

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 6

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

6.1 Modes de convergence

6.1 Centrale PSI 2012 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \geq 0, f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{-n^2}$. On rappelle qu'en posant les intégrales de WALLIS $W_p = \int_0^{\pi/2} \cos^p(\theta) d\theta$ pour $p \in \mathbb{N}$, on a $W_p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$.

- Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers une fonction f à déterminer.
- Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.
- En effectuant le changement de variables $x = n \tan(\theta)$ dans I_n , trouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
- Établir que : $\forall t \geq 0, t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$. En déduire que $\sup_{x \in [0; \sqrt[4]{n}]} |f_n(x) - f(x)| \leq (e^{\frac{1}{2n}} - 1)$.

Majorer $\sup_{x \in [\sqrt[4]{n}; +\infty]} |f_n(x) - f(x)|$ pour montrer que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers f est même uniforme.

6.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \neq 0, f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{1+n^2x^2}$.

- Étudier la convergence simple, uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}^* .
- Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$, de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

6.3 Centrale PSI 2012

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables définies sur \mathbb{R} qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Donner la définition de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f .
- Montrer par un exemple qu'il est possible que la fonction f ne soit pas intégrable sur \mathbb{R} .

Dorénavant f intégrable et il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur \mathbb{R} et : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq g(x)$.

- Établir (sans utiliser le théorème de convergence dominée) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

6.4 Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n \cos(x) \sin^n(x)$.

6.5 Mines PSI 2008 d'après RMS Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par les relations :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt.$$

6.6 CCP PSI 2008 d'après RMS Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$. Étudier la convergence simple sur \mathbb{R} , puis uniforme sur $[-a; a]$ avec $a > 0$, de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$.

6.7 ENTPE PSI 2008 d'après RMS Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in [0; \frac{\pi}{2}] \mapsto (\sin x)^{1/n}$.

- Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$.
- Étudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$.

6.8 Centrale PSI 2012 On pose, pour $n \geq 1$: $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{H_n}$.

Préciser l'ensemble de définition de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et que la convergence est normale sur $]0; a]$ pour tout $a \in]0; 1[$ mais qu'elle n'est pas normale sur $]0; 1]$. Prouver néanmoins que la convergence est uniforme sur $]0; 1]$.

6.9 Théorème de DINI Soit des fonctions $f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a; b]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme.

- Justifier l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty$.
- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.
- En observant que pour tout $p \leq n$, $f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ et conclure.

6.2 Fonctions définies par une série de fonctions

6.10 Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- Quel est le domaine de définition de f ? Étudier la continuité de f sur celui-ci.
- Montrer que f est strictement décroissante. Étudier la limite de f en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

6.11 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 2^n x}$.

- Justifier que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; plus précisément trouver le rationnel r tel que $f(x) \sim \frac{r}{x}$.

6.12 Centrale PSI 2012 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$.

- Justifier que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Établir aussi que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et, plus précisément, que $f(x) - 1 \sim \frac{-\ln(2)}{x}$.

d. Prouver que l'on peut écrire, pour $x > 0$: $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x}{(2px+1)((2p+1)x+1)}$.

Par une comparaison avec une intégrale, prouver l'existence et trouver la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

6.13 OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 282 II

On définit, la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ par $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2 \ln(1+n)}$.

- Trouver le domaine de convergence D de $\sum_{n \geq 1} u_n$.
- Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe C^1 sur D .

6.14 On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

- Montrer que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* . Étudier sa monotonie.
- Déterminer la limite puis un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+ .

6.15 On pose, pour $x > -1$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

- Montrer que S est définie et continue sur $] -1; +\infty [$. Étudier sa monotonie.
- Pour $x > -1$, calculer $S(x+1) - S(x)$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers -1^+ .
- Établir que $\forall p \in \mathbb{N}$, $S(p) = H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6.16 On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- Montrer que S est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Étudier sa monotonie.
- Établir que : $\forall x > 0$, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+ .
- Déduire des deux questions précédentes un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6.17 On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$. On rappelle que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$.

- Montrer que S est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Étudier sa monotonie.
- Établir que : $\forall x > 0$, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+ .
- Trouver aussi un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6.18 Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x$ si $x \geq k$ et $f_k(x) = 0$ si $x < k$.

- Étudier la convergence de $\sum_{k \geq 0} f_k$ sur \mathbb{R}_+ .
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ si $u_n = \sum_{p=0}^n \left(\frac{p}{n}\right)^n$ (on pourra commencer par poser $p = n - k$).

6.19 Soit $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k}$ si $x \geq k$ et $f_k(x) = 0$ si $x < k$.

- En utilisant le binôme de NEWTON, montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p)$.
- Quel est le mode de convergence de $\sum_{k \geq 0} f_k$ sur \mathbb{R}_+ ? En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

6.20 CCP PSI 2008 d'après RMS Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}$.

- Quel est le domaine de définition de f ? En quels points f est-elle dérivable?
- Calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$. On rappelle que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6.3 Convergence dominée

6.21 ENSAM PSI 2007 d'après RMS Soient $f \in C^0([0;1], \mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ intégrable.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = n \int_0^1 f(t) g(nt) dt$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

6.22 Mines PSI 2008 d'après RMS Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt$.

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.

6.23 Centrale PSI 2012 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue qui vérifie $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\ell' = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-1}^1 f(nx) dx$. Justifier f est bornée sur \mathbb{R} et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

6.24 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \left(\frac{x}{n} \right) \right)^{n^2} dx$. Indication : on pourra introduire les fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \left(\cos \left(\frac{x}{n} \right) \right)^{n^2}$ si $x \in [0; n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

6.25 Donner les 2 premiers termes du développement asymptotique de I_n quand $n \rightarrow +\infty$ si $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

6.26 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n f(t) e^{-nt} dt$.

6.27 *Centrale PSI 2013* Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2+\dots+t^n}}$.

a. Montrer que la suite est définie et calculer u_1 .

b. Montrer que cette suite tend vers $\frac{2}{3}$.

c. Montrer que $u_n - \frac{2}{3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ avec $I > 0$ qu'on ne cherchera pas à calculer.

