SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 6 SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

6.1 Modes de convergence

6.1 **a.** $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

b. C'est RIEMANN. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n \leqslant f_1$ (binôme) intégrable : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (TCD).

c. On arrive par ce changement à $I_n = nW_{2(n^2-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

d. Une petite étude de fonctions suffit ou les formules de TAYLOR reste intégral. On déduit de cette inégalité que $\forall x \in [0\,;\sqrt[4]{n}],\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant e^{-x^2}\left(e^{\frac{x^4}{2n^2}} - 1\right) \leqslant \left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right)$. De même $\underset{x\in[\sqrt[4]{n}\,;+\infty]}{\text{Sup}} \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant f_n(\sqrt[4]{n})$ qui tend vers 0^+. D'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

6.2 **a.** Il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 car $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{nx^2}$ pour x fixé. Par contre, en étudiant la fonction f_n qui vérifie $f_n(0) = n$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et qui a deux extrema locaux, on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^*$ mais seulement sur des intervalles $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$ ou $[b\,;c]$ avec $b < c < 0$.

b. f_n est prolongeable par continuité en 0 et vérifie $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ donc I_n existe. Avec le changement de variable $u = nx$ dans I_n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/n}}{1+u^2}$. Par convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}$.

6.3 **a.** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

b. Il suffit de prendre, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n telle que $\forall x \in [-n\,;n],\ f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

c. Pour $\varepsilon > 0$, comme $g + |f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe $m > 0$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-m} \big(g + |f|\big) + \int_m^{\infty} \big(g + |f|\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Ensuite, sur le segment $[-m\,;m]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-m}^{m} f_n = \int_{-m}^{m} f$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|\displaystyle\int_{-m}^{m}(f_n - f)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Enfin, $\forall n \geqslant n_0,\ \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n - \int_{-\infty}^{+\infty} f\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (f_n - f)\right| \leqslant \left|\int_{-m}^{m}(f_n - f)\right| + \int_{-\infty}^{-m} \big(g + |f|\big) + \int_m^{\infty} \big(g + |f|\big) \leqslant \varepsilon$.

6.4 La suite $(f_n)_{n_in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = 0$ par croissance comparée. Pour $n \geqslant 1$, f_n est clairement dérivable et $f'_n(x) = n\big(\sin(x)\big)^{n-1}\Big[n - (n+1)\sin^2(x)\Big]$ donc la fonction f_n est positive et maximale en le réel $x_n = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right)$. Ainsi, en se servant de la formule $\cos(\text{Arcsin}\, y) = \sqrt{1-y^2}$ et de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{e}$ obtenue en passant par l'exponentielle : $||f_n||_\infty = f_n(x_n) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{e}}$ ce qui fait que la convergence n'est pas uniforme. On aurait aussi pu constater que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n = \left[n\frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\pi/2}$ tend vers 1 qui est différent de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f = 0$ donc la convergence ne peut pas être uniforme.
Par contre, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, pour un réel $a \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et dès que n est suffisamment grand, on a $||f_n||_{\infty,[0;a]} = f_n(a)$ qui tend vers 0 donc la convergence est uniforme sur $[0; a]$.

6.5 On calcule : $\forall x \geqslant 0,\ f_1(x) = \int_0^x dt = x,\ f_2(x) = \int_0^x \sqrt{t}dt = \frac{2x^{3/2}}{3},\ f_3(x) = \int_0^x f_2(t)dt = \frac{4x^{5/2}}{15}$. On poursuit et on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \frac{2^{n-1}x^{n-\frac{1}{2}}}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)} = \frac{2^{2n-1}n!x^{n-\frac{1}{2}}}{(2n)!}$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4x(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ d'où la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers la fonction nulle. Bien sûr cette convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ car $\operatorname{Sup}\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x) = +\infty$ mais si on fixe $a \geqslant 0$, $||f_n||_{\infty,[0;a]} = f_n(a)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $[0;a]$.

6.6 Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nx}{n+1} = x$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f = \cos$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $f_n\big((n+1)\pi\big) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ et $f\big((n+1)\pi\big) = (-1)^{n+1}$ donc $||f_n - f||_\infty = 2$ et on n'a donc pas de convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}$. Par contre, si on fixe $a > 0$, $\forall x \in [-a;a]$, $|f_n(x) - f(x)| = \left|\cos(x) - \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)\right| \leqslant \left|x - \frac{nx}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leqslant \frac{a}{n+1}$ car $\cos$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ donc on a convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[-a;a]$.

6.7 **a.** Si $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(0) = 0$. Si $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f_n(x) = e^{\frac{\ln(\sin x)}{n}}$ donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ sinon. Comme $||f_n - f||_\infty = 1$, il n'y a pas convergence uniforme sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par contre, comme f_n est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ pour $n \geqslant 1$, pour $a \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $||f_n - f||_{\infty,[a;\frac{\pi}{2}]} = 1 - f_n(a) \to 0$ donc il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $\left[a;\frac{\pi}{2}\right]$.

b. Les f_n sont majorées par f d'où la convergence dominée de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f = \frac{\pi}{2}$.

6.8 Si $x > 1$, il y a divergence grossière par croissance comparée. Si $x \in]0;1[$, on a $\frac{x^n \ln(x)}{H_n} \underset{\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée encore donc la convergence simple de la série se fait sur $]0;1]$ (évident en 1).
La fonction u_n atteint son maximum sur $]0;1]$ en $e^{-\frac{1}{n}}$ en dérivant f_n donc $||f_n||_{\infty,]0;1]} = \frac{1}{enH_n} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{en\ln(n)}$ et la convergence n'est pas normale sur $]0;1]$ par les séries de Bertrand. Si $a \in]0;1[$, on a $||f_n||_{\infty,]0;a]} = f_n(a)$ dès que n est assez grand (si $e^{-\frac{1}{n}} < a$) et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(a)$ converge, on a la convergence normale sur $]0;a]$.
De plus, si $x \in]0;1[$ et $n \geqslant 1$, comme les fonctions u_k gardent un signe constant et que la suite $(H_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on a $|R_n(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leqslant \frac{1}{H_{n+1}} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k|\ln x| = \frac{x^{n+1}}{H_{n+1}} \times \frac{|\ln x|}{1-x} \leqslant \frac{C}{H_{n+1}}$ en notant $C = ||g||_\infty$ si $g : x \mapsto \frac{\ln x}{1-x}$ prolongé en 1. Il y a donc convergence uniforme de cette série de fonctions.

6.9 **a.** La suite $(||f_n||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive d'après les hypothèses car pour $x \in [a;b]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0. Ainsi $||f_n||_\infty = \operatorname{Sup}\limits_{x\in[a;b]} f(x) = \operatorname{Max}\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f_n(x_n)$ car f est continue sur un segment donc y atteint ses bornes.

c. $p \in \mathbb{N}$ étant fixé, on a, pour tout $n \geqslant p$, $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, elle admet une suite extraite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass : $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $c \in [a;b]$. Mais comme $\varphi(n) \geqslant n$, on a $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f_p(x_{\varphi(n)})$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty \leqslant f_p(c)$. Mais ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, en passant à la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty = 0$ donc la convergence de la série de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est uniforme.

6.2 Fonctions définies par une série de fonctions

6.10 **a.** Divergence grossière pour $x \leqslant 0$ et convergence si $x > 0$ car $e^{-x\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2}$. Si $a > 0$ et qu'on pose $f_n : x \to e^{-x\sqrt{n}}$, $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(a)$ converge donc la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $[a;+\infty[$. Comme les f_n sont toutes continues, on a bien f continue.

b. Toutes les f_n sont strictement décroissantes, donc f aussi par convergence simple.

Par le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

c. On utilise une comparaison série-intégrale : comme $t \to e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$. On somme ces inégalités : $\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt$ or $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}du$ avec le changement de variable $t = \frac{u^2}{x^2}$ et par IPP, on trouve le résultat $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}$ et $\int_0^1 e^{-x\sqrt{t}}dt$ est une constante donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

6.11 **a.** La convergence simple relève du critère spécial des séries alternées. Il y a convergence normale sur $[a\,;+\infty[$ si $a > 0$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$; donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Par CVN sur $[1\,;+\infty[$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-1)^n}{1+2^n x}\right) = 0$. On a aussi, pour tout réel $x > 0$, $xf(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n + \frac{1}{x}}$ et il y a encore CVN sur $[1\,;+\infty[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} xf(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

6.12 **a.** La convergence simple relève du critère spécial des séries alternées. Il y a convergence uniforme (et pas normale) sur $[a\,;+\infty[$ pour $a > 0$ car alors $\left|\sum\limits_{n=p}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{pa+1}$; donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On a aussi convergence uniforme de la série des dérivées sur $[a\,;+\infty[$ car $\left|\sum\limits_{n=p}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}\right| \leqslant \frac{p}{(pa+1)^2}$ dès que $p(p+1)a^2 \geqslant 1$ car alors $\forall x \geqslant a,\ \forall n \geqslant p,\ \frac{n}{(1+nx)^2} \geqslant \frac{(n+1)}{(1+(n+1)x)^2}$. Par un théorème du cours : f est alors de classe C^1 sur $[a\,;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\forall x > 0,\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}$.

c. Par CVU sur $[1\,;+\infty[$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}\right) = 1$. Pour $x > 0$, $x\big(f(x)-1\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{x}}$ et il y a encore CVU sur $[1\,;+\infty[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x\big(f(x)-1\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

d. On regroupe les termes 2 par 2. Si $g_x(t) = \frac{x}{(2tx+1)\big((2t+1)x+1\big)} = \frac{1}{2tx+1} - \frac{1}{(2t+1)x+1}$, g_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x > 0,\ \frac{\ln(1+x)}{2x} = \int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant g_x(0) + \int_0^{+\infty} g_x(t)dt = \frac{x}{x+1} + \frac{\ln(1+x)}{2x}$. Par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{2}$.

6.13 **a.** Si $x=0$, on a $\forall n \geqslant 1,\ u_n(0)=0$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n^2x^2)}{n^2\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument ($u_n(x)>0$) par le critère de RIEMANN.

Ainsi le domaine de convergence cherché est $D=\mathbb{R}$.

b. La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers S sur $\mathbb{R}$ (on vient de le voir).

Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: c'est clair !

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \dfrac{2x}{(1+n^2x^2)\ln(1+n)} = \dfrac{\varphi(nx)}{n\ln(1+n)}$ avec $\varphi : t \to \dfrac{2t}{1+t^2}$. Une identité remarquable montre que $|\varphi(t)| \leqslant 1$ avec $\varphi(1)=1$. Ainsi $||u_n'||_\infty = \dfrac{1}{n\ln(1+n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et on sait (série de BERTRAND) que $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge. La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$.

À terminer.

6.14 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement d'après RIEMANN. Comme les fonctions f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, si $a>0$, on a $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{1}{n+n^2a}$ donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ et la somme de la série $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ y est continue car chaque f_n est continue. Chaque f_n est décroissante donc S l'est aussi par somme.

b. Par convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[1;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ avec le théorème de la double limite. Pour $x>0$, $xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n+n^2x}$ et $||g_n||_{\infty,[0;+\infty[} = \dfrac{1}{n^2}$ en posant $g_n(x) = \dfrac{x}{n+n^2x}$; par le théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

c. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, par comparaison série-intégrale, classiquement en sommant les inégalités $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t(1+tx)}$ pour $n \geqslant 2$, on a l'encadrement : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \ln(1+x)-\ln(x)$ donc on obtient l'équivalent $S(x) \underset{\infty}{\sim} -\ln(x)$.

6.15 **a.** Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n(n+x)}$ continue sur $]-1;+\infty[$. Pour $(a,b) \in]-1;+\infty[^2$ tel que $a \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant b$, on a $||f_n||_{\infty,[a;b]} = \dfrac{b}{n(n+a)}$ avec $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{b}{n(n+a)}$ qui converge d'après RIEMANN donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément vers S. Alors S est continue sur $[a;b]$ donc sur $]-1;+\infty[$.
Chacune des fonctions f_n est croissante sur $]-1;+\infty[$ donc, par somme : S est croissante sur $]-1;+\infty[$.

b. Soit $x>-1$, $S(x+1)-S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+x}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right) = -1 + \dfrac{1}{x+1} + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}\right)$.
Par conséquent on a $S(x+1)-S(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et comme S est continue en 0, on a $S(x) \underset{-1^+}{\sim} -\dfrac{1}{x+1}$.

c. On prouve par récurrence simple avec la formule du **b.** que $\forall p \in \mathbb{N},\ S(p) = H_p = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et S est croissante donc $S(\lfloor x \rfloor) \leqslant S(x) \leqslant S(\lfloor x \rfloor + 1)$. Or il est connu que $H_p \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$ donc $S(\lfloor x \rfloor) \underset{+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$. Même chose pour $S(\lfloor x \rfloor + 1)$. Par conséquent : $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

6.16 **a.** Pour $n \geqslant 0$, les fonctions $f_n : x \to \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. D'après le CSSA, il y a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vers S. Pour tout réel $a > 0$, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+a)^2}$ converge d'après RIEMANN donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a;+\infty[$. Ainsi, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, S est de classe C^1 sur $[a;+\infty[$, ce qui est vrai pour tout $a > 0$ donc S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Toujours d'après le CSSA, le signe de $S'(x)$ est celui du premier terme de cette série (qui est $-\dfrac{1}{x^2}$) et S est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On a pour $x > 0$: $S(x+1)+S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1+x} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \dfrac{1}{x}$. Alors, comme S est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x+1) = S(1)$ donc, comme $S(x) = \dfrac{1}{x} - S(x+1)$, cela donne $S(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

c. S est décroissante, pour $x > 1$: $\dfrac{1}{x} = S(x) + S(x+1) \leqslant 2S(x) \leqslant S(x) + S(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$ donc $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

6.17 **a.** Pour $n \geqslant 0$, les fonctions $f_n : x \to \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$. D'après le CSSA ou car $\dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$, il y a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vers S. De plus, pour tout réel $a > 0$, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{1}{n!(n+a)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!(n+a)^2}$ converge violemment donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a;+\infty[$. Ainsi, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, S est de classe C^1 sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$. D'après le CSSA, le signe de $S'(x)$ est celui du premier terme de cette série (qui est $-\dfrac{1}{x^2}$) et S est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $x > 0$: $xS(x) - S(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x}{n!(n+x)} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(n+x)} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = \dfrac{1}{e}$. Comme S est continue en 1, $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x+1) = S(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{e}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} xS(x) = \dfrac{1}{e} + 1 - \dfrac{1}{e} = 1$: $S(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

c. Par le CSSA, pour $n \geqslant 0$, $|R_n(x)| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!(k+x)}\Big| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!(n+x+1)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ donc la convergence de la série de fonctions est uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut utiliser le théorème de double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\dfrac{1}{e} + S(x+1)\Big) = \dfrac{1}{e}$ donc $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{ex}$.

6.18 **a.** Pour $k \in \mathbb{N}$, on a f_k continue en k et classiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = e^{-k}$ donc f_k est bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\forall x \geqslant k,\ f_k(x) = e^{x\ln(1-\frac{k}{x})} \leqslant e^{-k}$ (grâce à $\ln(1-u) \leqslant -u$) donc $||f_k||_\infty = e^{-k}$. Mais $\sum\limits_{k\geqslant 0}^{+\infty} e^{-k}$ converge (série géométrique) donc $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

b. On pose $p = n - k$ dans $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \Big(\dfrac{p}{n}\Big)^n$ et on a donc $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(1 - \dfrac{k}{n}\Big)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$. On note S la somme de la série précédente donc $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et par le théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \dfrac{1}{1-e^{-1}} \simeq 1,58$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S(n) = \dfrac{e}{e-1}$.

6.19 **a.** Grâce au binôme de NEWTON, pour $p \in \mathbb{N}$, on a la suite suivante d'égalités :

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \sum_{k=0}^{p} f_k(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) \text{ car } f_k(p) = 0 \text{ si } k > p.$$

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\forall x \geqslant 0,\ |f_k(x)| \leqslant \dfrac{|z|^k}{k!}$ et $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{|z|^k}{k!}$ converge (série exponentielle) donc la convergence de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} f_k$ est normale sur $\mathbb{R}_+$. Or, si $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant 0} f_k(n)$ converge vers $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ d'après la question **a.**.
Par le théorème de la double limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}$.

On ne considère que les entiers ce qui donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!} = e^z$.

6.20 **a.** Par le critère de RIEMANN, la convergence simple se fait sur l'intervalle $[0;1]$.

