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une base de vecteurs propres de* ϕ_A *et, pour tout couple* $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, $\lambda_{i,j}$ *la valeur propre associée à* $P_{i,j}$. *On note* λ *une valeur propre réelle de* A *(dont l'existence est assurée par la partie 2) et* $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *une matrice colonne (propre) telle que* $AX = \lambda X$.

3.2.1 Démontrer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

3.2.2 En déduire que A est diagonalisable. On pourra commencer par montrer que si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y = MX$.

PARTIE 4 : ÉTUDE DES VECTEURS PROPRES DE ϕ_A ASSOCIÉS À LA VALEUR PROPRE 0

On note m *la dimension de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}[A]$ *:* $m = \dim(\mathbb{R}[A]) = \dim\big(\{P(A) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}\big)$.

4.1 *Base de* $\mathbb{R}[A]$

4.1.1 Justifier que la famille $(I_n, A, \dots, A^m)$ est liée et en déduire l'existence d'un polynôme P annulateur de A, non nul et tel que $\deg(P) \leqslant m$.

4.1.2 Montrer que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ où $d = \deg(P)$.

4.1.3 En déduire $d = m$ puis que la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

4.2 Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\mathrm{Ker}(\phi_A))$.

4.3 *Cas où* u *est diagonalisable*

On suppose, dans cette question, que u *est diagonalisable. On note* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ *(avec* $1 \leqslant p \leqslant n$*) les* p *valeurs propres distinctes de* u *et, pour tout entier* $k \in [\![1;p]\!]$*, on note* $E_{\lambda_k}(u)$ *le sous-espace propre associé à la valeur propre* λ_k *et on note* m_k *la dimension de cet espace propre.*

4.3.1 Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \mathrm{Ker}(\phi_A)$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v (c'est-à-dire $v\left(E_{\lambda_k}(u)\right) \subset E_{\lambda_k}(u)$).

4.3.2 En déduire que $B \in \mathrm{Ker}(\phi_A)$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

4.3.3 Préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(\phi_A)$.

4.3.4 Lorsque $n = 5$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k.

4.4 *Cas où* u *est nilpotent d'indice* n

On suppose, dans cette question, que l'endomorphisme u *(défini au début du problème) est nilpotent d'indice* n *(c'est-à-dire que* $u^n = 0$ *et* $u^{n-1} \neq 0$*). On considère un vecteur* y *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $u^{n-1}(y) \neq 0$ *et, pour tout entier* i *tel que* $1 \leqslant i \leqslant n$*, on pose* $v_i = u^{n-i}(y)$.

4.4.1 Démontrer soigneusement que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4.4.2 Soit $B \in \mathrm{Ker}(\phi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

4.4.3 En déduire $\mathrm{Ker}(\phi_A)$.

PARTIE 5 : VECTEURS PROPRES DE ϕ_A ASSOCIÉS AUX VALEURS PROPRES NON NULLES

Dans cette partie, α *est une valeur propre non nulle de* ϕ_A *et* $B \neq 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *un vecteur propre associé.*

5.1 Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = (k\alpha)B^k$.

5.2 En déduire que B est nilpotente.

DS 4.2 : INSPIRÉ DE CCP PSI 2008 MATHS1

PSI 1 2025/2026 **samedi 06 décembre 2025**

Pour tout nombre réel x *tel que la série* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ *converge (respectivement la série* $\sum_{n\geqslant 0}\ln\left(1+e^{-nx}\right)$ *converge), on note* $\eta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ *(respectivement* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+e^{-nx}\right)$*) la somme de cette série.*

PARTIE 1 : ÉTUDE DE LA FONCTION η

1.1 Préciser, selon la valeur du nombre réel x, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^x}$.

1.2 Montrer que l'ensemble de définition de la fonction η est $]0\,;+\infty[$.

1.3 Justifier précisément que la fonction η est continue sur $]0\,;+\infty[$.

1.4 Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $1-\frac{1}{2^x}\leqslant\eta(x)\leqslant 1$. En déduire que la fonction η est bornée sur $]0\,;+\infty[$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ que l'on déterminera.

1.5 Donner sans preuve la valeur de $\eta(1)$ et calculer rapidement $\eta(2)$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE LA FONCTION f

Pour tout entier naturel n *et tout nombre réel* x*, on note* $u_n(x)=\ln\left(1+e^{-nx}\right)$.

2.1 Montrer que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$.

2.2 Montrer que la fonction f est continue et strictement monotone sur $]0\,;+\infty[$

2.3 Justifier l'affirmation : "$E=f(]0\,;+\infty[)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$".

2.4 Montrer que la fonction f admet une limite finie λ (que l'on précisera) en $+\infty$.

2.5 *Calcul d'intégrales :* pour tout $x>0$, soit $\psi_x:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $\psi_x(t)=\ln\left(1+e^{-tx}\right)$.

2.5.1 Montrer que $\varphi:]0\,;1]\to\mathbb{R}$ et, pour $k\in\mathbb{N}$, $\varphi_k:]0\,;1]\to\mathbb{R}$ définies par $\forall y\in]0\,;1]$, $\varphi(y)=\frac{\ln(1+y)}{y}$ et $\varphi_k(y)=y^k\ln(y)$ sont intégrables sur $]0\,;1]$. Montrer que $\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\ln y}{1+y}\mathrm{d}y$ et calculer $\int_0^1\varphi_k(y)\mathrm{d}y$.

2.5.2 En déduire que $\int_0^1\varphi(y)\mathrm{d}y=\eta(2)$.

2.5.3 Justifier que, pour $x>0$, la fonction ψ_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2.5.4 À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour $x>0$, $\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\mathrm{d}t=\frac{\eta(2)}{x}$.

2.6 En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^+}xf(x)$ et préciser l'intervalle E.

2.7 *Un dernier équivalent :*

2.7.1 Montrer que, pour $x\in[0\,;1]$, on a $0\leqslant x-\ln(1+x)\leqslant\frac{x^2}{2}$.

2.7.2 En déduire un équivalent simple de $f(x)-\lambda$ quand x tend vers $+\infty$.