6.4 Intégration terme à terme (différentes méthodes)

6.28 Montrer que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

6.29 Pour tout $\alpha > 0$, établir que $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

6.30 Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

6.31 Établir que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

6.32 Établir que pour tout $x > 0$, $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

6.33 Soit $\alpha > 0$. On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt$.

a. Montrer la convergence de $I(\alpha)$.

b. Donner une expression de $I(\alpha)$ en fonction de Γ et ζ .

6.34 *Mines PC* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \sin x \right) \right]^n dx$.

Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

6.35 Calculer, pour $p \in \mathbb{Z}$, $I_p = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\theta}}{2 + e^{i\theta}} d\theta$.

6.36 Pour tout $\alpha > 0$, établir que $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

6.37 Établir que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

6.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

6.38 Centrale PSI 2013 Nicolas

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = nx^a e^{-nx^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

a. Étudier en fonction de a la convergence simple puis normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R}_+^* .

b. Trouver un équivalent de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ quand x tend vers 0.

6.39 Centrale PSI 2014 Thibault

On pose $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

- a. Déterminer l'ensemble de définition de S .
- b. Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$. Justifier que S est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
- c. Trouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.
- d. Montrer que $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

6.40 Centrale PSI 2014 Aymeline

Soit Δ une partie de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de Δ dans \mathbb{C} qui converge uniformément vers $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Δ qui converge vers un élément $y \in \Delta$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x_n) - g(y)) = 0$.

6.41 Mines PSI 2014 Mathias

Calculer $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta$.

6.42 Mines PSI 2014 Lucie

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

- a. Trouver l'ensemble de définition de f .
- b. Donner la classe de f .
- c. Trouver une équation différentielle dont f est solution.

6.43 CCP PSI 2014 Mohammed

Étude de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n+x)}{n^2}$. Montrer la convergence de la série, qu'elle est C^1 sur \mathbb{R}_+ , puis montrer que la fonction somme est strictement croissante.

6.44 CCP PSI 2014 Soufiane

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2}$.

6.45 E3A PSI 2014 Jean-Baptiste

On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+kx}}$.

- a. Prouver que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0; +\infty[$, puis uniformément sur $]1; +\infty[$.
- b. On note S la limite de cette suite de fonctions. Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1$.

6.46 Centrale Maths1 PSI 2015 Arnaud Dubessay

Soit $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+x}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- Donner le domaine de définition de f . Où f est-elle continue ?
- f peut-elle coïncider avec une fonction polynomiale sur un segment ?

6.47 Mines PSI 2015 Jean-Baptiste Biehler et Mathieu Gaultier

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - a_n|}{3^n}$.

Étudier la définition de f , sa continuité et sa dérivabilité.

6.48 Mines PSI 2015 Mathieu Dubes

Soit $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ si $n \geq 2$.

- Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer l'inégalité suivante pour $x > 0$: $0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$. Que peut-on dire de la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 2} u_n$ sur \mathbb{R}_+ ?

6.49 Mines PSI 2015 Adrien Gruson

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on pose $u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$.

- À quelle condition sur t la série $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ converge-t-elle ?
- Montrer que pour tout $a \in]0; 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $]0; a]$, mais pas sur $]0; 1[$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $]0; 1[$.

6.50 Mines PSI 2015 Paul Mondou

Soit un segment $[a; b]$, et une suite de fonctions continues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a; b]$ qui converge uniformément.

Étudier la convergence des suites $(\min_{[a;b]}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\max_{[a;b]}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

6.51 Mines PSI 2015 Gaël Pérez

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^2} dt$.

- Convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$? On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ s'il y a convergence.
- f est-elle continue en -1 ?
- Équivalent simple de f en 1 .

6.52 Mines PSI 2015 Guillaume Soustrade

Étude de la convergence de la suite puis de la série de terme général $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

6.53 Mines PSI 2015 Julien Venne

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon R et $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ de rayon R' .

a. Que dire de la valeur de R' par rapport à R ? Calculer R' si $R > 0$.

b. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-R'; R'[$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6.54 CCP PSI 2015 Oriana Peltzer

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$.

a. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

b. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

6.55 Petites Mines PSI 2015 Marin de Bonnières

Soit $a \in]0; 1[$ et $u_n = \int_0^a x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ et $v_n = \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Écrire $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.

c. Reprendre la question précédente avec v_n . $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge-t-elle ?

6.56 Centrale Maths1 PSI 2016 Antoine Badet

I Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{nx}{x^2 + n^a}$.

a. Déterminer $\Delta = \{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}\}$.

b. Montrer que $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur \mathbb{R} si $a \in \Delta$.

c. Déterminer $\Delta' = \{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}\}$.

Y a-t-il convergence uniforme ailleurs ?

6.57 Centrale Maths1 PSI 2016 Pauline Bourda

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in [0; +\infty[$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$. On note alors $S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Trouver une CNS sur α pour que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

b. Trouver une CNS sur α pour que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ .

c. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ pour tout α .

6.58 Mines PSI 2016 Erwann Alric I

On définit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} dx$.

a. Donner l'ensemble des valeurs de α sur lequel I est définie et de classe C^1 .

b. Donner deux réels a et b tels que $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b}{n^2 + a}$.

c. Déterminer la limite de I en $+\infty$.

6.59 Mines PSI 2016 Thomas Corbères I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.

a. Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément ?

b. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle uniformément ?

6.60 Mines PSI 2016 Jean Migliorini II

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f .

b. Montrer que f y est continue. f est-elle de classe C^1 sur D ?

c. f est-elle intégrable sur \mathbb{R}_+ ? Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

6.61 Mines PSI 2016 Mathieu Perrin II

Étudier les convergences, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ et de $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

Comparer les quantités $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ et $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

6.62 Mines PSI 2016 Hugo Saint-Vignes II

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{nt(1-t)}{n^2 t^2 + (1-t)^2} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Justifier que I_n existe et calculer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

b. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n$.

6.63 Mines PSI 2016 Hugo Tarlé I

Soit $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$ et on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

b. Trouver une expression de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ faisant intervenir une série numérique.

6.64 CCP PSI 2016 Sylvain Bielle I

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{2n}$ si $x \in]0; 1]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément vers $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.

6.65 CCP PSI 2016 Matthieu Cadiot II

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

- Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On pose $v_n = 1 - u_n$. Nature de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$? De $\sum_{n \geq 0} v_n$?