Notons pour $n \geqslant 1$ les fonctions $f_n : x \to \dfrac{x^n}{n^2}$ et $g_n : x \to \dfrac{(1-x)^n}{n^2}$; soit $a \in [0;1[$, les f_n sont de classe C^1 sur $[0;a]$ et on a $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n}$ donc $||f_n'||_{\infty,[0;a]} = \dfrac{a^{n-1}}{n}$ avec la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{a^{n-1}}{n}$ qui converge donc il y a convergence normale (donc uniforme) de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n'$ sur $[0;a]$ (mais pas sur $[0;1]$ car $||f_n'||_{\infty,[0;1]} = \dfrac{1}{n}$), ainsi en vertu du théorème de dérivation des séries de fonctions, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ qui est de classe C^1 sur $[0;a]$, et ceci étant vrai pour tout $a \in [0;1[$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ qui est de classe C^1 sur $[0;1[$. De même, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$ est de classe C^1 sur $]0;1]$. Par conséquent, f est de classe C^1 sur $]0;1[$ par somme.

b. Pour $x \in]0;1[$, on a $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-(1-x)^{n-1}}{n} = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ (classique sur les séries entières). On reconnaît la dérivée de $x \mapsto -\ln(x)\ln(1-x)$ dans l'expression précédente donc, comme $]0;1[$ est un intervalle, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = k - \ln(x)\ln(1-x)$. Le rappel $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ nous donne $f(0) = f(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et il est clair que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = f(1-x)$ mais ça ne nous donne pas la continuité de f en 0 ou en 1. Il faut revenir à la convergence normale des séries $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$ sur $[0;1]$ (par RIEMANN, pour conclure que f est continue sur $[0;1]$ (car les f_n et g_n sont continues sur $[0;1]$).
Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \big(k - \ln(x)\ln(1-x)\big) = k$. Enfin : $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

6.3 Convergence dominée

6.21 On pose $u = \psi(t) = nt$ et la fonction ψ est bijective strictement croissante et C^1 de $[0;1]$ sur $[0;n]$ donc $I_n = n\displaystyle\int_0^1 f(t)\ g(nt)dt = \int_0^n f\left(\frac{u}{n}\right)g(u)du = \int_{\mathbb{R}_+} \chi_{[0;n]}(u) f\left(\frac{u}{n}\right)g(u)du$. Or f est continue sur un segment donc bornée (par $M > 0$) et $f_n : u \mapsto \chi_{[0;n]}(u) f\left(\dfrac{u}{n}\right)g(u)$ converge simplement vers $u \mapsto f(0)g(u)$ sur $\mathbb{R}_+$ en étant dominée par la fonction intégrable $\varphi : u \mapsto Mg(u)$. Par le TCD : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = f(0)\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} g$ par linéarité.

6.22 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t dt = \int_{\mathbb{R}_+} f_n$ où $f_n(t) = \chi_{[0;n]}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t$. f_n est intégrable sur $[0;n]$ donc sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue par morceaux sur l'intervalle et $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ avec $\ln$ intégrable sur $]0;1]$. Cette suite de fonctions converge simplement vers $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle l'est sur $]0;1]$ (déjà vu) et aussi sur $[1;+\infty[$ car $f(t) \underset{+\infty}{=} \ = e^{\frac{-t}{2}}$ par croissance comparée. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(t)| \leqslant |f(t)|$ et $t \mapsto |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par le TCD : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$. Or, par IPP sur $[a;n]$ avec $a \in]0;n]$ en faisant tendre a vers 0 ensuite, on a $\displaystyle\int_a^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t dt = \left[\frac{n}{n+1}\Big(1-\big(1-\frac{x}{n}\big)^n\Big)\ln(t)\right]_a^n - \frac{1}{n+1}\int_a^n \frac{1-\big(1-\frac{x}{n}\big)^{n+1}}{1-\big(1-\frac{x}{n}\big)} dt$ d'où $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t dt = \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^k dt = \frac{n}{n+1}\Big[\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\Big]$.

6.23 $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant m \Longrightarrow \big|f(x)-\ell\big| \leqslant 1$ et $x \leqslant -m \Longrightarrow \big|f(x)-\ell'\big| \leqslant 1$. Comme f est bornée (car continue) sur le segment $[-m\,;m]$ et sur $]-\infty\,;-m]$ (par $|\ell'|+1$) et sur $[m\,;+\infty[$ (par $|\ell|+1$) d'après ce qui précède : f est bornée sur $\mathbb{R}$ (par M). D'abord on pose $g_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [-1;1]$, $g_n(x) = f(nx)$. Alors la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [-1;0[$, $h(x) = \ell'$; $h(0) = f(0)$ et $\forall x \in]0;1]$, $h(x) = \ell$. Elle est dominée par $M = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-1}^1 h = \ell + \ell'$.

6.24 On a convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{-x^2}{2}}$ elle-même continue. Par une étude de fonction, on trouve que $\forall t \in [0;1]$, $\cos(t) \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{4}$ car $\cos(1) \simeq 0,54$ donc $\forall n \geqslant 1$, $\forall t \in [0;n]$, $f_n(t) \leqslant e^{n^2\ln(1-t^2/(4n^2))} \leqslant e^{-t^2/4} = \varphi(t)$ avec φ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; on a aussi $f_n(t) \leqslant \varphi(t)$ si $t > n$.
Par le théorème de convergence dominée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6.25 $\forall n \geqslant 0, \forall t \in [0;1]$, $\dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$ qui est intégrable sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 dt = 1$ par CVD.

On effectue le changement de variables $u = t^n$ dans $1 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$ et $1 - I_n = \displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u}{1+u}u^{1/n-1}du$ or, par convergence dominée toujours : $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+u}u^{1/n-1}du \to \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln(2)$ donc $I_n = 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

6.26 Par changement $u = nt$, on a $\displaystyle\int_0^1 nf(t)e^{-nt}dt = \int_0^\infty \chi_{[0;n]}(u)f\big(\frac{u}{n}\big)e^{-u}du$. Comme f est continue sur un segment elle est bornée et on pose $M = ||f||_\infty$; alors $\forall n \geqslant 1$, $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\Big|\chi_{[0;n]}(u)f\big(\frac{u}{n}\big)e^{-u}\Big| \leqslant Me^{-u}$. Par convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nf(t)e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-t}dt = f(0)$.

6.27 **a.** La fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in [0;1]$, $f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t+t^2+\cdots+t^n}}$ est continue sur le segment $[0;1]$ ce qui assure la convergence de u_n pour $n \geqslant 1$. On a $u_1 = \big[2\sqrt{1+t}\big]_0^1 = 2\big(\sqrt{2}-1\big)$.
b. Pour $t \in [0;1[$, on a $f_n(t) = \sqrt{\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \sqrt{1-t}$. De plus $f_n(1) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 0 = \sqrt{1-1}$. Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in [0;1]$, $f(t) = \sqrt{1-t}$. Comme on a la domination : $\forall t \in [0;1]$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n(t)| \leqslant 1$, le théorème de convergence dominée montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \Big[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$.

c. Pour $n \geqslant 2$, on a $v_n = u_{n-1} - \frac{2}{3} = \int_0^1 (f_n - f) = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-t^n}}{\sqrt{1-t^n}}\sqrt{1-t}\,dt$ (le décalage d'un rang sert à se débarrasser de $n+1$ au profit de n). On effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = u^{\frac{1}{n}}$ avec φ qui est bien une bijection de classe C^1 de $]0;1[$ dans $]0;1[$ (les valeurs en 0 et 1 importent peu). Alors $v_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u}}u^{\frac{1}{n}-1}\sqrt{1-u^{\frac{1}{n}}}\,du$. On se sert de la fameuse formule $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ si $0 < a < b$ pour avoir $v_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{(1+\sqrt{1-u})\sqrt{1-u}}\sqrt{1-u^{\frac{1}{n}}}\,du$. Or, pour $u \in]0;1[$, on a $1 - u^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(u)}{n}$ ce qui nous conduit à poser $g_n(u) = \frac{u^{\frac{1}{n}}}{(1+\sqrt{1-u})\sqrt{1-u}}\sqrt{n(1-u^{\frac{1}{n}})}$ et on a alors $v_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 g_n$.

Or l'équivalent précédent montre que $\forall u \in]0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = g(u) = \frac{1}{(1+\sqrt{1-u})\sqrt{1-u}}\sqrt{-\ln(u)}$.

On constate que g est intégrable sur $]0;1[$ car elle y est continue, $\lim\limits_{u\to 1^-} g(u) = 1$ et $g(u) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$.

Il reste à dominer : $\forall u \in]0;1[$, $0 \leqslant g_n(u) \leqslant g(u)$ car on a l'inégalité classique : $1 - e^x \leqslant -x \Longleftrightarrow e^x \leqslant 1 + x$ avec $x = \frac{1}{n}\ln(u)$. Une nouvelle fois par le TCD : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n = \int_0^1 g = I > 0$ car $g \neq 0$.

Ainsi : $u_n - \frac{2}{3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{n^{\frac{3}{2}}}$.

6.4 Intégration terme à terme (différentes méthodes)

6.28 Si $f_n : t \to \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$, alors $||f_n|| = \frac{1}{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ donc la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue $f : t \to \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$. Comme $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{n^2+t^2} = \frac{\pi}{2n}$ et que la série harmonique diverge, on ne peut pas utiliser le TITT. On doit donc utiliser le théorème de convergence dominée en dominant les sommes partielles. Par le CSSA, en notant $S_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$, on a $|S_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement (et même normalement) vers la fonction f elle-même continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi(-1)^{k-1}}{2k} = \frac{\pi\ln(2)}{2}$.

6.29 Soit $f :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$. La fonction f est continue sur $]0;1[$ et $f(x) \underset{0}{\sim} x^{\alpha-1}$ donc f est intégrable par le critère de Riemann car $1 - \alpha < 1$. Pour $x \in]0;1[$, comme $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$, on a $f(x) = \frac{x^\alpha - 1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{\alpha+n-1}$. Si $f_n : x \to (-1)^n x^{\alpha+n-1}$, les fonctions f_n sont continues sur $]0;1[$, la fonction f aussi mais $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{n+\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+\alpha}$ diverge donc on ne peut pas utiliser le TITT.

Posons $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{\alpha+k-1} = x^{\alpha-1}\left(\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\right)$ la somme partielle de cette série de fonctions et majorons. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers f continue sur $]0;1[$ et chaque S_n est aussi continue. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0;1[$, $|S_n(x)| \leqslant \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x} = 2f(x)$ avec f qui est intégrable sur $]0;1[$ par Riemann. Ainsi, par le TCD : $\int_0^1 f = \int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

6.30 On sait (série entière géométrique) que : $\forall t > 0$, $\dfrac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} te^{-(a+bn)t}$. On définit alors $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = te^{-(a+bn)t}$ et on a f_n continue, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $f : t \mapsto \dfrac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}$ continue. Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{(a+bn)^2}$ par IPP. D'après RIEMANN, cette série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(a+bn)^2}$ converge donc par le TITT, on a f intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait par DL en 0 et comparaison en $+\infty$) et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

6.31 Soit $I =]0;1[$; pour $t \in I$, on a $f(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \ln t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en posant les fonctions $f_n : t \to (-1)^n t^{2n} \ln t$. Les f_n sont continues sur I et la somme $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ aussi. Les fonctions f_n sont intégrables sur I (c'est clair par prolongement par continuité en 0 si $n \geqslant 1$ et c'est parce que $f_0(t) \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ pour $n = 0$ avec critère de RIEMANN). De plus, par IPP : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\displaystyle\int_0^1 |f_n|$ converge, on a par le TITT l'intégrabilité de f sur I (ce qu'on savait) et les relations $\displaystyle\int_I f(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ (nombre de CATALAN).

6.32 Soit $I =]0;1]$ et $t \in I$, $f(t) = t^{x-1}e^{-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{x-1}\dfrac{(-1)^n t^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n : t \to \dfrac{(-1)^n t^{x+n-1}}{n!}$. Les f_n sont continues sur I et la somme $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ aussi. Les fonctions f_n sont intégrables sur I d'après RIEMANN et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n| = \left[\frac{t^{x+n}}{n!(x+n)}\right]_0^1 = \frac{1}{n!(x+n)}$.

Puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0}\displaystyle\int_0^1 |f_n|$ converge car $\dfrac{1}{n!(x+n)} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n!}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, le théorème d'intégration terme à terme nous donne l'intégrabilité de f sur I (ce qu'on savait par le critère de RIEMANN car $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$) et la relation $\displaystyle\int_I f(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

6.33 **a.** $f : t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{e^t - 1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ par RIEMANN et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $I(\alpha)$ est bien convergente.

b. Si $t > 0$, $e^{-t} \in]0;1[$, $f(t) = \dfrac{t^\alpha e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^\alpha e^{-(n+1)t}$ (série géométrique). Posons $f_n : t \mapsto t^\alpha e^{-(n+1)t}$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions f_n sont continues et positives sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeables par continuité en 0 et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le changement de variable $u = (n+1)t = \varphi_n(t)$ (facile à justifier), on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(n+1)^{\alpha+1}}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt$ converge par RIEMANN.

Par le TITT, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait) et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(n+1)^\alpha} = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)$.

Par exemple $I(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ car $\Gamma(n) = (n-1)!$. De même $I(3) = \Gamma(4)\zeta(4) = 6 \times \dfrac{\pi^4}{90} = \dfrac{\pi^4}{15}$.

6.34 Comme $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) \in [0;1[$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive, décroissante et minorée par 0. De plus, en posant $f_n : x \mapsto \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right]^n$, la suite de fonctions bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend simplement vers la fonction nulle sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par convergence dominée on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ convergeait, on aurait $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n|$ qui convergerait alors que les fonctions f_n sont continues sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) = \dfrac{1}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)}$ avec f qui est aussi continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. Alors on pourrait conclure par le TITT que f est intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f$. Or $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{8}{\pi^2 x^2}$ par développements limités ce qui fournit une contradiction. Par conséquent : $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

6.35 Pour $\theta \in [0;2\pi]$, on a $g_p(\theta) = \dfrac{e^{ip\theta}}{2+e^{i\theta}} = \dfrac{e^{ip\theta}}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{e^{i\theta}}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}e^{i(n+p)\theta}$. Posons donc les fonctions $f_n : \theta \mapsto \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}e^{i(n+p)\theta}$, alors $||f_n||_{\infty,[0,2\pi]} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2^{n+1}}$ converge donc il y a convergence normale donc uniforme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur le segment $[0;2\pi]$ vers g_p ; ainsi par un théorème du cours, $I_p = 0$ si $p > 0$ et $I_p = \int_0^{2\pi} g_p = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int_0^{2\pi} e^{i(n+p)\theta}d\theta = \dfrac{(-1)^p}{2^{-p+1}}\times(2\pi) = (-1)^p 2^p\pi$ si $p \leqslant 0$.

6.36 Par le critère de RIEMANN, cette intégrale est bien définie. Pour $x \in]0;1[$, $f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{\alpha+n-1}$. On pose alors $f_n : x \to (-1)^n x^{\alpha+n-1}$, les fonctions f_n sont continues sur $]0;1[$, la fonction f aussi mais $\int_0^1 |f_n| = \dfrac{1}{n+\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n+\alpha}$ diverge donc on ne peut pas utiliser le TITT.

Posons $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n x^{\alpha+n-1} = x^{\alpha-1}\dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$ la somme partielle de cette série de fonctions et majorons. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers f continue sur $]0;1[$ et chaque S_n est aussi continue. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0;1[$, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{2x^{\alpha-1}}{1+x} = \varphi(x)$ avec φ qui est intégrable sur $]0;1[$ par RIEMANN. Ainsi, par le TCD : $\int_0^1 f = \int_0^1\left(\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

6.37 D'abord, $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^t - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, clairement prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et on a $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $I = \int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{e^t-1}dt$ existe.

Pout $t > 0$, on a $\dfrac{1}{e^t-1} = \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ et $0 < e^{-t} < 1$ donc $\dfrac{1}{e^t-1} = e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$. On a donc $I = \int_0^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt$ en posant $f_n(t) = e^{-(n+1)t}\sin t$. $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f (on vient de le faire). f_n est clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$. Comme $|\sin t| \leqslant t$, il vient $\int_0^{+\infty}|f_n| \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}dt = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ (par IPP) et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Par le TITT, $\int_0^{+\infty} f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n$. Or $\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\sin t\,dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t+it}dt\right)$ donc $\int_0^{+\infty} f_n = \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{n+1-i}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2+1}$. Alors $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$.