6.66 CCP PSI 2016 Samy Essabar II

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.

- Montrer que : $\forall t \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.
- En déduire que $\forall t \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1 \right| \leq \frac{te^t}{n}$.
- Étudier la convergence simple sur $[0; 1]$ de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $I_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$.
- Montrer que cette convergence est uniforme.

6.67 CCP PSI 2016 Léo Fusil II

On définit $f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2 + n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer la continuité de f sur \mathbb{R} . Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} ?
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

6.68 CCP PSI 2016 Marie Rebière I

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$. En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

- Donner le domaine de convergence I de f . La fonction f est-elle continue sur I ?
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et donner $f(I)$.

6.69 X PSI 2017 Vincent Bouget II

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On définit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

- Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de I .
- Calculer sa somme.

6.70 Centrale Maths1 PSI 2017 Alexandre Chamley et Sam Pérochon

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$.

- Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$.
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $I_{n+2} + I_n = 2I_{n+1}$.
- En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

6.71 Centrale Maths1 PSI 2017 Vincent Meslier

Soit $F = \{f \in C^1([0;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$. Soit $g \in F$, strictement croissante et telle que $g'(1) = 0$. On définit les fonctions $f_n : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = g(nx)e^{x-1}$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = e^{x-1}$ si $\frac{1}{n} < x \leq 1$.

On pose enfin $I_n = \int_0^1 |f_n(x) - f'_n(x)| dx$.

- Montrer que $f_n \in F$.
- Montrer que $(I_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et trouver sa limite ℓ .
- Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

6.72 Centrale Maths1 PSI 2017 Grégoire Verdès

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}} dx$.

- Vérifier que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.
- Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geq 0}$.
- Trouver un équivalent de I_n . Indication : montrer d'abord que $\forall x > 0$, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.

6.73 Mines PSI 2017 Célia Detrez II

- Montrer la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2) \ln(t^2)}{t^2} dt$.
- Montrer que $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2) \ln(t^2)}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

Indication : on admettra avant le chapitre sur les séries entières que : $\forall t \in [0;1[, \ln(1-t^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$.

- Calculer la valeur exacte de I avec des constantes usuelles.

6.74 Mines PSI 2017 Corentin Gatellier II Soit, pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- Donner l'ensemble de définition de f .
- Étudier les différents types de convergence de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur des intervalles de \mathbb{R} .
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f ?
- Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

6.75 Mines PSI 2017 Valentin Gorce II

Faire un développement asymptotique à trois termes de $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

6.76 Mines PSI 2017 Tom Huix II

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt$.

Comparer $\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

6.77 Mines PSI 2017 Sam Mamers I On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n))$.

- Étudier la convergence simple et uniforme de cette série de fonctions sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

6.78 Mines PSI 2017 Clément Maurel II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\int_0^x tf(t)dt \underset{+\infty}{\longrightarrow} o(x)$.

6.79 CCP PSI 2017 Louise Piton I

Pour $n \geq 0$, soit $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$. Déterminer la nature et la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

6.80 CCP PSI 2017 Roland Tournade I

Soit $n \geq 1$, on définit $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $I_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$.

- a. Montrer que $\forall n \geq 1, \forall t \in [0; 1], |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.
- b. En déduire que $\forall n \geq 1, \forall t \in [0; 1], \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1 \right| \leq \frac{te^t}{n}$.
- c. Étudier la convergence simple de $(I_n)_{n \geq 1}$ sur $[0; 1]$.
- d. Montrer que cette convergence est uniforme.

6.81 E3A PSI 2017 Corentin Gatellier

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^2}{x^4 + n}$ pour $n \geq 1$.

- a. Convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} ? On note f la somme de cette série.
- b. Convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} ?
- c. Montrer qu'il n'existe aucun intervalle (non singleton) de \mathbb{R} sur lequel $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement.
- d. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

6.82 ICNA PSI 2017 sans préparation Aloïs Blarre

Soit, pour $n \geq 0$, la fonction $f_n : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

6.83 ICNA PSI 2017 avec préparation Ninon Toussaint

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Déterminer l'ensemble de définition de ζ .

Étudier la continuité et la dérivabilité de ζ . Montrer que $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

6.84 ENS Ulm/Cachan PSI 2018 Eneko Jauretche II

Que dire de la convergence de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-x^n} dx$ en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+$?
Et pour l'absolue convergence ?

6.85 ENS Ulm/Cachan PSI 2018 Raphaël Pobeda

Soit un entier $\ell \geq 2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $g(x) = |x|$.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ si $g_n(x) = \frac{g(\ell^n x)}{\ell^n}$.

- Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(y) - g(x) \geq -|y - x|$.
- Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$, a et h deux réels tels que $\ell^m a \in \mathbb{Z}$ et $|h| = \ell^{-2m-1}$. Montrer que $f(a+h) - f(a) \geq |h|$.
- Montrer qu'il n'existe aucun intervalle $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$ tel que f y soit monotone.
- Calcul de $\int_k^{k+1} f(x) dx$.

6.86 Centrale Maths1 PSI 2018 Colin Baumgard et Elio Garnaoui

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n : t \mapsto \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$.

- Pour quelles valeurs de t la série $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ converge-t-elle ? On note $S(t)$ la somme.
- Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur tout intervalle $]0; a]$ avec $a \in]0; 1[$.
- Montrer que S est continue sur $]0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$.

6.87 Centrale Maths1 PSI 2018 Jean Boudou

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n$.
- Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ avec $\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. En déduire la valeur exacte de α .

6.88 Centrale Maths1 PSI 2018 Victor Bourdeaud'hui

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \frac{e^t}{1+t^n}$ et $\varphi_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

- Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ . Y a-t-il convergence uniforme ?
- Montrer que $\forall \alpha > 0$, $\exists! x_n(\alpha) > 0$, $\int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt = \alpha$.
- Si $\alpha > e - 1$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(\alpha)$.
- Si $\alpha < e - 1$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(\alpha)$.

6.89 Centrale Maths1 PSI 2018 Elisabeth Carreau-Gaschereau

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$. En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

- Donner le domaine de convergence I de f . La fonction f est-elle continue sur I ?
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et donner $f(I)$.

Questions de cours :

- définition et résultats liés aux séries géométriques.
- convergence de $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
- montrer que si une suite de fonctions continues $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f sur un segment $[a; b]$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.

6.90 Centrale Maths1 PSI 2018 Marion Lebrun

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de convergence, $h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

- Déterminer le domaine de définition D de h .
- Montrer que h est continue sur D .
- Étudier les limites de h aux bornes de D .
- Trouver un équivalent simple de h aux bornes de D .

6.91 Mines PSI 2018 Gauthier Crosio I

Soit l'équation (E) : $u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) dt$ d'inconnue $u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On définit $u_0 : x \mapsto 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et en déduire la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$. On note u sa limite.
- Prouver que u est solution de (E) . Résoudre entièrement (E) .

6.92 Mines PSI 2018 Erwan Dessailly II

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f . Montrer que f est continue sur D .
- Établir que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme d'une série.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ et, plus précisément, trouver un équivalent de $f(x) - \ell$ quand x tend vers $+\infty$.

6.93 Mines PSI 2018 Elio Garnaoui I

a. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

b. Exprimer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ comme somme d'une série numérique. Et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$?

6.94 Mines PSI 2018 Thomas Gerbeaud I

Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} C_n$ converge absolument.

a. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n x^n}{n!}$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

b. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx$.

6.95 Mines PSI 2018 Martin Gros II

a. Montrer la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2) \ln(t^2)}{t^2} dt$.

b. Montrer que $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2) \ln(t^2)}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

Indication : on admettra avant le chapitre sur les séries entières que : $\forall t \in [0; 1[, \ln(1-t^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$.

c. Calculer la valeur exacte de I avec des constantes usuelles.

6.96 Mines PSI 2018 Pierre Le Bouille I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ et $u_n = v_n - 1$.

a. Montrer que v_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On admet que Γ est dérivable et que $\Gamma'(1) \neq 0$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \Gamma(1)$.

d. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

6.97 Mines PSI 2018 Charlotte Nivelle I

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a. Déterminer les domaines de définition de f et g . Étudier la continuité de f et g .

b. Montrer que $\forall x > 1$, $g(x) = (1 - 2^{1-x})f(x)$.

c. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$.

6.98 Mines PSI 2018 Raphaël Pobeda II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.

b. Montrer que $\forall n \geq 1$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2} du$.

c. Montrer l'existence et donner la valeur de $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

6.99 Mines PSI 2018 Thibaud Vendrelly I

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n} - 1}{1 + x^{2^n}}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f .

b. Donner une expression plus simple de $\prod_{n=0}^N (1 + x^{2^n})$.

c. En déduire une expression de $f(x)$.

6.100 CCP PSI 2018 Charlotte Beaune et Florian Gaboriaud I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt$.

a. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

b. Prouver l'existence de I_n pour tout entier $n \geq 1$.

c. Démontrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est de limite nulle.

d. Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

6.101 CCP PSI 2018 Peio Betdeder et Paul Simon II

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Prouver l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ et montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta(3/2)$.

6.102 *CCP PSI 2018* Erwan Dessailly et Baptiste Egretteau I

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2}$.

6.103 *CCP PSI 2018* Pauline Lamaignère II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

- Quel est le domaine de définition de f ?
- Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
- Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} ?
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Qu'en déduire quant à la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} ?

6.104 *E3A PSI 2018* Titouan Sancier I

- Existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt$?
- Décomposer $\frac{\ln(t) \ln(1-t)}{\sqrt{t}}$ en somme de série sur $]0; 1[$.
- En déduire la valeur de I .

6.105 *E3A PSI 2018* Benoit Souillard

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(nx)}{e^x \operatorname{ch}(nx)} dx$.

- Montrer que I_n est bien définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- On pose $u_n = I_n - \ell$. Déterminer les natures de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.

6.106 *Centrale Maths1 PSI 2019* Ulrick Blé

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{u_n(x)}$.

On définit aussi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{u_n(x)}$.

- La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?
- Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

6.107 *Centrale Maths1 PSI 2019* Axel Brulavoine

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- Déterminer les ensembles de définition de θ et ζ .
- Montrer que θ est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
- Montrer que $\forall x > 1$, $\theta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.
- Calculer $\theta(1)$. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+ .
- Obtenir cet équivalent par une autre méthode.

6.108 Centrale Maths1 PSI 2019 Florian Guyomard

On donne, pour $x \in [0; 1]$ et $(n, r) \in \mathbb{N}^2$, le réel $S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx)^r$.

Pour $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on définit aussi, pour $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{n}{k}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

a. Rappeler la formule de TAYLOR reste intégral.

b. Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n,0}(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n,1}(x) = 0$.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0; 1]$, $S_{n,2}(x) = nx(1-x)$.

c. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que l'on ait la majoration $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{Mx(1-x)}{n}$.

d. En déduire la convergence uniforme de la suite de fonctions $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur $[0; 1]$.

6.109 Centrale Maths1 PSI 2019 et Mines PSI 2019 Tanguy Sommet et Julien Tissot I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

On définit aussi $f :]-1; 0[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$.

a. Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Montrer que f est bien définie et que $\forall x \in]-1; 0[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{n \cdot n!}$.

6.110 Centrale Maths1 PSI 2019 Julien Tissot et Noah Vicens

Pour un entier $n \geq 2$, on pose $I_n = n \int_0^{+\infty} \sin(x^n) dx$ en cas de convergence. On donne $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

a. Énoncer le théorème de convergence dominée.

b. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \geq 2$.

c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

6.111 Mines PSI 2019 Ulrick Blé II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

En cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Définir la convergence normale et uniforme d'une série de fonctions et donner le lien logique entre elles.

b. Déterminer l'ensemble de définition D de S . Montrer que S est continue sur D .

c. Montrer que S est dérivable en 1 et calculer $S'(1)$.

6.112 *Mines PSI 2019* Tom Boileau I

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle strictement positive et décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto a_n x^n (1 - x)$.

- Étudier la convergence simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0; 1]$.
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ si et seulement si $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
- Reprendre les questions précédentes sur l'intervalle $[-1; 1]$.

6.113 *Mines PSI 2019* Maël Classeau I

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- La fonction f est-elle intégrable sur \mathbb{R}_+ ?