6.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

6.38 **a.** Si $x > 0$ est fixé, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 x^a e^{-nx^2} = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge d'après RIEMANN. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudions f_n. On a $\forall x > 0,\ f_n'(x) = nax^{a-1}e^{-nx^2} - 2n^2x^{a+1}e^{-nx^2} = nx^{a-1}e^{-nx^2}\Big(a - 2nx^2\Big)$.
Si $a = 0$, f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $||f_n||_\infty = n$ donc, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} n$ diverge, pas CVN de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $a < 0$, f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $||f_n||_\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$ et encore moins CVN de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $a > 0$, $||f_n||_\infty = f_n\Big(\sqrt{\dfrac{a}{2n}}\Big) = \dfrac{a^{a/2}e^{-a/2}}{2^{a/2}n^{(a-2)/2}}$. Par RIEMANN, CVN de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ssi $a > 4$.
Si $a \in]0;4]$, par contre, dès que n est assez grand (c'est-à-dire $\sqrt{\dfrac{a}{2n}} \leqslant \alpha$), on a $||f_n||_{\infty,[\alpha;+\infty[} = f_n(\alpha)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(\alpha)$ converge (par convergence simple) donc il y a CVN de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[\alpha;+\infty[$.
Pour $a \in]0;4]$, s'il y avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait par le théorème de la double limite $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $S\Big(\sqrt{\dfrac{a}{2n}}\Big) \geqslant f_n\Big(\sqrt{\dfrac{a}{2n}}\Big)$ qui ne tend pas vers 0 (même vers $+\infty$ si $a < 4$). Ainsi pas de CVU de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $a \in]0;4]$.

b. Pour a quelconque et $x > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = x^a e^{-x^2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\big(e^{-x^2}\big)^{n-1}$ ce qui donne avec la formule de l'exercice de TD 11.1 (probas) : $S(x) = \dfrac{x^a e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$. Ainsi $S(x) \underset{0}{\sim} x^{a-4}$.

6.39 **a.** • S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = -\dfrac{1}{n}$, f_n n'est pas définie en x donc S ne peut pas l'être non plus.

• Si $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique diverge donc S n'est pas définie en 0.

• Pour $x \in D = \mathbb{R}^* \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \Big\{-\dfrac{1}{n}\Big\}$, $f_n(x)$ est bien défini pour tout entier n et $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN ($2 > 1$).

Par conséquent, le domaine de définition de S est exactement $D = \mathbb{R}^* \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \Big\{-\dfrac{1}{n}\Big\}$.

b. Les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc S aussi (la convergence simple suffit). En effet, si $0 < x \leqslant y$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) \geqslant f_k(y)$, en sommant, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(y) = S_n(y)$.
En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ (les limites existent), on a donc $S(x) \geqslant S(y)$.
Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k n^{k-1}}{(1+nx)^{k+1}}$. Si $a > 0$, on a donc $||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{n^{k-1}}{(1+na)^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2a^{k+1}}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[}$ converge, ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. La fonction S est donc de classe C^k sur $[a;+\infty[$ pour tout k donc C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[1;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ par application du théorème de la double limite. Pour $x > 0$,

$xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n+n^2x}$ et $||g_n||_{\infty,[0;+\infty[} = \frac{1}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} g_n(x)$ en posant $g_n(x) = \frac{x}{n+n^2x}$ car, par une étude de fonction, on montre que g_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de la double limite, on a encore $\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

d. Pour $x > 0$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_x(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k)$ par comparaison série-intégrale. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (S(x) existe et φ_x est continue sur $[1;+\infty[$ et $\varphi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{xt^2}$ donc φ_x est intégrable sur $[1;+\infty[$) et $\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_x(k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \varphi_x(1) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_x(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ donc on a l'encadrement $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$. Or $\frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1+tx-tx}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \Big[\ln(t) - \ln(1+tx)\Big]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$ car $\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t}{1+tx}\right) = -\ln(x)$ donc on a l'encadrement $\ln(1+x) - \ln(x) \leqslant S(x) \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) + \frac{1}{1+x}$ qui donne $S(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$ par le théorème des gendarmes car $\ln(1+x) - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(1+x) - \ln(x) + \frac{1}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$.

6.40 Par convergence uniforme : $\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_1,\ ||f_n - g||_\infty \leqslant \varepsilon_1$.
Par convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers y : $\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_2,\ |x_n - y| \leqslant \varepsilon_2$.
Par continuité de g en y : $\forall \varepsilon_3 > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \Delta,\ |x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon_3$.
Le moteur de l'exercice est l'inégalité triangulaire suivante :

$$|f_n(x_n) - g(y)| = |f_n(x_n) - g(x_n) + g(x_n) - g(y)| \leqslant |f_n(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(y)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, en prenant $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \Delta,\ |x-y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon_3$.
En prenant $\varepsilon_2 = \alpha > 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_2,\ |x_n - y| \leqslant \alpha$, en particulier $|g(x_n) - g(y)| \leqslant \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2}$.
En prenant $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ ||f_n - g||_\infty \leqslant \varepsilon_1 \Longrightarrow |f_n(x_n) - g(x_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Avec $n_0 = \mathrm{Max}(n_1, n_2)$: $\forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x_n) - g(y)| \leqslant |f_n(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Tout ceci garantit que $\lim_{n\to+\infty} \big(f_n(x_n) - g(y)\big) = 0$.

6.41 Soit $f : [0;2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(\theta) = e^{e^{i\theta} - i\theta} = e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!}$ car $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Ainsi, $f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i(n-1)\theta}}{n!}$. La fonction f est continue sur le segment $[0;2\pi]$ donc $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta$ existe. De plus, en posant $f_n(\theta) = \frac{e^{i(n-1)\theta}}{n!}$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant0} f_n$ converge normalement (donc uniformément) vers f sur $[0;2\pi]$ car $||f_n||_{\infty,[0;2\pi]} = \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant0} \frac{1}{n!}$ converge.

D'après un théorème du cours, on peut intervertir $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta$. Or pour tout $n \neq 1$, $\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta = \left[\frac{e^{i(n-1)\theta}}{i(n-1)n!}\right]_0^{2\pi} = 0$ et $\int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = 2\pi$. Ainsi, $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta = 2\pi$.

6.42 **a.** Posons $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$. Distinguons deux cas :

- Si $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$ donc la série $\sum_{n\geqslant0} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $x \geqslant 0$, comme $|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n\geqslant0} f_n(x)$ converge absolument par critère de Riemann et comparaison. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

b. (H_1) On a déjà vu la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+k}\dfrac{n^k e^{-nx}}{1+n^2}$.

(H_3) Soit $a > 0$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant a$, $|f_n^{(k)}(x)| = \dfrac{n^k e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \dfrac{n^k e^{-na}}{1+n^2}$, on peut conclure que $||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[} = |f_n^{(k)}(a)| = \dfrac{n^k e^{-na}}{1+n^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et, comme la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} ||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[}$ converge par comparaison : $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

D'après le cours, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+k}\dfrac{n^k e^{-nx}}{1+n^2}$.

On peut tout de même montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (et pas seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) en constatant que si $x \geqslant 0$ et si $n \geqslant 1$, on a la majoration $\left|\dfrac{f'_{n+1}(x)}{f'_n(x)}\right| = e^{-x}\dfrac{(n+1)(1+n^2)}{n(1+(n+1)^2)} \leqslant \dfrac{n^3+n^2+n+1}{n^3+n^2+n^2+2n} \leqslant 1$ car $e^{-x} \leqslant 1$ et $n+1 \leqslant n^2+2n$. Ainsi, comme $\Big(|f'_n(x)|\Big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées (car la suite $(f_n^{(k)}(x))_{n\geqslant 1}$ est alternée) ce qui montre que $\forall n \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left|T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)\right| \leqslant |f'_{n+1}(x)| = \dfrac{(n+1)e^{-nx}}{1+(n+1)^2} \leqslant \dfrac{(n+1)}{1+(n+1)^2}$. On en déduit donc que $||T_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{(n+1)}{1+(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f'_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, comme la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est avérée sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **a.**, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

c. Si $x > 0$, $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(n^2+1-1)e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(n^2+1)e^{-nx}}{1+n^2} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ (les deux séries convergent) donc $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-x})^n - f(x)$. On reconnaît une série géométrique de raison $-e^{-x} \in]-1;1[$ et f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle du second ordre suivante, $(E)\ :\ y'' + y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

Revenons sur la classe de f ! Comme $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = \dfrac{1}{2} - f(0)$ par continuité de f en 0, on peut déduire du théorème de prolongement C^1 (appliqué ici à la fonction f' en 0) que f est deux fois dérivable en 0 avec $f''(0) = \dfrac{1}{2} - f(0)$. Puisque $f''(0) = \lim_{x\to 0^+} f''(x)$, la fonction f'' est continue en 0 : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

Intervient maintenant la récurrence, si on suppose f de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}_+$ avec $k \geqslant 1$, la relation $f'' = g - f$ vraie sur $\mathbb{R}_+$ avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ d'après ce qui précède montre que, puisque f et g sont de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}_+$ (g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ par opérations), f'' est de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}_+$ donc f est de classe C^{2k+2} sur $\mathbb{R}_+$. Par principe de récurrence, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$: OUF !!!

6.43 Pour $x \geqslant 0$ fixé, on a $\dfrac{\ln(n+x)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n+x)}{n^2}$ converge absolument. Ceci nous permet donc de définir la fonction $S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(n+x)}{n^2}$.

En notant $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln(n+x)}{n^2}$, on vient de voir la convergence simple de la série $\sum_{\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, comme $f'_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)n^2}$ donc $||f'_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ (sur $\mathbb{R}_+$) ce qui garantit la convergence normale (car $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge par RIEMANN) donc uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 1} f'_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions nous permet d'affirmer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \geqslant 0,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)n^2} > 0$. Ainsi, S est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On pouvait aussi le prouver par convergence simple en constatant que toutes les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

6.44 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\cos(t)}{1+e^t}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = \frac{1}{2}$ et on a $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(e^{-t}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $t \mapsto e^{-t}$ l'est.

Si $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ donc $\frac{1}{1+e^t} = e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(e^{-t})^n$ (série géométrique) ce qui donne $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cos(t)e^{-(n+1)t}$. Posons $f_n(t) = (-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors il vient $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \text{Re}\left(\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(i-n-1)t}dt\right) = \text{Re}\left[\frac{(-1)^n e^{(i-n-1)t}}{i-n-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$ ne converge pas absolument, on ne peut pas utiliser le TITT.

Méthode 1 : posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, alors $\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty} f_k(t)dt\right|$ donc par linéarité de l'intégrale, inégalité de la moyenne et majoration du CSSA, on a la majoration : $\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| \leqslant \int_0^{+\infty}|\cos(t)|\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k e^{-kt}\right|dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}dt = \frac{1}{n+1} \to 0$. Ainsi, la suite numérique $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$, qui s'écrit $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

Méthode 2 : posons $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$, ce qui précède montre que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f. Les fonctions f_n, donc les S_n par linéarité, et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $|f(t) - S_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| = |\cos(t)|e^{-(n+2)t}\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-e^{-t})^k\right| = \frac{|\cos(t)|e^{-(n+2)t}}{1+e^{-t}} \leqslant \frac{e^{-2t}}{1+e^{-t}} \leqslant \varphi(t) = e^{-t}$ pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ Ainsi, comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut avec le théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Comme, par linéarité de l'intégrale, on a la relation $\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(k+1)}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, on a bien la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$ et à nouveau la relation $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

6.45 **a.** Pour $x > 0$ fixé, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{1+kx}}\right)_{k\geqslant 0}$ est strictement décroissante et tend vers 0. D'après le CSSA, la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{\sqrt{1+kx}}$ converge donc ce qui assure l'existence la convergence simple de la série, autrement dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0;+\infty[$ (vers S).

En notant $g_k : x \mapsto \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+kx}}$, on a $||g_jk||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{1}{\sqrt{1+ka}}$ et la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{1+ka}}$ diverge donc on ne peut pas espérer une convergence normale. Par contre, on peut majorer le reste par le CSSA : $\forall n \geqslant 0$, $\forall x > 1$, $|S(x) - f_n(x)| = |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{1+kx}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}}$ donc $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)a}}$ ce qui assure la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers S sur $]1;+\infty[$.

b. Par le théorème de la double limite (CVU sur $]1;+\infty[$), comme toutes les fonctions g_n admettent des limites en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ si $n \geqslant 1$ et 1 si $n = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = 1$.

6.46 **a.** S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = -n$ alors $f_n(x)$ n'est même pas défini.

Si $x < 0$ et $x \notin (-\mathbb{N}^*)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x = 0$, on a $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ diverge car c'est la série harmonique (RIEMANN).

Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx}) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument.

On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

Comme f_n est décroissante, positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, il vient $||f_n||_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ (à nouveau la série harmonique est divergente).

Si $a > 0$, comme avant, $||f_n||_{\infty, [a;+\infty[} = f_n(a) \leqslant e^{-na}$ car f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} (e^{-a})^n$ converge car $0 < e^{-a} < 1$, il y a convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ sur $[a; +\infty[$.

Comme toutes les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par un théorème du cours.

b. Si f coïncide avec une fonction polynomiale (disons de degré $p - 1$) sur un segment, alors il existe un entier p tel que $f^{(p)} = 0$ sur ce segment. C'est même une condition nécessaire et suffisante sur un intervalle en se servant par récurrence de la propriété : "si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, $f' = 0 \iff f$ est constante".

(H_1) On a vu en **a.** la convergence simple de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Toutes les f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et, en écrivant $f_n = u_n v_n$ avec $u_n : x \mapsto e^{-nx}$ et $v_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+x}$, comme $u_n^{(k)}(x) = (-n)^k e^{-nx}$ et $v_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$ par une récurrence facile, par LEIBNIZ :
$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \forall x > 0,\ f_n^{(p)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dbinom{p}{k} (-n)^{p-k} e^{-nx} \dfrac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}} = (-1)^p e^{-nx} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p! n^{p-k}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}}$.

(H_3) Soit $a > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{p! n^{p-k} e^{-nx}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $|f_n^{(p)}|$ l'est aussi en tant que produit de deux fonctions positives décroissantes, ainsi $||f_n^{(p)}||_{\infty,[a;+\infty[} = |f_n^{(p)}(a)|$. On a donc $||f_n^{(p)}||_{\infty,[a;+\infty[} = e^{-na} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p! n^{p-k}}{(p-k)!(n+a)^{k+1}} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\frac{-na}{2}}\right)$ par croissances comparées donc on a convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n^{(p)}$ sur $[a; +\infty[$. D'après un théorème du cours, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\forall p \geqslant 1,\ \forall x > 0,\ f^{(p)}(x) = (-1)^p \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p! n^{p-k}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}}$ donc $f^{(p)}(x)$ est du signe strict de $(-1)^p$ car $\sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p! n^{p-k}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}} > 0$ et $e^{-nx} > 0$ donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion : f ne coïncide pas avec un polynôme sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

6.47 Posons $f_n : x \mapsto \dfrac{|x - a_n|}{3^n}$. Alors f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur tout intervalle qui ne contient par a_n. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, alors $\dfrac{|x-a_n|}{3^n} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{3^n}$ converge donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $M \geqslant 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant M$, alors par inégalité triangulaire, on a $\forall x \in [\![-a; a]\!],\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{M+a}{3^n}$ donc convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $[-a; a]$ et, par continuité des f_n, on a la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Si x est un réel dont la "distance à $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive", il existe $]a; b[$ qui contient x et aucun des termes de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toutes les f_n sont C^1 sur $]a; b[$. De plus, $|f'_n(x)| = \dfrac{1}{3^n}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} f'_n$ converge normalement, on en déduit par théorème que f est de classe C^1 sur $]a; b[$ dont notamment au voisinage de x.

Si x est l'un des termes de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notons $A=\{k\in\mathbb{N}\mid a_k=x\}$ et soit $]a;b[$ un intervalle contenant x. Alors $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\sum\limits_{n\in A}f_n(t)+\sum\limits_{n\notin A}f_n(t)$. Posons $g_1(t)=\sum\limits_{n\in A}f_n(t)$, $g_1(t)=\Big(\sum\limits_{n\in A}\dfrac{1}{3^n}\Big)|t-x|=\alpha|t-x|$ avec $\alpha>0$. Posons $g_2(t)=\sum\limits_{n\notin A}f_n(t)$. Comme la série $\sum\limits_{n\notin A}\dfrac{1}{3^n}$ converge, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{\substack{n\notin A\\ n\geqslant N+1}}\dfrac{1}{3^n}<\dfrac{\alpha}{2}$. Alors posons $g_3(t)=\sum\limits_{\substack{n\notin A\\ n\leqslant N}}f_n(t)$ et $g_4(t)=\sum\limits_{\substack{n\notin A\\ n\geqslant N+1}}f_n(t)$. Alors $f(t)=g_1(t)+g_3(t)+g_4(t)$. Comme il n'y qu'un nombre fini de termes dans g_3, la fonction g_3 est dérivable au voisinage de x. Posons $g_5=g_1+g_4$. Comme l'application $t\mapsto|t-x|$ est 1-lipschitzienne, on a $\big||x+h-a_n|-|x-a_n|\big|\leqslant|h|$ pour tout réel h.