6.114 *Mines PSI 2019* Louis Destarac I

Pour $n \geq 1$, on définit $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = n^\alpha x(1 - x)^n$.

- Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0; 1]$.
- Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0; 1]$.

6.115 *Mines PSI 2019* Quentin Vacher II

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^2} dx$.

- Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et convergente. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- Trouver un équivalent de I_n en $+\infty$.

6.116 *CCP PSI 2019* Augustin Aumont et Enola Soenen I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{(-1)^n x}{n(1 + x^2)}\right)$.

- Montrer que $\forall t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $|\ln(1 + t) - t| \leq 2t^2$.
- Déterminer le domaine D de convergence simple de $\sum_{n \geq 1} u_n$. On note $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
- Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur D ?

6.117 *CCP PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré et Fabien Dupuis II

Soit a un réel positif ou nul. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{nx(x^2 + a)e^{-x}}{nx + 1}$.

- Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
- Que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur $[0; 1]$ en fonction de a ?
- Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[R; 1]$ dès que $0 < R < 1$.

6.118 CCP PSI 2019 Tom Boileau et Charles Broquet I

On donne l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$.

b. Montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

6.119 CCP PSI 2019 Thomas Brémond et Lucas Maisonnave I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Montrer la convergence de $(I_n)_{n \geq 0}$ vers un réel ℓ à déterminer.

b. Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

c. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

6.120 CCP PSI 2019 Carla Chevillard I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$.

a. Pour quelles valeurs de x la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge-t-elle ?

b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$. Qu'en déduit-on ?

c. Déterminer le domaine de définition D de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Y a-t-il convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ pour $x \in D$?

d. Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur D ?

e. Soit $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $I_a = \mathbb{R} \setminus [-a; a]$.

6.121 CCP PSI 2019 Maël Classeau II

Pour $n \geq 2$, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

b. Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D .

c. Montrer que $\forall x \in D, \forall n \geq 2, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.

d. En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D .

e. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

6.122 *CCP PSI 2019* Louis Destarac et Victor Margueritte I

Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition en fonction des valeurs de a .

Dans la suite de l'exercice, on impose $|a| < 1$.

b. Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .

c. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour $x > 0$.

d. Trouver un équivalent de S en 0.

e. Donner la limite de S en $+\infty$. Et un équivalent de S en $+\infty$?

6.123 *CCP PSI 2019* Romain Galea I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $I_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$.

a. Montrer que $\forall t \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.

b. En déduire que $\forall t \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n(t) - 1| \leq \frac{te^t}{n}$.

c. Étudier la convergence simple de $(I_n)_{n \geq 1}$ sur $[0; 1]$.

d. Y a-t-il convergence uniforme de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0; 1]$?

6.124 *CCP PSI 2019* Lola Josseran I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .

b. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

c. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .

d. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Qu'est-ce que ça signifie pour le graphe de f ?

6.125 *CCP PSI 2019* Auriane Luquet I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2 \ln(1+n)}$. En cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S .

b. Montrer que S est continue sur D .

c. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge uniformément sur D . Indication : utiliser une comparaison série/intégrale.

d. Montrer que S est de classe C^1 sur D .

6.126 *CCP PSI 2019 et CCP PSI 2015* Julien Tissot I et Agatha Courtenay I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

a. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

b. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} du$.

6.127 Petites Mines PSI 2019 Elaia Mugica II

Soit $I = \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}$. En cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

- Montrer que S est de classe C^1 sur I et calculer S' .
- Calculer $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}$ et en déduire la valeur de $S(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
- Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

6.128 Centrale Maths1 PSI 2021 Yuan Le Guennic

- Montrer que $\forall u \in]-\infty; 1[$, $\ln(1-u) \leq -u$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

On admet que $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$ (intégrales de WALLIS).

- Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6.129 Mines PSI 2021 Thomas Boudaud I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1}$ et $Q_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{2n+1}{2p} x^p$.

- Déterminer les racines de P_n et Q_n .
- En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$.
- Montrer que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\tan^2(x)} + 1$.
- En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ existe.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.
- En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

6.130 Mines PSI 2021 Quentin Granier I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

- Montrer la convergence simple sur \mathbb{R} de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une fonction g qu'on déterminera.
- Montrer que cette convergence est en fait uniforme sur \mathbb{R} .
- Montrer que toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur \mathbb{R} mais que g ne l'est pas.

Qu'en déduire vis-à-vis d'un théorème du cours ?

6.131 Mines PSI 2021 Quentin Granier IV et Baptiste Pozzobon III et Raffi Sarkissian III

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

6.132 *Mines PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto \ln(1 + e^{-nx})$ et, en cas de convergence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

- Déterminer l'ensemble de définition I de f .
- Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I .
- Montrer que f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et la déterminer.
- On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

6.133 *Mines PSI 2021* Alexandre Marque II

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt$ converge.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1 + (2n+1)^2}$.

6.134 *CCINP PSI 2021* Mathilde Arnaud I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

a. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la fonction somme de cette série de fonctions.

b. S est-elle continue sur \mathbb{R}_+ ?

c. Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

d. Trouver une expression de $S(x)$ avec des fonctions usuelles.

e. En déduire la valeur de $S(0)$.

6.135 *CCINP PSI 2021* Thomas Boudaud I

Soit $\varphi : I = [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|\varphi(x)| \leq c|x|$.

On cherche les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $(P) : f(0) = 0$ et $\forall x \in I$, $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

a. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est continue sur I .

b. Montrer que S est solution de (P) .

c. Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.

d. En déduire l'ensemble des solutions de (P) .

e. Si on suppose φ de classe C^1 sur I , montrer que S est aussi de classe C^1 sur I .

6.136 *CCINP PSI 2021* Johan Haramboure I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

a. Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{R} .

b. Montrer la convergence simple de $(f'_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{R} .

c. Justifier que $(f'_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément sur $[-1; 1]$.

6.137 CCINP PSI 2021 Juliette Maricourt I

Pour $n \geq 2$, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.
- Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D .
- Montrer que $\forall x \in D, \forall n \geq 2, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
- En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D .
- La fonction S est-elle intégrable sur D ?

6.138 CCINP PSI 2021 Laurine Texier II

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)}$.

- Montrer que la fonction I_n est bien définie sur \mathbb{R}_+ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite à déterminer.
- La suite de fonctions $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}_+ ?
- Donner une relation entre $I_{n+2}(x)$ et $I_n(x)$.
- En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)}$.

6.139 X PSI 2022 Lucas Lacampagne I

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $f(0) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt$.

- Trouver un équivalent de a_n .
- Que se passe-t-il si $f = \sin$?

6.140 ENS Cachan PSI 2022 Noé Chassagne I

On définit, sous réserve d'existence, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q(x) dx$.

- Montrer l'existence de $I_{p,q}$ pour toutes valeurs des entiers naturels p et q .
- Calculer $I_{p,q}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
- En déduire que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

6.141 Centrale Maths1 PSI 2022 Joël Lascoumes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{t} dt$.

- Montrer que u_n est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ converge.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

6.142 Centrale Maths1 PSI 2022 Manon Odelot

Soit $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n(1+n^2|x|)}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

Questions de cours :

- Donner la formule de TAYLOR reste intégral.
- Donner le théorème des valeurs intermédiaires.

6.143 Mines PSI 2022 Louis Bardinet I

Soit $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ si $n \geq 2$.

- Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 2} u_n$ sur \mathbb{R}_+ .
- A-t-on convergence normale de $\sum_{n \geq 2} u_n$ sur \mathbb{R}_+ ?
- Que peut-on dire de la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 2} u_n$ sur \mathbb{R}_+ ?

6.144 Mines PSI 2022 Olivier Courmont II

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$.

6.145 Mines PSI 2022 Achille Domens I

Exprimer $\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2} dt$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2} dt$ sous forme de série.

6.146 Mines PSI 2022 Paul Mayé I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

- Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .
- Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+ .
- Quelles sont les variations de f ?
- Trouver les limites de f en $\pm\infty$.
- Tracer la courbe représentative de f .

6.147 Mines PSI 2022 Alban Soyez I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Trouver le domaine de continuité de f , son domaine de dérivabilité.
- Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

6.148 Mines PSI 2022 Guillaume Tran-Ruesche III

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{-1/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx$.

6.149 CCINP PSI 2022 Margaux Millaret II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$.

- Pour quelles valeurs de x la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge-t-elle ?
- Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$. Qu'en déduit-on ?
- Déterminer le domaine de définition D de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Y a-t-il convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ pour $x \in D$?
- Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur D ?
- Soit $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $I_a = \mathbb{R} \setminus [-a; a]$?

6.150 CCINP PSI 2022 Élouan Princelle I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$.

- Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
- Déterminer les valeurs de α telles que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx$.
- Peut-on intervertir les symboles “intégrale” et “limite” comme ci-dessus si $\alpha = \frac{3}{2}$?

6.151 CCINP PSI 2022 Camille Pucheu II

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi : I = [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|\varphi(x)| \leq c|x|$.

On cherche les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $(P) : f(0) = 0$ et $\forall x \in I$, $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

- Montrer que $\sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est continue sur I .
- Montrer que S est solution de (P) .
- Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.
- En déduire l'ensemble des solutions de (P) .
- Si on suppose φ de classe C^1 sur I , montrer que S est aussi de classe C^1 sur I .

6.152 CCINP PSI 2022 Thibault Sourdeval II

En cas de convergence, on pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} dx$.

- Montrer que I existe.
- Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.
- En déduire la valeur numérique de I . Indication : on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6.153 CCINP PSI 2022 Guillaume Tran-Ruesche I Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$.

- a. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

6.154 Mines-Télécom PSI 2022 Paul Sterlin II

Soit $t \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2 + t^2}$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de f .
- b. Étudier la continuité de f sur D .
- c. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et trouver un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

6.155 Centrale Maths1 PSI 2023 Antoine Jeanselme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$.

- a. Montrer la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0; 1]$.
- b. Est-ce qu'il y a convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0; 1]$?
- c. Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

6.156 Centrale Maths1 PSI 2023 Arthur Séguette

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}} dx$.

- a. Vérifier que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.
- b. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geq 0}$.
- c. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- d. En déduire un équivalent de I_n .

6.157 Mines PSI 2023 Paul Bats I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

- a. Trouver le domaine de définition D de f .
- b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D .
- c. Pour $x \in D$, calculer $xf(x) - f(x+1)$.
- d. En déduire des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$.
- e. Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$.

6.158 Mines PSI 2023 Rémi Darrieumerle I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

- a. Déterminer les ensembles de définition de η et ζ .
- b. Pour $x > 1$, exprimer $\eta(x)$ en fonction de $\zeta(x)$.
- c. Montrer que η est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
- d. Trouver deux réels a et b tels que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{a}{x-1} + b + o(1)$.

6.159 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel III et Tom Graciet III

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

6.160 *Mines PSI 2023* Alban Dujardin I En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

- Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .
- Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+ .
- Quelles sont les variations de f ?
- Trouver les limites de f en $\pm\infty$.
- Tracer la courbe représentative de f .

6.161 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer I

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$ et $v_n = \int_2^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n dx$.

- Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} n \int_0^1 e^{-1/t} dt$.
- En déduire un équivalent simple de u_n .

6.162 *CCINP PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\exists C > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$.

On pose $f : x \mapsto \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi(x+n) + \varphi(x-n))$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

- Montrer que f est bien définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est 1-périodique.
- Montrer que $\varphi \times g$ est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

6.163 *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^p}$ et, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln^n(x) dx$.

- Montrer l'existence de $I_{n,p}$ pour toutes valeurs des entiers naturels n et p .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{n,p} = -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p}$.
- Montrer que f est intégrable sur $]0; 1]$.
- Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

6.164 *CCINP PSI 2023* Hugo Delval II

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en cas de convergence.

- Déterminer l'ensemble D_f de définition de f .
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.
- f est-elle continue sur D_f ? Calculer sa limite en $+\infty$.
- Montrer que $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$. En déduire un équivalent de f en 0^+ .
- Étudier la convergence normale et uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur D_f .

6.165 CCINP PSI 2023 Fares Kerautret I

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{e^{-x} x^n}{n!}$.