Soit $h>0$, $\dfrac{g_5(x+h)-g_5(x)}{h}=\alpha+\sum\limits_{\substack{n\notin A\\ n\geqslant N+1}}\dfrac{|x+h-a_n|-|x-a_n|}{3^nh}\geqslant\alpha-\sum\limits_{\substack{n\notin A\\ n\geqslant N+1}}\dfrac{1}{3^n}\geqslant\dfrac{\alpha}{2}$.

Soit $h<0$, $\dfrac{g_5(x+h)-g_5(x)}{h}=\alpha+\sum\limits_{\substack{n\notin A\\ n\geqslant N+1}}\dfrac{|x+h-a_n|-|x-a_n|}{3^nh}\leqslant-\alpha+\sum\limits_{\substack{n\notin A\\ n\geqslant N+1}}\dfrac{1}{3^n}\leqslant-\dfrac{\alpha}{2}$.

Ainsi g_5 ne peut pas être dérivable en x, car même si les dérivées à gauche et à droite de g_5 en x existent, elles ne sont pas égales. Puisque $f=g_3+g_5$ et que g_3 est dérivable en x, alors f ne l'est pas.

6.48 **a.** Si $x=0$, on a $\forall n\geqslant2,\ u_n(0)=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n(0)$ converge.

Si $x>0$, on a $u_n(x)\underset{+\infty}{=}o(e^{-nx})$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$ donc $u_n(x)\underset{+\infty}{=}o((e^{-x})^n)$ et, comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant0}(e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}|<1$, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n(x)$ converge absolument donc converge. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n$ sur $\mathbb{R}_+$. On note $f=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}u_n$. Pour aller plus loin, si $x<0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=-\infty$ par croissances comparées donc $\mathbb{R}_+$ est bien l'ensemble de définition de f.

b. Soit $n\geqslant2$, u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\geqslant0,\ u_n'(x)=\dfrac{1}{\ln(n)}(1-nx)e^{-nx}$ avec $u_n(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=0$. Ainsi, u_n est positive et atteint son maximum (même en valeur absolue) en $x_n=\dfrac{1}{n}$ et il vaut $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}=u_n(x_n)=\dfrac{1}{en\ln(n)}$. Comme la fonction $h:x\to\dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue, décroissante sur $[2;+\infty[$ et admet comme primitive la fonction $x\mapsto\ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$, h n'est pas intégrable ce qui prouve, par comparaison série-intégrale, que $\sum\limits_{n\geqslant2}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge (les séries de BERTRAND sont hors programme) : ainsi $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin, comme le défaut de convergence normale est au voisinage de 0, si on prend $a>0$, alors dès que $n>\dfrac{1}{a}$, on a $\dfrac{1}{n}<a$ donc l'étude précédente de la fonction u_n montre que u_n est décroissante et positive sur $[a;+\infty[$ donc $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[}=u_n(a)$ et, cette fois-ci, $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n(a)$ converge ce qui montre la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n$ sur $[a;+\infty[$.

c. Soit $x>0$, $n\geqslant2$, $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{xe^{-kx}}{\ln k}\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)}$ car les deux séries convergent et que $\forall k\geqslant n+1,\ \ln(k)\geqslant\ln(n+1)$. Ainsi : $R_n(x)\leqslant\dfrac{x}{\ln(n+1)}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}e^{-kx}=\dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}e^{-(k-n-1)x}$ et on reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x}<1$ donc, comme tous les termes sont strictement positifs dans $R_n(x)$: $0<R_n(x)\leqslant\dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ et ainsi $0<R_n(x)\leqslant\dfrac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ car $e^{-(n+1)x}\leqslant e^{-x}$. Par conséquent, en posant $\varphi:x\mapsto\dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{x}{e^x-1}$, on a $\forall x>0,\ 0<R_n(x)\leqslant\dfrac{\varphi(x)}{\ln(n+1)}$. Or φ se prolonge par continuité en 0 avec $\varphi(0)=1$ car $e^x\underset{0}{=}1+x+o(x)$ donc $e^x-1\underset{0}{\sim}x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ par croissances

comparées. Ainsi, par continuité de φ, elle est bornée (par M) sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0,\ 0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ (ça marche aussi pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$). Plus précisément, $M = 1$ car on connaît l'inégalité de convexité $\forall x > 0,\ e^x \geqslant 1 + x$ qui équivaut à $e^x - 1 \geqslant x > 0$ donc $\varphi(x) \leqslant 1$ pour $x > 0$. Ainsi, R_n est bornée et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{\ln(n+1)} = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin, comme toutes les u_n tendent vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées, en appliquant le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 0 = 0$. Pour un équivalent de f en $+\infty$, on constate que $u_{n+1}(x) \underset{+\infty}{=} o(u_n(x))$ pour tout $n \geqslant 2$ donc on peut conjecturer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x)$. Or $\forall x > 0,\ \dfrac{f(x)}{u_2(x)} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$ en posant $v_n(x) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x}$. Or v_n est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ (par exemple) donc $||v_n||_{\infty,[1;+\infty[} = v_n(1) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)} \underset{+\infty}{=} o((e^{-1})^n)$ donc, comme $\sum\limits_{n\geqslant 2} (e^{-1})^n$ converge, on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ sur $[1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v_2(x) = 1$ et que $\forall n \geqslant 3,\ \lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = 0$, à nouveau par théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{u_2(x)} = 1 + \sum\limits_{n=3}^{+\infty} 0 = 1$ ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x) = \dfrac{xe^{-2x}}{\ln(2)}$. De la même manière, on montre que $f(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} u_k(x) \underset{+\infty}{\sim} u_{n+1}(x)$.

6.49 **a.** $t > 0$ pour que $\ln(t)$ soit défini mais on peut prolonger par continuité avec $u_n(0) = 0$ si $n \geqslant 1$.

Si $t = 0$ ou $t = 1$, on a $\forall n \geqslant 1,\ u_n(t) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ converge.

Si $t \in]0;1[$, $u_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ converge absolument (par RIEMANN).

Si $t > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ diverge. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[0;1]$.

b. Comme $\varphi : t \mapsto t\ln(t)$ est bornée sur $]0;1]$ car elle est continue sur le segment $[0;1]$ en se prolongeant par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, on a $\forall t \in]0;a],\ |u_n(t)| = \dfrac{t^{n-1}|\varphi(t)|}{H_n} \leqslant \dfrac{a^{n-1}||\varphi||_\infty}{H_n}$ d'où la majoration $||u_n||_{\infty,]0;a]} \leqslant \dfrac{a^{n-1}||\varphi||_\infty}{H_n} \underset{+\infty}{=} O(a^n)$ qui prouve que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $]0;a]$.

Soit $n \geqslant 1$, d'abord u_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall t \in]0;1],\ u_n'(t) = \dfrac{t^{n-1}}{H_n}(n\ln t + 1)$, de plus u_n est négative et $u_n(0) = u_n(1) = 0$ donc $||u_n||_{\infty,]0;1]} = -u_n\left(e^{\frac{-1}{n}}\right) = \dfrac{1}{enH_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{en\ln(n)}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge (par comparaison série/intégrale car une primitive de $x \to \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$ ou par référence aux séries de BERTRAND qui sont hors programme).

Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $]0;1]$.

c. Soit $t \in]0;1[$, $n \geqslant 1$, $|R_n(t)| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{t^k|\ln t|}{H_k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{t^k|\ln t|}{H_{n+1}}$ car $\forall k \geqslant n+1,\ H_k \geqslant H_{n+1}$ et car les séries convergent. Ainsi : $|R_n(t)| \leqslant \dfrac{|\ln t|}{H_{n+1}} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \dfrac{t^{n+1}|\ln t|}{(1-t)H_{n+1}}$. Par conséquent, en posant la fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{t|\ln t|}{1-t}$, on a $\forall t \in]0;1[,\ |R_n(t)| \leqslant \dfrac{\psi(t)}{H_{n+1}}$. Or ψ se prolonge par continuité en 0 par croissances comparées avec $\psi(0) = 0$ et en 1 avec $\psi(1) = 1$ car $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$. Ainsi, par continuité de φ sur le segment $[0;1]$, elle est bornée (par M) sur $]0;1]$ et on a donc $\forall t \in]0;1],\ |R_n(t)| \leqslant \dfrac{M}{H_{n+1}}$ (ça marche aussi pour $t=1$ car $R_n(1)=0$). On en déduit que $||R_n||_{\infty,]0;1]} \leqslant \dfrac{M}{H_{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{H_{n+1}} = 0$ ce qui nous permet de conclure que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]0;1]$.

6.50 Notons $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ la limite uniforme (ou simple) de cette suite de fonctions sur $[a;b]$. Comme les fonctions f_n sont continues et que la convergence de cette suite de fonctions est uniforme, on en déduit que la fonction f est continue sur $[a;b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes de sorte qu'on peut poser $\underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}\, f = f(x)$ et $\underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f = f(y)$ avec $(x,y) \in [a;b]^2$.

Comme chacune des f_n est elle aussi continue sur $[a;b]$ on peut poser $\underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}\, f_n = f_n(x_n)$ et $\underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f_n = f_n(y_n)$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$.

• $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(x_n) \geqslant f(x_n) - \varepsilon \geqslant f(x) - \varepsilon$. Mais on a une autre inégalité $|f_n(x) - f(x)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(x_n) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$. Ainsi : $f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x_n) \leqslant f(x) + \varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $\left|\underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f_n) - \underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f)\right| \leqslant \varepsilon$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f_n) = \underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f)$.

• $|f_n(y_n) - f(y_n)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(y_n) \leqslant f(y_n) + \varepsilon \leqslant f(y) + \varepsilon$. Mais on a une autre inégalité $|f_n(y) - f(y)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(y_n) \geqslant f_n(y) \geqslant f(y) - \varepsilon$. Ainsi : $f(y) - \varepsilon \leqslant f_n(y_n) \leqslant f(y) + \varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $\left|\underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f_n) - \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f)\right| \leqslant \varepsilon$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f_n) = \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f)$.

6.51 **a.** $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{th}\,(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc les a_n existent pour tout $n \geqslant 1$.

Comme th est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{th}\,(t) = 1$, on a $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(n)dt}{t^2} = \frac{\mathrm{th}\,(n)}{n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. De plus, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^n$ est égal à 1 (classique) donc celui de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ vaut aussi $R = 1$. Comme th est positive et que la suite d'intervalle $\big([n;+\infty[\big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 (reste d'une intégrale convergente). Par le CSSA, $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$ converge et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ diverge par RIEMANN. Convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ pour $x \in [-1;1[$.

b. Si $x \in [-1;0]$ la suite $(a_n|x|^n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ converge par le CSSA et on sait qu'alors $\forall n \geqslant 1,\ |R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant |a_{n+1} x^{n+1}| \leqslant a_{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,[-1;0]} \leqslant a_{n+1}$. Il y a donc convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ sur $[-1;0]$ si $g_n : x \mapsto a_n x^n$ et donc continuité de f sur $[-1;0]$ donc en -1 car les g_n sont continues sur $[-1;0]$.

c. $|a_n - \dfrac{1}{n}| \leqslant \dfrac{1 - \mathrm{th}\,(n)}{n}$ donc $|f(x) + \ln(1-x)| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1 - \mathrm{th}\,(n)}{n} x^n$ pour $x \in [0;1]$ et il y a continuité de cette dernière somme donc $f(x) \underset{+\infty}{=} -\ln(1-x) + O(1)$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(1-x)$.

6.52 En notant $f_n(x) = e^{-x^n}$, les fonctions f_n sont positives, continues, majorées par f_1 sur $]1;+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc les f_n sont aussi intégrables sur $]1;+\infty[$: $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie, positive.

(H_1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle car $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ si $x > 1$.

(H_2) Les f_n et la fonction nulle sont continues sur $]1;+\infty[$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall x > 1,\ |f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_1(x)$ et f_1 est intégrable sur $]1;+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On pose le changement de variable $x = \varphi(u) = u^{\frac{1}{n}}$ dans l'intégrale $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} du$ car φ est une bijection de classe C^1, strictement croissante de $]1;+\infty[$ dans lui-même.

En posant $g_n : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}}$, on a g_n continue et intégrable sur $]1;+\infty[$,

(H_1) La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $g : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ sur $]1;+\infty[$.

(H_2) Les g_n et g sont continues sur $]1;+\infty[$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall u > 1,\ |g_n(u)| = g_n(u) \leqslant e^{-u}$ et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $]1;+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du > 0$.

Ainsi $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{I}{n}$ et la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}dx$ diverge d'après Riemann.

6.53 **a.** Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{a_n}{n!}\right| \leqslant |a_n|$ on a $R' \geqslant R$ d'après le cours.

Si $R > 0$, soit $r \in]0;R[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n r^n$ converge absolument donc $\dfrac{a_n}{n!}z^n = a_n r^n \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n$ pour tout z complexe donc, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n = 0$ donc $\dfrac{a_n}{n!}z^n \underset{+\infty}{=} o(a_n r^n)$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!}z^n$ converge. Comme ceci est vrai pour tout complexe z : $R' = +\infty$.

b. On conjecture que puisque $a_n \underset{+\infty}{\sim} 1$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}x^n = e^x$. On veut montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |a_n - 1| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, par convergence absolue de toutes les séries : $\forall x \geqslant 0,\ |e^{-x}f(x) - 1| = |e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n - 1}{n!}x^n| \leqslant e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{n_0-1} \dfrac{|a_n - 1|}{n!}x^n + e^{-x}\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \dfrac{|a_n - 1|}{n!}x^n$. Comme $P : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} \dfrac{|a_n - 1|}{n!}x^n$ est polynomiale, $P(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ donc $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \geqslant x_0,\ \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} \dfrac{|a_n - 1|}{n!}x^n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}e^x$.

Par conséquent : $\forall x \geqslant x_0,\ |e^{-x}f(x) - 1| \leqslant \varepsilon$ car $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \dfrac{|a_n - 1|}{n!}x^n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}x^n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}x^n = \dfrac{\varepsilon e^x}{2}$.

On déduit de tout ceci que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \geqslant x_0,\ |e^{-x}f(x) - 1| \leqslant \varepsilon$. En résumé : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

6.54 **a.** D'abord les I_n existent bien car la fonction $x \mapsto \cos^n(x)$ sont continues sur le segment $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme $\forall t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\ \forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$, par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Ainsi la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive donc elle converge.

Comme les $(I_n)_{n\geqslant 0}$ sont les intégrales de Wallis, on sait que cette suite tend vers 0 et on a même $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ mais il faudrait tout redémontrer ce qui un peu fastidieux.

Il suffit d'utiliser le théorème de convergence dominée en posant $f_n : x \mapsto \cos^n(x)$.

- La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction $f : \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.
- Les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- La fonction constante égale à 1 domine toutes les f_n et est intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ car elle y est continue.

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$.

b. Comme les I_n sont positifs, que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0, par le CSSA, $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n I_n$ converge. On aimerait prouver que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cos^n(x)\Big)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos(x)}$. On pose donc $f_n(x) = (-1)^n\cos^n(x)$. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers $S : x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(x)}$ (série géométrique avec $|\cos(x)| < 1$).

La convergence de cette série n'est pas normale car $||f_n||_\infty = 1$ et elle n'est pas non plus uniforme sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ car $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \cos^k(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)}$ donc $||R_n||_\infty = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)} = \dfrac{1}{2}$.

On utilise donc le théorème de convergence dominée en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

- La suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers S sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.
- Les fonctions S_n et la fonction S sont continues par morceaux sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right],\ |S_n(x)| = \left|\dfrac{1-(-1)^{n+1}\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)}\right| \leqslant 2$ et $x \mapsto 2$ est intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Par le TCD, $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k I_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+\cos(x)} = I$. Il reste à effectuer le changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;1]$ et on obtient : $I = \int_0^1 du = 1$.

6.55 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : x \mapsto x^n\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est continue sur $[0;1[$ donc sur $[0;a]$ et $f_n(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$ donc f_n est intégrable sur $[0;1[$ par Riemann. Ainsi u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est croissante sur $[0;a]$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1+a}{1-a}\int_0^a x^n dx = \dfrac{1+a}{1-a} \times \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ par encadrement et $u_n \underset{+\infty}{=} O(a^n)$ avec $|a| < 1$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge par comparaison à une série géométrique.

(H_1) $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{1}{1-x}$ sur $[0;a]$ car si $|z| < 1$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

(H_2) Les f_n et f sont continues par morceaux sur $[0;a]$ et les f_n sont intégrables (on en vient).

(H_3) $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^a |f_n|$ converge car $|f_n| = f_n$ et qu'on vient de voir que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ convergeait et $u_n = \int_0^a f_n$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a f intégrable sur $[0;a]$ mais on le savait déjà car f est continue sur $[0;a]$. De plus, le TITT nous apprend aussi que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{dx}{1-x}$ qu'on peut calculer en posant $x = \sin(\theta)$ ou en posant $u = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

c. (H_1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1[$.

(H_2) Les fonctions f_n et la fonction nulle sont continues par morceaux sur $[0;1[$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1[,\ |f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \varphi(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ et φ est intégrable sur $[0;1[$ par Riemann.

On peut donc conclure par le théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 0 = 0$.

(H_1) $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{1}{1-x}$ sur $[0;1[$ comme avant.

(H_2) Les f_n et f sont continues par morceaux sur $[0;1[$ et les f_n sont intégrables.

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergeait, on pourrait conclure avec le TITT que la fonction f est intégrable sur $[0;1[$ ce qui est faux car $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$. Ainsi : $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Pour aller un peu plus loin, cherchons des équivalents de u_n et v_n quand n tend vers $+\infty$!

On effectue une seconde IPP : $u_n = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right]_0^a - \displaystyle\int_0^a \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3}dx$. Comme l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$ est encore croissante sur par une étude de fonctions sur $[0;a]$, on a l'inégalité

$$\left|\int_0^a \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}dx\right| \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^a \frac{x^{n+1}dx}{n+1}}{\sqrt{(1+a)(1-a)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+a)(1-a)^3}} \times \frac{a^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{a^{n+1}}{n+1}\right)$$

et on en conclut que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^{n+1}}{n+1}\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}$.

<u>Méthode par Herr COZAR</u> : En posant, on a $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\dfrac{1+u^{\frac{1}{n}}}{1-u^{\frac{1}{n}}}}u^{\frac{1}{n}}du$. Or $1-u^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ln(u)$, donc si $g_n(u) = \sqrt{\dfrac{1+u^{\frac{1}{n}}}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}}u^{\frac{1}{n}}$, $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^1 g_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = g(u) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\ln(u)}}$.

(H_1) La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\ln(u)}}$ sur $]0;1[$.

(H_2) Les fonctions g_n et g sont continues par morceaux sur $]0;1[$.

(H_3) $1+u^{\frac{1}{n}} \leqslant 2$ et par une étude de fonction : $\forall x \in]0;1[,\ \ln(x)+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{-\ln(x)}$, ce qui donne, en posant $x = u^{\frac{1}{n}}$, l'inégalité $\dfrac{u^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n(1-u^{\frac{1}{n}})}} \leqslant \dfrac{1}{-\ln(u)}$. Par conséquent : $g_n(u) \leqslant g(u)$ et g est intégrable sur $]0;1[$ car prolongeable par continuité en 0 avec $g(0)=0$ et $g(u) \underset{1^-}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{1-u}}$.

Par le TCD, on a donc $v_n =\sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\ln(u)}}du = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$ en posant $u = e^{-x^2}$ dans cette intégrale et en reconnaissant l'intégrale de GAUSS.

<u>Autre méthode par sir TEULIÉ</u> : $v_n = -\displaystyle\int_{\pi/2}^0 \cos(\alpha)^n \dfrac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\sin(\alpha)d\alpha = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(\alpha)(1+\cos(\alpha))d\alpha$ en posant $x = \cos(\alpha)$. On pose ensuite $\alpha = \dfrac{\pi}{2}-\theta$, on obtient $v_n = W_n + W_{n+2}$ où $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)d\theta$ qui est l'intégrale de WALLIS. Comme on a vu que $\sqrt{\dfrac{\pi}{n+1}} \leqslant W_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, on a aussi $\sqrt{\dfrac{\pi}{n+3}} \leqslant W_{n+2} \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{n+2}}$. On somme, ce qui nous donne l'équivalent $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$ (plus court en effet).

6.56 **a.** $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge pour tout $a > 0$. Si $x \neq 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^{a-1}}$ (signe constant) donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge si et seulement si $a > 2$ d'après le critère de RIEMANN. Ainsi $\Delta =]2;+\infty[$.

b. Soit $a > 2$ et $b > 0$, alors $\forall x \in [-b;b]$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{nb}{0^2+n^a} = \dfrac{b}{n^{a-1}}$. Ainsi $||u_n||_{\infty,[-b;b]} \leqslant \dfrac{b}{n^{a-1}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{b}{n^{a-1}}$ converge si $a > 2$ d'après RIEMANN. Ainsi, par convergence normale et continuité sur $\mathbb{R}$ de toutes les fonctions u_n, la fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ si $a \in \Delta$.

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n'(x) = \dfrac{n}{x^2+n^a} - \dfrac{2nx^2}{(x^2+n^a)^2} = \dfrac{n(n^a-x^2)}{(x^2+n^a)^2}$. On trace alors le tableau de variations de u_n pour se rendre compte que $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} = u_n\left(n^{a/2}\right) = \dfrac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}$. Encore une fois d'après le critère de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ converge si et seulement si 4. Ainsi $\Delta' =]4;+\infty[$.

Soit maintenant $a \in]0;4]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, alors $|R_n(x)| = R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{kx}{k^a+x^2} \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{kx}{k^a+x^2}$. Mais pour $k \in [\![n+1;2n]\!]$, on a $kx \geqslant (n+1)x$ et $0 < k^a+x^2 \leqslant (2n)^a+x^2 \leqslant (2n)^4+x^2$ de sorte que $R_n(x) \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{(n+1)x}{16n^4+x^2} = \dfrac{n(n+1)x}{16n^4+x^2} \geqslant \dfrac{n^2x}{16n^4+x^2}$. Par conséquent, on n'a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$ car $R_n(n^2) \geqslant \dfrac{1}{17}$ donc on ne peut pas avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$.

6.57 **a.** Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout entier n.

Si $x > 0$, par croissance comparée, on a $(e^{-x})^n = e^{-nx} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f_n \geqslant 0$ est dérivable et que $f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$, f_n atteint son maximum en $\dfrac{1}{n}$ où elle vaut $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$. Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+ \iff \lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0 \iff \alpha < 1$.

b. De même, par définition, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+ \iff \sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}$ converge $\iff \alpha < 0$ d'après le critère de RIEMANN.

c. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.

Si $x > 0$, par croissance comparée à nouveau, $n^\alpha e^{-nx} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ pour tout α.

On peut continuer en prenant $a > 0$ et en affirmant que pour $n > \dfrac{1}{a}$, on a $\dfrac{1}{n} < a$ donc f_n est décroissante sur $[a;+\infty[$ et $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a)$ mais on sait d'après la question **c.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(a)$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ pour tout α.
Bien sûr si $\alpha < 0$, par convergence normale on a convergence uniforme de cette série sur $\mathbb{R}_+$.
Mais si $\alpha \geqslant 0$ et $x > 0$, comme $\forall n \geqslant 1$, $n^\alpha \geqslant 1$, on a $f(x) \geqslant \sum\limits_{n=1} xe^{-nx} = \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \varphi(x)$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$ donc f ne peut pas tendre vers $0 = f(0)$ en 0. Par conséquent, f n'est pas continue en 0 ce qui interdit la convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}_+$ car les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

6.58 **a.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\psi_\alpha : x \mapsto \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 avec $\psi_\alpha(0) = \alpha$ (car $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $\sin(\alpha x) \underset{0}{=} \alpha x + o(x)$) et vérifie $\psi_\alpha(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$ donc ψ_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $I(\alpha)$ existe.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha, x) = \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\alpha \mapsto f(\alpha, x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto f(\alpha, x)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) = \dfrac{x\cos(\alpha x)}{e^x - 1}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (prolongement par continuité $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, 0) = 1$).
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\right| \leqslant \dfrac{x}{e^x - 1} = \varphi(x)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, par théorème de dérivation sous le signe somme, I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $I'(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos(\alpha x)}{e^x - 1}dx$.

b. Pour $x > 0$, on a $\dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} = \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\alpha x)e^{-(n+1)x}$. On pose $f_n(x) = \sin(\alpha x)e^{-(n+1)x}$ pour $n \geqslant 0$ et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}$. Comme $|\sin(\alpha x)| \leqslant \alpha x$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha x e^{-(n+1)x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| \leqslant \frac{\alpha}{(n+1)^2}$ après calculs donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\alpha x)e^{-(n+1)x}dx = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x + i\alpha x}dx\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-(n+1)+i\alpha)x}}{-(n+1)+i\alpha}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{\alpha}{(n+1)^2 + \alpha^2}$ et les fonctions f_n sont continues par morceaux, ainsi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On conclut en appliquant le TITT et en changeant d'indice que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$. Ainsi $b = \alpha$ et $a = \alpha^2$.

On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $\alpha > 0$ fixé : $\varphi_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$. Il est clair que φ_α est décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_\alpha(x)dx \leqslant \varphi_\alpha(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi_\alpha(x)dx$. On somme ces inégalités (tout converge) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_\alpha(x)dx \leqslant I(\alpha) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_\alpha(x)dx \iff \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_1^{+\infty} \leqslant I(\alpha) \leqslant \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty}$. Par conséquent $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) \leqslant I(\alpha) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$.

6.59 **a.** • Si $x = 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in]0;1]$, par croissances comparées, on a $(1-x)^n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ car $|1-x| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction nulle.

Puisque f_n est dérivable sur $[0;1]$ par opérations, $\forall x \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$ par calcul. Ainsi, f_n est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{n+1};1\right]$ et, comme f_n est positive sur $[0;1]$, $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{n^\alpha}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n$. Comme $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)\right)$ et que l'on a $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$, on en déduit la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -1$ donc, par continuité de la fonction $\exp$, il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Par conséquent, $||f_n||_{\infty,[0;1]} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$.

Il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers $f = 0$ sur $[0;1]$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ||f_n - 0||_{\infty,[0;1]} = 0$, donc il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction nulle sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Pour aller plus loin, comme le "problème" est au voisinage de 0, si $a \in]0;1[$ et dès que n est assez grand (en fait dès que $n + 1 \geqslant \dfrac{1}{a}$ d'après l'étude précédente), on a $||f_n||_{\infty,[a;1]} = f_n(a)$ et on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$ donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a;1]$ indépendamment de la valeur de α.

b. • Si $x = 0$, comme $f_n(0) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge.

• Si $x \in]0;1]$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ à nouveau par croissances comparées. Ainsi, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc elle converge.

Ainsi, il y a convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0;1]$ pour tout réel α.

Posons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

• Comme $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(\dfrac{1}{n+1}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{e} = \dfrac{1}{en^{1-\alpha}}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha < 0$ par comparaison aux séries de Riemann. Dans ce cas, comme convergence normale implique convergence uniforme, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

• Pour $\alpha < 0$, si on ne s'intéresse qu'à la convergence uniforme, on pouvait aussi majorer R_n sur $[0;1]$ car $0 \leqslant R_n(x) \leqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car puisque $\alpha < 0$, on a $\forall k \geqslant n+1,\ k^\alpha \leqslant (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x \in]0;1]$, $0 \leqslant R_n(x) \leqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k = (n+1)^\alpha x \dfrac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (n+1)^\alpha (1-x)^{n+1} \leqslant (n+1)^\alpha$. On a aussi $R_n(0) = 0$. Ainsi $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant (n+1)^\alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^\alpha = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

• Si $\alpha \geqslant 0$, alors $R_n(x) \geqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car $\forall k \geqslant n+1,\ k^\alpha \geqslant (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x \in]0;1]$, on a $R_n(x) \geqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k = (n+1)^\alpha x \dfrac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (n+1)^\alpha (1-x)^n$ et $R_n(0) = 0$. Même si R_n est bornée, on déduit de cette minoration que $||R_n||_{\infty,[0;1]} \geqslant (n+1)^\alpha = \lim\limits_{x\to 0^+} (n+1)^\alpha (1-x)^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^\alpha = 1$ si $\alpha = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$.

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha < 0$.

Pour aller plus loin à nouveau, si $a \in]0;1[$, dès que $n+1 \geqslant \dfrac{1}{a}$, on a $||f_n||_{\infty,[a;1]} = f_n(a)$ et on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a)$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;1]$ indépendamment de la valeur de α.

6.60 **a.** Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est paire car toutes les $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}$ le sont.

b. Comme $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |f_n(0)| = \dfrac{1}{n^2}$ (car $|f_n|$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$), comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann, la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est normale sur $\mathbb{R}$. Toutes les f_n sont continues donc, d'après un théorème du cours, f est continue sur $\mathbb{R}$.

(H_1) On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x) = \dfrac{-2(-1)^n x}{(x^2+n^2)^2}$.

(H_3) Qu'en est-il de la convergence uniforme ou normale (sur $\mathbb{R}$ ou tout segment de $\mathbb{R}$) de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$.

CVNTS Soit $a > 0$ et $x \in [-a;a]$, comme $|f_n'(x)| = \dfrac{|x|}{(n^2+x^2)^2} \leqslant \dfrac{a}{n^4}$, la fonction f_n' est bornée sur $[-a;a]$ et $||f_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{2a}{n^4}$ donc, par Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[-a;a]$.

CVN $f_n''(x) = -2(-1)^n \dfrac{(x^2+n^2)-4x^2}{(x^2+n^2)^3} = 2(-1)^n \dfrac{3x^2-n^2}{(x^2+n^2)^3}$. Ainsi, avec le tableau de variations de $|f_n'|$, on constate que $|f_n'|$ est maximale en $\pm\dfrac{n}{\sqrt{3}}$ avec $||f_n'||_{\infty,\mathbb{R}} = \left|f_n'\Big(\dfrac{n}{\sqrt{3}}\Big)\right| = \dfrac{3\sqrt{3}}{n^3}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge par Riemann, on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ sur $\mathbb{R}$.

CVU Pour $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ est alternée et la suite $(|f_n'(x)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial des séries alternées, en notant $T_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$, il vient

$\forall n \in \mathbb{N},\ |T_n(x)| \leqslant |f'_{n+1}(x)| = \dfrac{2|x|}{(x^2+(n+1)^2)^2}$. On sait que $2|x|(n+1) \leqslant x^2+(n+1)^2$ donc $\dfrac{|x|}{x^2+(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$ d'où $|f'_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)(x^2+(n+1)^2)} \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)^3}$ ce qui justifie que $||T_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a bien convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ sur $\mathbb{R}$.

Quelle que soit la méthode employée, on a donc prouvé par le théorème de dérivation des séries de fonctions que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-2(-1)^n x}{(x^2+n^2)^2}$.

c. Toujours par le critère spécial des séries alternées, comme la suite $\left(\dfrac{1}{x^2+n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, le réel $f(x)$ est du signe du premier terme $f_1(x)$ donc $f(x) \leqslant 0$. De plus, on a $|f(x)| \leqslant |f_1(x)| = \dfrac{1}{1+x^2}$. Par comparaison, puisque f_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $f_1(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Essayons d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur $\mathbb{R}_+$ à $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

(H_1) On a déjà vu la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$ avec **b.**.

(H_3) Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+n^2} = \left[\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n}$. Mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique donc elle diverge d'après RIEMANN : OUPS !

<u>Méthode 1</u> : avec le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

(H_1) On a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+$ avec **a.**.

(H_2) Les f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et f est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ avec **b.**.

(H_3) Pour $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, avec $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{x^2+k^2}$, on a vu dans la preuve du critère spécial que l'on avait $S_1(x) \leqslant S_3(x) \leqslant \cdots \leqslant S_{2n+1}(x) \leqslant f(x) \leqslant S_{2n}(x) \leqslant \cdots \leqslant S_2(x) \leqslant S_0(x) = 0$. Ainsi, $|S_n(x)| \leqslant |S_1(x)| = |f_1(x)| = \dfrac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} S_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k\pi}{2k}$ par linéarité de l'intégrale sur des fonctions intégrables. Au final, on obtient malgré tout la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\pi}{2n}$.

<u>Méthode 2</u> : soit $a > 0$, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement vers f sur le segment $[0;a]$ d'après **b.** et que toutes les fonctions f_n sont continues, par intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme, on a la relation $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a f_n(x)dx$. Or $\displaystyle\int_0^a f_n(x)dx = (-1)^n \int_0^a \frac{dx}{x^2+n^2}$ ce qui donne $\displaystyle\int_0^a f_n(x)dx = (-1)^n \left[\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right]_0^a = \frac{(-1)^n}{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) = g_n(a)$.