En cas de convergence, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

- Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{R}_+ .
- Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{R}_+ .
- Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur \mathbb{R}_+ . Calculer $f(x)$.
- Soit $a > 0$, montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0; a]$.
- Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur \mathbb{R}_+ .

6.166 CCINP PSI 2023 Arthur Melnitchenko II et Marie-Lys Ruzic II

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$ existe et que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2}$.

6.167 CCINP PSI 2023 Sacha Meslier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin(nx e^{-nx^2})$.

- Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.
- Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a; 1]$ avec $a \in]0; 1[$.
- En considérant $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[-1; 1]$?

6.168 Mines-Télécom PSI 2023 Armand Dépée II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$.

- Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.
- Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ (question rajoutée).

6.169 Centrale Maths1 PSI 2024 Antoine Métayer

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

On définit aussi $f :]-1; 0[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$.

- Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
- Montrer que f est bien définie et que $\forall x \in]-1; 0[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{n \cdot n!}$.

6.170 *Mines PSI 2024* Tristan Cheyrou II

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

- Justifier que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est bien définie.
- Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à déterminer.
- Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.
- En déduire la nature de $\sum_{n \geq 2} (I_n - \ell)$.

6.171 *Mines PSI 2024* Tiago Genet II

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{R}_+^* par $\forall x > 0$, $f_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right)$.

Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}_+^* .

6.172 *Mines PSI 2024* Lucie Girard I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt$.

- Montrer la convergence de la suite $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$. On note γ sa limite.
- Établir la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$. On note $I = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$.
- Prouver l'existence de I_n et trouver un lien simple entre I_n et H_n .
- Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et trouver un lien entre γ et I .

6.173 *Mines PSI 2024* Valentine Girard III

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

6.174 *Mines PSI 2024* Jasmine Meyer I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

- Montrer que S est définie sur \mathbb{R} .
- Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur \mathbb{R} ?
- Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- Donner un équivalent simple de $S(x)$ quand x tend vers 0. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- Y-a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur \mathbb{R} ?

6.175 *CCINP PSI 2024* Amélia Arangoits I Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

- Déterminer le domaine de définition D de S selon les valeurs de a .

Dans la suite de l'exercice, on impose $|a| < 1$.

- Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour $x > 0$.
- Trouver un équivalent de S en 0.
- Déterminer la limite de S en $+\infty$.
- Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

6.176 CCINP PSI 2024 Amjad Belmiloud II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin(nx e^{-nx^2})$.

- Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.
- Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a; 1]$ avec $a \in]0; 1[$.
- En considérant $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[-1; 1]$?

6.177 CCINP PSI 2024 Olivier Farje I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1 + nx^2)}{n^2}$. Soit la fonction S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- Montrer que S est définie sur \mathbb{R} .
- Montrer que S est continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .
- Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- Déterminer $S(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- Trouver un équivalent de $S'(x)$ quand x tend vers 0^+ .

6.178 CCINP PSI 2024 Lucie Girard I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Soit la fonction S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- Déterminer le domaine de définition D de S .
- Montrer que S est continue sur D .
- Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u'_n$ sur D ?
- Calculer $S'(x)$ pour x convenable.
- En déduire une expression simple de $S(x)$ pour $x \in D$.

6.179 Mines-Télécom PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{1}{n^2 x + n}$. Soit aussi f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer qu'il existe un réel a tel que $\forall x > 0$, $\left| f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{a}{x^2}$.
- En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

6.180 Mines-Télécom PSI 2024 Romane Mioque II

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

- Justifier que f est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Trouver des réels a et b tels que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

6.6 Officiel de la Taupe

6.181 *OdT 2012/2013 Mines PSI planche 183 I*

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que $I_n = \int_0^1 t^n |\ln(1-t)|^\alpha dt$ soit convergente. Calculer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n \geq 0} I_n$ converge-t-elle ?

6.182 *OdIT 2012/2013 CCP PSI planche 211 II*

Donner l'ensemble de définition de la série de fonctions $S(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ et étudier sa continuité et sa dérivabilité sur cet ensemble. Exprimer S .

6.183 *OdT 2012/2013 Télécom SudParis PSI planche 252 II*

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-t}) dt$.

6.184 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 152I*

Calculer $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta$.

6.185 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 161I*

Pour $t \in [0; 1]$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2} (t - f_n(t))^2$.

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$.

6.186 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 229II*

On définit $(f_n)_{n \geq 1}$ par $\forall n \geq 1$, $f_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)} \right)$.

a. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$.

b. Montrer que $g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ admet une limite en $+\infty$ et calculer cette limite.

6.187 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 236II*

a. Montrer que l'ensemble $E = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) \mid \exists \alpha > 1, f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right) \right\}$ est stable pour le produit des fonctions et que toute fonction f de E est intégrable sur \mathbb{R} .

b. Soit $f \in E$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de E vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1$ et $h_n(x) = nh(nx)$.

Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h_n(x) dx$ converge et trouver sa limite.

6.188 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 238II*

a. Ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

c. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

6.189 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 275I*

- a. Résoudre $\sinh(t) = 1$.
- b. On note $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$ et $I_n = \int_0^\alpha \sinh^n(t) dt$. Étudier la convergence de $(I_n)_{n \geq 0}$.
- c. Montrer que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ puis trouver un encadrement et un équivalent de I_n .

6.190 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 286I*

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et f la somme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$, lorsqu'elle existe.

- a. Donner l'ensemble D_f de définition de f .
- b. Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ ($a > 0$). Étudier sa convergence normale sur D_f .
- c. f est-elle continue sur D_f ? Calculer sa limite en $+\infty$.
- d. Montrer que $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$. En déduire que $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$.

6.191 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 291I*

- a. Domaine de définition de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx} dt}{e^t - 1}$.
- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Simplifier $f(x-1) - f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ sous forme de série.
- c. Peut-on obtenir ce résultat par une autre méthode ?

6.192 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 293II*

Pour $t \in]0; 1]$, on pose $f_{n,p}(t) = t^n (\ln t)^p$, $\Phi(t) = t^t$ et $I = \int_0^1 \Phi(t) dt$.

- a. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^n}$ converge et justifier que I est définie.
- b. Montrer que $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt$ existe et calculer sa valeur.
- c. Montrer que $I = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k} \right)^k$.

6.193 *OdlT 2014/2015 E3A PSI planche 318II*

Pour $f_0 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on pose $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ pour $x \in [a; b]$.

- a. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 0} f_n$? On note F la somme de cette série.
- b. Montrer que $\forall x \in [a; b]$, $F(x) = f_0(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f_0(t) dt$.

6.194 *OdlT 2014/2015 E3A PSI planche 322III*

Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx$.

6.195 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 114I*

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 0$ si $|x| \geq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = n - n^2|x|$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$. Si Φ est continue sur \mathbb{R} et $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \Phi(x) dx$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

6.196 OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 115II

Montrer que $f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{1+nt}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

Calculer sa limite en $+\infty$ et montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

6.197 OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 117II

Montrer que $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ est définie et de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.

Donner les variations de ζ et sa limite en $+\infty$. Donner un équivalent de ζ en 1^+ .

6.198 OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 124II

Soit (f_n) une suite uniformément convergente de fonctions continues sur $[a; b]$; que dire des suites de terme général $u_n = \max_{x \in [a; b]} f_n(x)$ et $v_n = \min_{x \in [a; b]} f_n(x)$?

6.199 OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 125II Domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.

Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R} et calculer cette intégrale.

6.200 OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 236I

Résoudre $\operatorname{sh} x = 1$. Trouver la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{sh}^n t dt$.

Montrer que $\forall n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$, en déduire un encadrement puis un équivalent de I_n .

6.201 OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 237I et 243II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2 \ln(1+n)}$. Domaine de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

Soit $S(x)$ sa somme ; montrer que S est de classe C^1 sur D .

6.202 OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 242II

La série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

6.203 OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 244I Convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx$.

Écrire I sous la forme d'une série numérique à l'aide du développement en série entière de $\ln(1-x)$.

6.204 OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 245II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+xn^2}$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge ; on note Δ cet ensemble et $S(x)$ la somme. Montrer que S est C^1 sur Δ .

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; donner un équivalent simple de S en $+\infty$.

6.205 OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 246I

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$ est convergente et que $I = \int_0^1 t^t dt$ existe. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f_{n,p}(t) = t^n (\ln t)^p$.

Montrer que $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt$ existe et la calculer. Montrer enfin que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

6.206 OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 267II

Équivalent en $+\infty$ de $I_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$.

6.207 OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 270I

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} dx$.

Montrer que $I(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \frac{a}{n^2 + b}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

En déduire un équivalent de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

6.208 OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 279I

Existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx$. Montrer que $I = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + n^2}$.

6.209 OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 286II

Montrer la convergence et la continuité de $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n + x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Montrer que f est équivalent à $\frac{1}{x}$ en 0^+ .

6.210 OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 40III

Calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$. Montrer que $\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. En calculer la valeur exacte.

6.211 OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 107I

Justifier que $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1 - x \sin^2(t)} dt$ est définie sur $]-\infty; 1[$. Développer f en série entière.

6.212 OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 108I

Justifier l'existence de $\int_0^1 e^{-t} \ln(t) dt$ puis en donner une valeur approchée sous forme de nombre rationnel à 10^{-3} près (on pourra faire apparaître un développement en série entière usuel).

6.213 OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 115I

Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$. Équivalent de f en $+\infty$?

6.214 OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 117I

Établir la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ si $f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge-t-elle ?

6.215 OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 159

Montrer la convergence pour $x \in \mathbb{R}^*$ de $f(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$. f admet-elle une limite en $+\infty$?

Si oui la calculer. Étudier également l'existence d'une limite en 0 . On note \tilde{f} la fonction prolongée par continuité en 0 ; trouvez une série de fonctions $S(x)$ coïncidant avec \tilde{f} sur un intervalle $[0, h[$.

6.216 OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 160

Montrer, pour $a > 0$, que $I_a : x \mapsto \int_0^x \frac{t^{a-1}}{t+1} dt$ est C^1 sur son ensemble de définition. Ensemble de définition de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+a}$? Trouver une équation différentielle vérifiée par S , puis une relation entre I et S .

6.217 OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 203II

Montrer la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ si $f_n(x) = x^n \frac{e^{-x}}{n!}$ puis étudier $\sum_{n \geq 0} f_n$.

6.218 OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 207I

Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ telle que $f_n(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f_n(x) = x \sin^{2n} \left(\frac{1}{x} \right)$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0; 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

6.219 OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 212I

Convergence simple de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ telle que $f_n(x) = \cos \left(\frac{(n+1)x}{n} \right)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment ? Sur \mathbb{R} ?

6.220 OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 217I

Domaine de convergence D de $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$. La convergence est-elle normale sur D ? On note R_n le reste d'ordre n . Montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et en déduire que S est continue. S est-elle intégrable ?

6.221 OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 252I

Énoncer le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ réelles bornées, telles que $\exists c < d$, $\forall x \in [c; d]$, $(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))_{n \geq 0}$ tend vers 0. Montrer que $\exists \varphi_n \in \mathbb{R}$, $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \varphi_n)$.

Calculer $I_n = \int_c^d (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2 dx$. Montrer que $I_n \geq \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d-c)}{4}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ convergent vers 0.

6.222 OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 113I

Soit $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$ pour $t > 0$.

Déterminer le domaine de définition de $S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)$ et montrer que S converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0; a]$ avec $a \in]0; 1[$. En est-il de même sur $]0; 1[$?

Montrer que S est continue sur $]0; 1[$. Est-elle dérivable sur ce même intervalle ?

6.223 OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 114I et compléments planches Mines PSI 178I et CCP PSI 441I

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$; on donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Donner le domaine de définition I de $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

Montrer que f est continue et décroissante sur I .

Trouver la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de f en 0. Déterminer $f(I)$.

6.224 OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 120I

Étudier les convergences simple et uniforme de $\sum_{n \geq 0} u_n$ si $u_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+n}$.

On note f sa somme ; f est-elle continue ? Dérivable ? Donner ses limites en 0 et $+\infty$.

6.225 OdlT 2017/2018 ENSAM PSI planche 241II

Existence de $I = \int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx$. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ puis calculer I avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6.226 Compléments OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 153I

Existence de $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} dx$. Montrer que I est de classe C^1 .

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{b+n^2}$.