(H_1) Pour $a > 0$, comme $(|g_n(a)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, par le critère spécial des séries alternées, en notant $R_n(a) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} g_k(a)$, on a $|R_n(a)| \leqslant |g_{n+1}(a)| = \dfrac{\operatorname{Arctan}(a/(n+1))}{n+1} \leqslant \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ donc R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$ ce qui assure la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ sur $\mathbb{R}_+$ vers $F : a \mapsto \displaystyle\int_0^a f(x)dx$.

(H_2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} g_n(a) = \frac{(-1)^n\pi}{2n}$.

Par le théorème de la double limite, on a $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{a\to+\infty} g_n(a) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\pi}{2n}$.

On obtient bien sûr la même formule avec les deux méthodes, et on se souvient (c'est classique) que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\theta(1/2) = -\ln(2)$ pour conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{\pi\ln(2)}{2}$.

6.61 Pour $x > 0$ fixé, la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+x}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

De plus, posons $g_x : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$. Il est clair que g_x est continue sur $]0;1]$. Or $g_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc g_x est intégrable sur $]0;1]$ d'après RIEMANN car $1-x<1$. Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$ converge.

On sait que, pour $t \in]0;1[$, on a $\displaystyle\frac{t^{x-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n t^{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{x+n-1}$ (série géométrique). Si on pose $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{x+n-1}$, on a donc convergence simple de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ vers g_x sur $]0;1[$.

Remarque très importante : comme la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ n'est pas absolument convergente, on ne peut pas obtenir le lien voulu entre la série et l'intégrale par le théorème d'intégration terme à terme (qui donne toujours des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I f_n$ absolument convergente car $\displaystyle\left|\int_I f_n\right| \leqslant \int_I |f_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I |f_n|$ converge par hypothèse dans ce théorème).

On va utiliser plutôt le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles de cette série de fonctions. Posons donc $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ de sorte que :

- La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers g_x sur $]0;1[$.
- Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0;1[$. Par conséquent, par somme, les fonctions S_n sont aussi continues par morceaux sur $]0;1[$. De plus, g_x est elle aussi continue par morceaux sur $]0;1[$.
- $\forall t \in]0;1[$, $\forall n \geqslant 0$, $\displaystyle S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n t^{x+n-1} = \frac{t^{x-1}(1-(-t)^{n+1})}{1+t}$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique) donc $|S_n(t)| \leqslant 2g_x(t)$ et on a déjà vu que g_x est intégrable sur $]0;1[$.

On peut donc conclure avec le théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(t)dt$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)dt = \int_0^1 g_x(t)dt$. Or $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{x+k-1}dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_0^1$ de sorte que $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}$. Ainsi, on en déduit comme attendu que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

6.62 **a.** Soit, pour $n \geqslant 1$, $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ défini par $f_n(t) = \dfrac{nt(1-t)}{n^2t^2+(1-t)^2}$.

Comme les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0;1]$, I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

- si $t=0$ ou $t=1$, on a $f_n(t)=0$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Si $t \in]0;1[$, $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(1-t)}{nt} \to 0$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle $f=0$ sur $[0;1]$.
- les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $[0;1]$.
- $\forall n \geqslant 1$, $\forall t \in [0;1]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{2}$ (car $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\frac{a}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{2}$) et $t \to \frac{1}{2}$ est intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f = 0$.

b. ???.

6.63 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations. De plus, comme $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$, on a $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Enfin, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN toujours. Au final, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc I existe.

b. Il faut écrire f sous la forme d'une somme de série de fonctions pour pouvoir intervertir les symboles de série et d'intégrale par un des théorèmes à disposition. Pour $t > 0$, on a $f(t) = \sqrt{t}e^{-t} \times \dfrac{1}{1-e^{-t}} = \sqrt{t}e^{-t}\sum\limits_{p=0}^{+\infty} e^{-pt}$ (série géométrique car $0 < e^{-t} < 1$). Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ (avec $n = p+1$) où $f_n(t) = \sqrt{t}e^{-nt}$.
D'après ce qu'on vient de faire, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $n \geqslant 1$.

Par le changement de variable $t = \dfrac{u^2}{n} = \varphi(u)$ (on a bien φ de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$), on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} 2u^2e^{-u^2}du$. Par une intégration par parties facile à justifier (le crochet converge) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2u^2e^{-u^2}du = \int_0^{+\infty} u(-2ue^{-u^2})du = \Big[-ue^{-u^2}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$. D'après RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge.
On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$.

6.64 • Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in]0;1]$ et $\exists m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{x} = m\pi + \dfrac{\pi}{2}$, alors $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = 1$ donc $f_n(x) = x$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$.

• Si $x \in]0;1]$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{x} \neq m\pi + \dfrac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 < 1$ et la suite géométrique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 \in [0;1[$ tend donc vers 0 ce qui justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall m \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{2}{(2m+1)\pi}\right) = \dfrac{2}{(2m+1)\pi}$ et $f(x) = 0$ sinon. Comme les f_n sont continues sur $[0;1]$ (par opérations sur $]0;1]$ et car $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$) et que f ne l'est pas, on n'a pas convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers f sur $[0;1]$ par contraposée d'un théorème du cours.

6.65 **a.** Soit $f_n : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$.

• Comme $\forall t \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+t^n} = 1$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0;1[$ vers la fonction constante $f = 1$.
• les fonctions f_n et f sont continues sur $[0;1[$ et intégrables sur $[0;1[$ car elles y sont bornées.
• $\forall n \geqslant 1$, $\forall t \in [0;1[, 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1 = f(t)$ et f est intégrable sur $[0;1[$.
Par le théorème de convergence dominée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1$.

b. Comme $\forall n \geqslant 1$, $\forall t \in [0;1[$, $0 < f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant 1$ car $t^{n+1} \leqslant t^n$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante par croissance de l'intégrale donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1 - 1 = 0$ d'après ce qui précède. Le CSSA nous permet alors d'affirmer que la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$ converge.

Pour $n\geqslant 1$, on a $v_n = 1-\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} = \int_{]0;1[}\frac{t^n dt}{1+t^n}$. On effectue le changement de variable $t = u^{1/n} = \varphi(u)$ (φ est bien de classe C^1, strictement croissante et bijective de $]0;1[$ dans $]0;1[$) et $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}du}{1+u}$.

On pose alors $g_n(u) = \dfrac{u^{1/n}}{1+u}$ et on applique à nouveau le TCD.

- la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $g : u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ sur $]0;1[$.
- les fonctions g_n et g sont continues sur $]0;1[$ et intégrables car elles y sont bornées.
- $\forall n\geqslant 1,\ \forall u\in]0;1[, 0\leqslant g_n(u)\leqslant g(u)$ et g est intégrable sur $]0;1[$.

Par le théorème de convergence dominée, $(nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = \displaystyle\int_0^1 g(u)du = \ln(2)$.

Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ diverge d'après RIEMANN.

6.66 **a.** Si $n\geqslant 1$, g_n est dérivable sur $[0;1]$ par théorèmes généraux et $g_n'(t) = -\Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^{n-1}e^t + \Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^n e^t$ qu'on factorise en $g_n'(t) = -\Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^{n-1}\dfrac{te^t}{n}$ pour $t\in[0;1]$. Ainsi, comme $\left|\Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^{n-1}\right| = \Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^{n-1}\leqslant 1$ et $|t|\leqslant 1$, on a bien la majoration suivante, $\forall t\in[0;1],\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ |g_n'(t)|\leqslant \dfrac{e^t}{n}$.

b. Si $t\in]0;1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, par le théorème des accroissements finis, comme g_n est dérivable sur $[0;1]$, il existe $c\in]0;t[$ tel que $g_n(t)-1 = g_n(t)-g_n(0) = tg_n'(c)$. Or $|g_n'(c)|\leqslant \dfrac{e^c}{n}\leqslant\dfrac{e^t}{n}$ d'après **a.** donc $|g_n(t)-1|\leqslant\dfrac{te^t}{n}$.

c. Soit $x\in[0;1]$, $|I_n(x)-x| = \left|\displaystyle\int_0^x g_n(t)dt - \int_0^x dt\right| = \left|\int_0^x (g_n(t)-1)dt\right| \leqslant \int_0^x |g_n(t)-1|dt \leqslant \frac{1}{n}\int_0^x te^t dt$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^x te^t dt = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = x$. Ainsi, la suite de fonctions $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : x\mapsto x$ sur $[0;1]$.

d. On reprend la majoration précédente, $|I_n(x)-x|\leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^x te^t dt\leqslant\frac{I}{n}$ si $I = \displaystyle\int_0^1 te^t dt = [(t-1)e^t]_0^1 = 1$ donc $I_n - f$ est bornée sur $[0;1]$ et on a $||I_n - f||_{\infty,[0;1]}\leqslant\dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, on a bien convergence uniforme de $(I_n)_{n\geqslant 1}$ vers f sur $[0;1]$.

6.67 **a.** • Si $x=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.

- Si $x\neq 0$, $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison à RIEMANN.

Par conséquent, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $a>0$, alors $\forall x\in[-a;a]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| = \dfrac{|x|}{x^2+n^2}\leqslant\dfrac{a}{x^2+n^2}\leqslant\dfrac{a}{0^2+n^2} = \dfrac{a}{n^2}$ donc $||f_n||_{\infty,[-a;a]}\leqslant\dfrac{a}{n^2}$. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1}||f_n||_{\infty,[-a;a]}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement vers f sur $[-a;a]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur tout segment $[-a;a]$, et comme ceci est vrai pour tout $a>0$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Par contre, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}\geqslant f_n(n) = \dfrac{1}{2n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge et il n'y a pas convergence normale de la séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. On pouvait trouver naturellement cette valeur n en effectuant une étude de fonction. En effet, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \dfrac{x^2+n^2-2x^2}{(x^2+n^2)^2} = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$

donc, par exemple sur $\mathbb{R}_+$ car f_n est paire, f_n est positive et croissante sur $[0;n]$ et positive et décroissante sur $[n;+\infty[$. La fonction f_n atteint donc son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en n.

c. On effectue une comparaison série / intégrale, en définissant la fonction $\varphi_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par la relation $\varphi_x(t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}$ pour $x > 0$ fixé. La fonction φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi_x(t)dt$. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge, série et intégrale), et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)dt \iff \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} \leqslant f(x) \leqslant \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$.
Ainsi, $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ par encadrement car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.
Comme $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, on n'a pas convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+$ (par exemple) car sinon, on aurait par théorème de la double limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$, NON !

6.68 **a.** • Si $x < 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.
• Si $x = 0$, $u_n(x) = \ln(2)$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge aussi grossièrement.
• Si $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx}$ et $\sum_{n\geqslant 0} (e^{-x})^n$ converge (série géométrique avec $0 < e^{-x} < 1$) donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge par comparaison aux séries géométriques.
Ainsi le domaine de définition de f vaut $I = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $a > 0$, comme u_n est décroissante et positive, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n(a)$ converge d'après ce qui précède. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[a;+\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^* = I = \bigcup_{a>0} [a;+\infty[$.

b. On a $u_0(x) = \ln(2)$ et $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $[1;+\infty[$ et théorème de la double limite, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \ln(2)$.

c. Les u_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, la fonction f est aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ par le théorème de la limite monotone. Supposons que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$, et soit un entier $n \in \mathbb{N}$, posons alors $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(1+e^{-kx})$, il vient donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} S_n(x) = (n+1)\ln(2)$. Comme toutes les u_k sont positives, $\forall x > 0$, $f(x) \geqslant S_n(x)$ (I) donc $\ell \geqslant (n+1)\ln(2)$ en passant à la limite dans (I) quand x tend vers 0 (elles existent). Il est impossible que cette inégalité soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, par l'absurde, on a montré que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
Comme $f = \ln(2) + u_1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ et que u_1 est strictement décroissante, la fonction f est aussi strictement décroissante sur I car $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est décroissante. D'après le théorème de la bijection, puisque f est continue sur I, on obtient donc $f(I) = \left]\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to 0^+} f(x)\right[=]\ln(2);+\infty[$.

6.69 **a.** Initialisation : f_0 est continue sur l'intervalle I. Ainsi, f_1 étant la primitive sur I de f_0 qui s'annule en 0 par le théorème fondamental de l'intégration, f_1 est de classe C^1 sur I.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f_n est de classe C^n sur I, alors f_{n+1} étant la primitive de f_n qui s'annule en

0, la fonction f_{n+1} est de classe C^{n+1} car f'_{n+1} est de classe C^n.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n sur I et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f'_n(0) = 0$. De plus, par construction, $f_n^{(n)} = f_{n-1}^{(n-1)} = \cdots = f'_1 = f_0 = f$.
Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < 0 < b$, f est continue sur le segment $[a; b] \subset I$ donc y est bornée d'après le théorème des bornes atteintes d'où l'existence de $M \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in [a; b]$, $|f_0(x)| = |f(x)| \leqslant M = ||f||_{\infty,[a;b]}$.
Méthode 1 : pour $x \in [a; b]$, on a $|f_1(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^x |f(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_0^x M dt\right| = M|x|$. De même, $|f_2(x)| = \left|\int_0^x f_1(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^x |f_1(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_0^x M|t|dt\right| = \left|\int_0^x Mtdt\right| = \dfrac{M|x|^2}{2}$ (traiter les deux cas $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$). Si on suppose, pour un entier $n \geqslant 1$, que $\forall x \in [a; b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{M|x|^n}{n!}$, alors, comme ci-dessus, on obtient $|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^x |f_n(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_0^x \dfrac{M|t|^n}{n!}dt\right| = \dfrac{M}{n!}\left|\int_0^x t^n dt\right| = \dfrac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a; b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{M|x|^n}{n!}$.
Méthode 2 : Comme a vu que f_n est de classe C^n sur I, avec la formule de Taylor reste intégral, on a $\forall x \in I$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f_n^{(k)}(0)x^k}{k!} + \dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f_n^{(n)}(t)dt$. Or, $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $f_n^{(k)}(0) = f_{n-k}(0) = 0$ car $n - k \geqslant 1$ et $f_n^{(n)} = f$ donc $f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f_n^{(n)}(t)dt$ ce qui donne aussi la majoration $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}\left|\int_0^x |x-t|^{n-1}|f(t)|dt\right| \leqslant \dfrac{M}{(n-1)!}\left|\int_0^x |x-t|^{n-1}dt\right| = \dfrac{M}{(n-1)!}\left|\int_0^x (x-t)^{n-1}dt\right| = \dfrac{M|x|^n}{n!}$.
Quelle que soit la méthode, f_n est bornée sur $[a; b]$ et $|||f_n||_{\infty,[a;b]} \leqslant \dfrac{Mc^n}{n!}$ où $c = \mathrm{Max}(|a|, |b|) \leqslant (b-a)$.
Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{M(b-a)^n}{n!}$ converge (série exponentielle de somme e^{b-a}), on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur tout segment de I donc on peut définir $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b. Méthode 1 : (H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I d'après **a.**.
(H_2) Toutes les f_n sont de classe C^1 sur I (au moins) d'après **a.**.
(H_3) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n = \sum\limits_{m\geqslant 0} f_m$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de I d'après **a.**.
Ainsi, la fonction g est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = g(x)+f_0(x) = g(x)+f(x)$.
On peut résoudre cette équation différentielle $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $g(x) = e^x\left(A + \int_0^x e^{-t}f(t)dt\right)$ par la méthode de variation de la constante. Or $g(0) = 0$ car $\forall n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0$ donc $A = 0$ et on obtient la relation $\forall x \in I$, $g(x) = \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$ ce qui permet de conclure que $\forall x \in I$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$.
Méthode 2 : soit $x \in I$, on se place sur le segment $\widetilde{[0; x]}$ où l'on sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement d'après **a.** donc, par intégration terme à terme sur un segment, on obtient $\int_0^x S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x f_n(t)dt$ en notant $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. S est continue sur I car toutes les f_n le sont et que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de I. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x f'_{n+1}(t)dt = [f_{n+1}(t)]_0^x = f_{n+1}(x)$ donc $G(x) = \int_0^x S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = S(x) - f(x) = G'(x) - f(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration.

On résout à nouveau cette équation différentielle sur I et $\forall x \in I,\ G(x) = e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ car $G(0) = 0$. On en déduit comme par la première méthode que $\forall x \in I,\ S(x) = G(x) + f(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$.

Par exemple, si $I = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto 1$, alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Ainsi, on obtient une formule classique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \int_0^x e^{x-t}dt = 1 + e^x[-e^{-t}]_0^x = 1 + e^x(1 - e^{-x}) = e^x$.

6.70 **a.** Pour $n \geqslant 1$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n^2$ puisque $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. Ainsi, f_n devient continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui prouve que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{I_n}{n} = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2(nx)}{n\sin^2(x)}dx = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \dfrac{\sin^2(u)}{n^2\sin^2\left(\frac{u}{n}\right)}du$ avec le changement de variable $x = \dfrac{u}{n} = \varphi_n(u)$ (φ_n de classe C^1 du segment $\left[0; \frac{n\pi}{2}\right]$ dans le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$). Soit $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(u) = \dfrac{\sin^2(u)}{n^2\sin^2\left(\frac{u}{n}\right)}$ si $0 < u \leqslant \dfrac{n\pi}{2}$ et $f_n(u) = 0$ sinon. Alors $\dfrac{I_n}{n} = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} f_n = \int_0^{+\infty} f_n$.

(H_1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sin^2\left(\frac{u}{n}\right) = u^2$ donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ avec $f(u) = \dfrac{\sin^2(u)}{u^2}$.

(H_2) De plus, les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et f l'est aussi.

(H_3) Par concavité de la fonction $\sin$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a l'inégalité classique $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 1,\ \forall u > 0,\ |f_n(u)| \leqslant \dfrac{\pi^2\sin^2(u)}{4u^2} = \varphi(u) = \dfrac{\pi^2}{4}f(u)$ (et ceci même si $u > \dfrac{n\pi}{2}$) et la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \dfrac{\pi^2}{4}$ et $\varphi(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$.

Par convergence dominée, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2(u)}{u^2}du$.

c. Si $n \geqslant 0$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = \sin^2(((n+1)+1)x) + \sin^2((n+1)-1)x)$ qu'on développe en $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = 2\sin^2((n+1)x)\cos^2(x) + 2\cos^2((n+1)x)\sin^2(x)$ avec la relation $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$ puis avec la relation fondamentale $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ en $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = 2\sin^2((n+1)x) + 2\cos^2((n+1)x)\sin^2(x) - 2\sin^2((n+1)x)\sin^2(x)$ puis en $\sin^2((n+2)x) + \sin^2(nx) = 2\sin^2((n+1)x) + 2\cos(2(n+1)x)\sin^2(x)$ avec $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

Ainsi : $I_{n+2} + I_n = 2I_{n+1} + 2\int_0^{\pi/2} \cos(2(n+1)x)dx = 2I_{n+1} + 2\left[\dfrac{\sin(2(n+1)x)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} = 2I_{n+1}$.

d. L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire est $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$. On sait qu'alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \geqslant 0,\ I_n = An + B$. Comme $I_0 = 0$ et $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que $\forall n \geqslant 1,\ I_n = \dfrac{n\pi}{2}$. On pouvait aussi calculer $I_2 = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx = 2\int_0^{\pi/2}(1 + \cos(2x))dx = \pi$ si on ne pensant pas à intégrer I_0 dans la relation de récurrence. Ainsi, d'après la question **b.** : $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2(u)}{u^2}du = \dfrac{\pi}{2}$. On pose $a(u) = -\dfrac{1}{u}$ et $b(u) = \sin^2(u)$ de sorte que a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{u\to 0} a(u)b(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$ (le crochet converge) donc, par intégration par parties, on a $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2(u)}{u^2}du = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(2u)}{u}du = \dfrac{\pi}{2}$ et le changement de variable $u = \dfrac{t}{2}$ permet enfin d'avoir l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt = \dfrac{\pi}{2}$.

6.71 **a.** Par construction, puisque g est de classe C^1 sur $[0;1]$, f_n est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{1}{n}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{n};1\right]$. Or f_n est continue en $\frac{1}{n}$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x)=g(1)e^{\frac{1}{n}-1}=e^{\frac{1}{n}-1}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x)=e^{\frac{1}{n}-1}$ par continuité de l'exponentielle.
De plus, f_n est C^1 sur $[0;1]$ par théorème de prolongement C^1 car $\forall x\in\left[0;\frac{1}{n}\right[$, $f_n'(x)=(ng'(nx)+g(nx))e^{x-1}$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n'(x)=e^{\frac{1}{n}-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n'(x)$ donc $f_n'\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n'(x)=e^{\frac{1}{n}-1}$.
Comme $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=1$, on a bien $f_n\in F$.

b. Pour $n\geqslant 1$, $f_n'(x)=f_n(x)=e^{x-1}$ pour $x\geqslant\frac{1}{n}$ donc $I_n=\int_0^{1/n}|f_n(x)-f_n'(x)|dx=\int_0^{1/n}ng'(nx)e^{x-1}dx$ car g' est positive sur $[0;1]$. On effectue le changement de variable $u=nx$ et $I_n=\int_0^1 g'(u)e^{\frac{u}{n}-1}du$. On pose les fonctions continues $h_n:u\mapsto g'(u)e^{\frac{u}{n}-1}$. La suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $h=\frac{g'}{e}$ qui est continue sur $[0;1]$. De plus, $\forall n\geqslant 1$, $\forall x\in[0;1]$, $|h_n(u)|\leqslant h(u)$ et h est intégrable sur $[0;1]$. Par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\int_0^1 h=\frac{[g(u)]_0^1}{e}=\frac{1}{e}=\ell$.

c. Pour $n\geqslant 1$, $I_n-\ell=I_n-\frac{1}{e}=\int_0^1 g'(u)(e^{\frac{u}{n}-1}-e^{-1})du$. Or $e^{\frac{u}{n}-1}-e^{-1}=e^{-1}(e^{\frac{u}{n}}-1)\sim\frac{u}{ne}$ pour $u\in]0;1]$. Ce qui nous conduit à poser $I_n-\ell=\frac{1}{ne}\int_0^1 g'(u)(n(e^{\frac{u}{n}}-1))du=\frac{1}{ne}\int_0^1 t_n(u)du$ en posant $t_n:u\mapsto g'(u)(n(e^{\frac{u}{n}}-1))$. D'après ce qui précède, la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $t:u\mapsto ug'(u)$ qui est continue sur $[0;1]$. Les t_n sont continues sur $[0;1]$. Comme on montre par une étude de fonction que $\forall t\in[0;1]$, $e^t-1\leqslant(e-1)t$ (convexité de exp), on a $e^{\frac{u}{n}}-1\leqslant(e-1)\frac{u}{n}$ donc $0\leqslant t_n(u)\leqslant(e-1)ug'(u)=\varphi(u)$ et φ est intégrable sur $[0;1]$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 t_n=\int_0^1 t=[ug(u)]_0^1-\int_0^1 g(u)du=1-\int_0^1 g=\int_0^1(1-g)>0$ car $1-g\geqslant 0$, continue et pas nulle. Par conséquent : $I_n-\frac{1}{e}\sim\frac{1}{ne}\left(1-\int_0^1 g(u)du\right)$. Il manquait des questions !

6.72 **a.** Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n:x\mapsto\frac{\mathrm{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $I=\mathbb{R}_+^*$. Or $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x^{3/2}}$ donc f_n est intégrable que $[1;+\infty[$ (d'après RIEMANN $\frac{3}{2}>1$). De plus, $f_0(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}$ et, pour $n\geqslant 1$, $f_n(x)\underset{0}{\sim}\frac{\mathrm{Arctan}(n)}{n\sqrt{x}}$ donc f_n est intégrable sur $]0;1]$ (d'après RIEMANN $\frac{1}{2}<1$). Ainsi, la fonction f_n est intégrable sur I et la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est donc bien définie.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) Pour $x>0$, on a l'inégalité $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{\pi}{2n\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ par encadrement. La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc simplement sur I vers la fonction nulle, notée f.

(H_2) Toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur I.

(H_3) Puisque $\forall x>0$, $0\leqslant\mathrm{Arctan}(x)\leqslant x$ (par le TAF par exemple ou par une petite étude de fonctions) : $\forall x\in]0;1]$, $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$. Mais $\mathrm{Arctan}(x)\leqslant\frac{\pi}{2}$ et $n+x\geqslant x$ donc $\forall x>1$, $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{\pi}{2x\sqrt{x}}$. Ainsi, en posant $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+$ définie par $\forall x\in]0;1]$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\forall x>1$, $\varphi(x)=\frac{\pi}{2x\sqrt{x}}$, alors φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme avant) et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x>0$, $0\leqslant f_n(x)\leqslant\varphi(x)$.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\int_0^{+\infty} f=0$.

c. La relation $\forall x>0$, $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$ se montre avec la fonction $\psi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par

$\psi(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{Arctan}(x)$, en constatant que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\psi'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{1+x^2} = 0$, ce qui prouve que φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et vaut $\varphi(1) = 2\,\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n+x}\right)\right)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} - \int_0^{+\infty}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n+x}\right)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$. Posons donc $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$. En effectuant le changement de variable $x = u^2$ facile à justifier, on trouve $v_n = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{n+u^2} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{n}}$. Par croissance de la fonction Arctan, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n+x}\right)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} \leqslant \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)v_n$. Ainsi, $I_n \underset{+\infty}{=} \frac{\pi v_n}{2} + o(v_n)$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi v_n}{2} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

6.73 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0;1[$. Puisque $\ln(1-t^2) \underset{0}{\sim} -t^2$, on obtient $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{-t^2\ln(t^2)}{t^2} = -2\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ par critère de Riemann. De plus, $\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t)$ car $\lim\limits_{t\to 1^-}\ln(1+t) = \ln(2)$ et, comme $\lim\limits_{t\to 1^-} t^2 = 1$, on sait que $\ln(t^2) \underset{1^-}{\sim} t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \underset{1^-}{\sim} 2(t-1)$ donc $f(t) \underset{1^-}{\sim} 2(t-1)\ln(1-t)$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ ce qui montre que f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$. Ainsi, f est intégrable sur $]0;1[$ donc I existe.

b. $\forall t \in]0;1[,\ \ln(1-t^2) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{n}$ donc $\forall t \in]0;1[,\ f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n(t) = -\dfrac{2t^{2n-2}\ln(t)}{n}$.

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ d'après ce qui précède.

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ car on peut prolonger f_n en 1 en posant $f_n(1) = 0$ et en 0 en posant $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$ et $f_1(t) = -2\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. De plus, f est continue sur $]0;1[$.

(H_3) Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = -\frac{2}{n}\int_0^1 t^{2n-2}\ln(t)dt$ car f_n est positive sur $]0;1[$. Posons $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{t^{2n-1}}{2n-1}$ de sorte que u et v sont C^1 sur $]0;1[$ et que $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to 1} u(t)v(t) = 0$. Par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = \frac{2}{n(2n-1)}\int_0^1 t^{2n-2}dt = \frac{2}{n(2n-1)^2}$. Comme $\dfrac{2}{n(2n-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^3}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt$ converge par comparaison eux séries de Riemann.

On conclut avec le théorème d'intégration terme à terme que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(2n-1)^2}$.

c. On décompose $\dfrac{2}{n(2n-1)^2} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{4}{2n-1} + \dfrac{4}{(2n-1)^2}$ en procédant par identification par exemple. Ainsi, en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(2k-1)^2}$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, on a $S_n = 2H_n - 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$ donc $S_n = 2H_n - 4\left(H_{2n} - \dfrac{H_n}{2}\right) + 4\left(T_{2n} - \dfrac{T_n}{4}\right) = 4(H_n - H_{2n}) + 4T_{2n} - T_n$ en rajoutant et en enlevant les termes d'indices pairs. Or on sait que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{\pi^2}{6}$ donc, en injectant ceci dans la relation précédente, $S_n \underset{+\infty}{=} 4(\ln(n) + \gamma - \ln(2n) - \gamma) + \dfrac{4\pi^2}{6} - \dfrac{\pi^2}{6} + o(1) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{2} - 4\ln(2) + o(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{2} - 4\ln(2)$ ce qui montre finalement que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}dt = \frac{\pi^2}{2} - 4\ln(2) \sim 2,16$.

6.74 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+n^4x^2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4x^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge d'après RIEMANN ($4>1$). Si $x=0$, $f_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge aussi d'après RIEMANN ($2>1$). Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Comme les f_n sont paires et décroissantes sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est aussi paire et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. Comme $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = f_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

c. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et par convergence normale, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, toutes les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \dfrac{-2x}{(1+n^2x^2)^2}$. Ainsi $f_n'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n'(x) = 0$ et $f_n''(x) = \dfrac{6n^2x^2-2}{(1+n^2x^2)^3}$. Ainsi $||f_n'||_{\infty,\mathbb{R}} = \left|f_n'\left(\dfrac{1}{n\sqrt{3}}\right)\right| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8n}$. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. Par contre, si $a>0$, dès que $n \geqslant n_0$ tel que $\dfrac{1}{n_0\sqrt{3}} < a$, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = |f_n'(a)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^4a^3}$ car f_n' est négative et croissante sur $[a;+\infty[$. Par conséquent $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc sur $\mathbb{R}^*$ par parité) car elle l'est sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Reste la dérivabilité en 0 : intéressons-nous au taux d'accroissement de f au voisinage de 0, comme $f(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$, il vient $\forall x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n^4x^2} - \dfrac{1}{n^2}\right) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Posons $g_x : t \mapsto \dfrac{x}{1+t^2x^2}$, alors g_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x>0$, $\forall n\geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) \leqslant \int_{n-1}^n g_x(t)dt$. Comme g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, en sommant toutes ces inégalités, on obtient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)dt$. Comme une primitive de g_x est $t \mapsto \mathrm{Arctan}(xt)$, $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et on conclut par encadrement que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f_d'(0) - \dfrac{\pi}{2}$. Par parité de f, on a aussi $f_g'(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc f n'est pas dérivable en 0.

d. Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[1;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ avec le théorème de la double limite. Plus précisément, pour $x>0$, $x^2f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^2}{n^2+n^4x^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ en posant les fonctions $g_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2+n^4x^2}$. Comme g_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers $\dfrac{1}{n^4}$ en $+\infty$, on a $||g_n||_{\infty,[0;+\infty[} = \dfrac{1}{n^4}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème de la double limite à nouveau : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4} = \zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^4}{90x^2}$.

6.75 • Les fonctions $f_n : t \to \dfrac{1}{1+t^n}$ sont continues sur $[0;1[$ et la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction continue constante égale à 1 car $\forall t \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+t^n) = 1$. Comme $\forall n\geqslant 0$, $\forall t\in[0;1[$, $|f_n(t)| \leqslant 1$ avec $t\mapsto 1$ continue et intégrable sur $[0;1[$, le TCD nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n = \int_0^1 1 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

• On a $u_n - 1 = -\displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^n dt}{1+t^n}$ pour $n\geqslant 1$ et on pose $u = t^n \iff t = u^{\frac{1}{n}} = \varphi(u)$ où φ est bijective, strictement croissante et de classe C^1 de $]0;1[$ dans $]0;1[$ pour obtenir $u_n - 1 = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}du$. Posons $g_n : u \mapsto \dfrac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}$. Les fonctions g_n sont continues sur $]0;1[$, la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction continue $g : u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ sur $]0;1[$. De plus, on a $\forall n\geqslant 1$, $\forall u \in]0;1[$, $|g_n(u)| \leqslant g(u)$ avec g intégrable sur $]0;1[$ donc le TCD permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n = \int_0^1 g = \ln(2)$. Ainsi $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(2)}{n}$.

• De plus, $v_n = u_n - 1 + \dfrac{\ln(2)}{n} = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}du + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{du}{1+u} = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1+u}du$. Or, pour $u \in]0;1[$, on a $1-u^{\frac{1}{n}} = 1 - e^{\frac{1}{n}\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(u)}{n}$ ce qui nous conduit à écrire $v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1+u}du$ et à poser $h_n : u \mapsto \dfrac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1+u}$. Les fonctions h_n sont continues sur $]0;1[$ et la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction continue $h : u \mapsto \dfrac{-\ln(u)}{1+u}$ d'après ce qui précède. On a l'inégalité classique $e^x \geqslant 1+x$ qui provient de la convexité de la fonction exponentielle. On l'applique en $x = \dfrac{1}{n}\ln(u)$ pour avoir $u^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}\ln(u)$ donc $0 \leqslant h_n(u) \leqslant \dfrac{-\ln(u)}{1+u} = h(u)$ avec h qui est intégrable sur $]0;1[$ car prolongeable par continuité en 1 et vérifiant $h(u) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Big)$ par croissances comparées. Par le TCD : $\lim_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 h_n = \int_0^1 h = -\int_0^1 \frac{\ln(u)du}{1+u} = I > 0$.

Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{I}{n^2}$. Mais, en écrivant $\dfrac{1}{1+u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u^k$ pour $u \in]0;1[$ (série géométrique), on obtient la relation $I = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)du}{1+u} = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}u^k\ln(u)\Big)du$. En posant $f_k : u \mapsto (-1)^{k+1}u^k\ln(u)$, les f_k sont continues et intégrables sur $]0;1[$, $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement vers h sur $]0;1[$ et h est continue sur $]0;1[$. Or $\displaystyle\int_0^1 |f_k| = -\int_0^1 u^k\ln(u)du = -\Big[\frac{u^{k+1}}{k+1}\ln(u)\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^k}{k+1}du = \Big[\frac{u^{k+1}}{(k+1)^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{(k+1)^2}$. Or $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(k+1)^2}$ converge par Riemann $(2>1)$ donc, par le TITT : $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ (classique en séparant les termes pairs et impairs et en se ramenant à $\zeta(2)$). Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{I}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12n^2}$. Au final, $u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + \dfrac{\pi^2}{12n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

6.76 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{(\ln t)^2}{1+t^2}$. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, que $f(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\Big)$ par croissances comparées.

De plus, on sait que $\forall t \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$ (série géométrique). Ainsi, $\forall t \in]0;1[$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{2n}(\ln(t))^2$. Mais que faire pour $t \in [1;+\infty[$? Un changement de variable !
On écrit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt$ et on pose $t = \dfrac{1}{u}$ (facile à justifier) dans la seconde intégrale d'où $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt = \int_1^0 \frac{(-\ln u)^2}{1+(1/u)^2}\Big(-\frac{du}{u^2}\Big) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt$. Ainsi $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}dt$ (on intègre sur $]0;1[$).
Par construction, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$. Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ car $f_0(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et les f_n se prolongent par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ par croissances comparées pour $n \geqslant 1$. Elles se prolongent toutes par continuité en 1 avec $f_n(1) = 0$. De plus, f est continue sur $]0;1[$.
Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 (\ln(t))^2 t^{2n}dt = \frac{2}{(2n+1)^3}$ avec deux intégrations par parties (à faire). Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^3}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme nous apprend que f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et que $\displaystyle\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$ donc $I = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sim 3,87$.

Il se trouve que $I = \dfrac{\pi^3}{8}$ mais c'est une autre histoire.

$\boxed{\textbf{6.77}}$ **a.** Convergence simple : • soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall n \geqslant \text{Max}(1, \lfloor -x \rfloor + 1)$, $n \geqslant 1$ et $n + x > 0$ donc $f_n(x) = \text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{n}\Big) - \text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{n+x}\Big)$ car on sait que $\forall y > 0$, $\text{Arctan}(y) + \text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{y}\Big) = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi $f_n(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} + O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$ puisque $\text{Arctan}(u) \underset{0}{=} u + O(u^3)$. Or $\dfrac{1}{n+x} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+\frac{x}{n}} = \dfrac{1}{n}\Big(1 - \frac{x}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{x}{n^2} + O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$. Ainsi $f_n(x) \underset{0}{=} \frac{x}{n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$. Donc $f_n(0) = 0$ si $x = 0$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ si $x \neq 0$. Dans les deux cas, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge par RIEMANN. On a donc la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

• On pouvait aussi dire, pour $x \neq 0$, que $\tan(f_n(x)) = \dfrac{(n+x)-n}{1+n(n+x)} = \dfrac{x}{1+n(n+x)}$ par une formule de trigonométrie. Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \tan(f_n(x)) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ ce qui va plus vite.

• On pouvait même, puisque Arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avoir l'existence de $c_n \in [\widetilde{n; n+x}]$ tel que $f_n(x) = (n + x - n)\,\text{Arctan}'(c_n) = \dfrac{x}{1+c_n^2}$ par le théorème des accroissements finis ce qui, comme $c_n \underset{+\infty}{\sim} n$ car c_n est entre $n + x$ et n, devient à nouveau $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ si $x \neq 0$.

Convergence normale : comme toutes les f_n sont croissantes et valent 0 en 0, la fonction f est aussi croissante et $f(0) = 0$ par convergence simple. Comme f_n est croissante sur $\mathbb{R}$, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)$ et qu'on a $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n) \leqslant \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(n) = \Big| -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)\Big|$, on peut conclure que $|f_n|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et admet sa borne supérieure au voisinage de $-\infty$. On a donc la relation $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \lim\limits_{n\to-\infty} |f_n(x)| = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(n) \geqslant \frac{\pi}{2}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge donc grossièrement. Par conséquent, il n'y a pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme : posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)\Big) \leqslant -(n+1)\frac{\pi}{2}$. Si la fonction f était bornée, comme elle est croissante et strictement négative sur $\mathbb{R}_-$, elle admettrait une limite finie $\ell < 0$ en $-\infty$. Or dès que $-(n+1)\frac{\pi}{2} < \ell$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \leqslant x_0$, $S_n(x) < \ell$ car S_n est croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} S_n(x) \leqslant -(n+1)\frac{\pi}{2} < \ell$. C'est absurde car alors on aurait $\forall x \leqslant x_0$, $f(x) \leqslant S_n(x) < \ell$ car $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ et que $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \leqslant 0$ car $x \leqslant 0$ donc $\forall k \geqslant n+1$, $f_k(x) \leqslant 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Comme toutes les S_n sont bornées car les f_n le sont, les fonctions $R_n = f - S_n$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$ et ne peut donc pas avoir de convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

b. (H_1) On a déjà vu la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$ vers f.

(H_2) Toutes les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{1+(n+x)^2}$.

(H_3) Soit $[a; b]$ un segment, . Dès que $n \geqslant \lfloor -a \rfloor + 1$, on a $n + a \geqslant 0$ donc $\forall x \in [a; b]$, $0 \leqslant n + a \leqslant n + x \leqslant n + b$ donc $(n+x)^2 \geqslant (n+a)^2$ et $0 \leqslant f_n'(x) \leqslant \dfrac{1}{1+(n+a)^2}$ donc $||f_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+a)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ par RIEMANN.

On en déduit par théorème que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+(n+x)^2}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1)-f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(f_n(x+1)-f_n(x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(\mathrm{Arctan}(n+x+1)-\mathrm{Arctan}(n+x)\big)$ donc $f(x+1)-f(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\big(\mathrm{Arctan}(k+x+1)-\mathrm{Arctan}(k+x)\big)$. Or, par télescopage, on obtient $\sum_{k=0}^{n}\big(\mathrm{Arctan}(k+1+x)-\mathrm{Arctan}(k+x)\big) = \mathrm{Arctan}(n+1+x)-\mathrm{Arctan}(x)$ et $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Arctan}(n+x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $f(x+1)-f(x) = \frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)$ qui devient, si $x>0$, $f(x+1)-f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

• On peut en déduire par exemple que, puisque $f(0)=0$, on a $f(1)=\frac{\pi}{2}$ en prenant $x=0$ et , par une récurrence facile, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(n) = \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$. Par une petite étude de fonction, on obtient que $\forall x\in[0;1],\ x-\frac{x^3}{3}\leqslant\mathrm{Arctan}(x)\leqslant x$, d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{\pi}{2}+H_{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3k^3}\leqslant f(n)\leqslant\frac{\pi}{2}+H_{n-1}$ avec $H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n-1)+\gamma+o(1) \underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$. Comme $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3k^3}\underset{+\infty}{=}\frac{\zeta(3)}{3}+O(1)$, on en déduit par encadrement que $f(n)\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$. Or, comme f est croissante, pour $x\geqslant1$, on trouve $f(\lfloor x\rfloor)\leqslant f(x)\leqslant f(\lfloor x\rfloor+1)$, mais, puisque $f(\lfloor x\rfloor)\underset{+\infty}{\sim}\ln(\lfloor x\rfloor)\underset{+\infty}{\sim}\ln(x)$ et $f(\lfloor x\rfloor+1)\underset{+\infty}{\sim}\ln(\lfloor x\rfloor+1)\underset{+\infty}{\sim}\ln(x)$, par encadrement, $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\ln(x)$.

• Autrement, on pouvait poser, si $x>0$, la fonction $h_x : t\mapsto\mathrm{Arctan}(t+x)-\mathrm{Arctan}(t)$ de sorte que h_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, puisque $h_x'(t) = \frac{1}{1+(t+x)^2}-\frac{1}{1+t^2} = \frac{-x(2t+x)}{(1+(t+x)^2)(1+t^2)}\leqslant0$, h_x est décroissante. Par comparaison série-intégrale, $\forall k\geqslant1$, $\int_k^{k+1}h_x(t)dt\leqslant h_x(k)=f_k(x)\leqslant\int_{k-1}^{k}h_x(t)dt$. On somme ces inégalités (tout converge car $h_x(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{t^2}$ comme avant) : $\int_1^{+\infty}h_x(t)dt\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}h_x(t)dt$. Or une primitive de h_x sur $\mathbb{R}_+$ est $H_x : t\mapsto(t+x)\,\mathrm{Arctan}(t+x)-t\,\mathrm{Arctan}(t)-\frac{1}{2}\ln(1+(t+x)^2)+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$. Par le théorème d'encadrement, on trouve avec quelques développements limités que $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\ln(x)$.

6.78 Soit F la primitive de f qui s'annule en 0 : $\forall x\geqslant0,\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Par hypothèse, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\ell=\int_0^{+\infty}f(t)dt$. Par IPP, les fonctions $t\mapsto t$ et F étant de classe C^1 sur les segment $[0;x]$, on a $\int_0^x tf(t)dt=[tF(t)]_0^x-\int_0^x F(t)dt = xF(x)-\int_0^x F(t)dt=\int_0^x(F(x)-F(t))dt$.

<u>Méthode 1</u> : soit $\varepsilon>0$, puisque $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\ell$, il existe un réel $x_0\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall x\geqslant x_0,\ \ell-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant F(x)\leqslant\ell$. Ainsi, $\forall t\in[x_0;x],\ 0\leqslant F(x)-F(t)\leqslant\ell-F(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ donc on l'encadrement :

$$0\leqslant\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x(F(x)-F(t))dt=\int_0^{x_0}(F(x)-F(t))dt+\int_{x_0}^x(F(x)-F(t))dt\leqslant x_0\ell+\frac{\varepsilon}{2}(x-x_0).$$

$x_0\ell+\frac{\varepsilon}{2}(x-x_0)\leqslant\varepsilon x\iff x\geqslant x_1=\frac{2x_0\ell}{e}-x_0$. $\forall x\geqslant\mathrm{Max}(x_0,x_1)$, $\int_0^x tf(t)dt\leqslant\varepsilon x$ d'où $\int_0^x tf(t)dt\underset{+\infty}{=}o(x)$.

<u>Méthode 2</u> : on a donc $\forall x>0$, $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x\frac{F(x)-F(t)}{x}dt=\int_0^1(F(x)-F(xu))du$ en posant $t=ux$. Soit une suite $(x_n)_{n\geqslant0}$ de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{x_n}\int_0^{x_n}tf(t)dt=\int_0^1 f_n(u)du$ en posant $f_n : u\mapsto F(x_n)-F(x_nu)$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant0}$ converge simplement vers $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $g(0)=\ell$ et $g(u)=0$ si $x\in]0;1]$ car $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\ell$. Les f_n et g sont toutes continues et intégrables sur $[0;1]$ et $\forall u\in[0;1]$, $|f_n(u)|=f_n(u)\leqslant F(x_n)\leqslant\ell=\varphi(u)$ et φ est intégrable sur $[0;1]$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}\int_0^{x_n}tf(t)dt=\int_0^1 g(u)du=0$.

Par caractérisation séquentielle de la limite, on a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt = 0$ donc $\int_0^x tf(t)dt \underset{+\infty}{=} o(x)$.

6.79 Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc u_n existe.

Comme $\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$, la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et elle tend vers 0 car la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction f qui est nulle sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et qui vaut 1 en 0. Comme les f_n et f sont continues par morceaux et que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant 1$, le théorème de convergence dominée montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n = \int_0^{\pi/2} f = 0$. Par le CSSA, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Le TITT ne peut pas s'appliquer ici car la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ ne converge pas absolument (on connaît l'équivalent classique des intégrales de Wallis : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k = \int_0^{\pi/2}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(-\cos t)^k\right)dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1-(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t}dt$. Si $I = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+\cos t}$, on a $|S_n - I| \leqslant \int_0^{\pi/2}\cos^{n+1} t dt = |u_{n+1}| \to 0$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = I$. On connaît la formule de trigonométrie classique $\cos t = \frac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}$ donc $I = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+\cos t} = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt = \left[\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = 1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

6.80 **a.** Si $n \geqslant 1$, g_n est dérivable sur $[0;1]$ par théorèmes généraux et $g_n'(t) = -\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}e^t + \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t$ qu'on factorise en $g_n'(t) = -\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\frac{te^t}{n}$ pour $t \in [0;1]$. Ainsi, comme $\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right| = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant 1$ et $|t| \leqslant 1$, on a bien la majoration suivante, $\forall t \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$.

b. Si $t \in]0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, par le théorème des accroissements finis, comme g_n est dérivable sur $[0;1]$, il existe $c \in]0;t[$ tel que $g_n(t) - 1 = g_n(t) - g_n(0) = tg_n'(c)$. Or $|g_n'(c)| \leqslant \frac{e^c}{n} \leqslant \frac{e^t}{n}$ d'après **a.** donc $|g_n(t) - 1| \leqslant \frac{te^t}{n}$.

c. Soit $x \in [0;1]$, $|I_n(x) - x| = \left|\int_0^x g_n(t)dt - \int_0^x dt\right| = \left|\int_0^x (g_n(t)-1)dt\right| \leqslant \int_0^x |g_n(t)-1|dt \leqslant \frac{1}{n}\int_0^x te^t dt$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^x te^t dt = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = x$. Ainsi, la suite de fonctions $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto x$ sur $[0;1]$.

d. On reprend la majoration précédente, $|I_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^x te^t dt \leqslant \frac{I}{n}$ si $I = \int_0^1 te^t dt = [(t-1)e^t]_0^1 = 1$ donc $I_n - f$ est bornée sur $[0;1]$ et on a $||I_n - f||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on a bien convergence uniforme de $(I_n)_{n\geqslant 1}$ vers f sur $[0;1]$.

6.81 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ qui est paire (car toutes les f_n le sont) et positive sur $\mathbb{R}$ (pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est du signe de son premier terme donc du signe de $(-1)^2 = 1$).

b. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^2}{x^4+k}$. Le même critère spécial nous permet de majorer, $|R_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{x^4+n+1}$. Or on se rappelle de l'inégalité $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour deux réels positifs a et b car $(a-b)^2 \geqslant 0$. Ainsi, $|R_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{x^4+n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ en posant $a = \sqrt{n+1}$ et $b = x^2$. On pouvait bien sûr aussi étudier $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4+n+1}$ en la dérivant pour s'apercevoir qu'elle atteint son maximum en $x_n = \sqrt[4]{n+1}$. Ainsi $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c. f_n est positive, paire, dérivable, tend vers 0 en $\pm\infty$ et $f_n'(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{2x(n-x^4)}{(x^4+n)^2}$ donc $|f_n|$ atteint son maximum en $\pm n^{\frac14}$ où elle vaut $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |f_n(\sqrt[4]{n})| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Soit $I \neq \{0\}$ un intervalle réel, il existe $a \neq 0$ dans I. Par l'étude ci-dessus, f_n est bornée sur I car elle l'est sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ mais $||f_n||_{\infty,I} \geqslant |f_n(a)| = \dfrac{a^2}{a^4+n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^2}{n}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{a^2}{n}$ diverge, on obtient par comparaison la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,I}$. Par conséquent, il n'existe aucun intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement. Par contre, si $I = \{0\}$, comme $\forall n \geqslant 1,\ f_n(0) = 0$, on a bien convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur I.

d. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et que la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est uniforme sur $\mathbb{R}$, on a par théorème la continuité de f sur $\mathbb{R}$. On a même, puisque toutes les fonctions f_n admettent des limites finies en $+\infty$ et par théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

6.82 • Soit $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) < 1$ donc, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable par opérations et $f_n'(x) = n\big(-n\sin^2 x + \cos^2 x\big)\cos^{n-1} x$ donc la fonction f_n est croissante sur $\left[0;\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = x_n\right]$ et décroissante sur $\left[x_n;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $||f_n||_\infty = f_n(x_n)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$, $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\sin(\theta) \underset{0}{\sim} \theta$, on a l'équivalent $\sin(x_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. De plus, pour $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ donc $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}}$ car cos est positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, on obtient $\cos(x_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}$. Classiquement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n(x_n) = e^{-1/2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Par conséquent, $||f_n||_\infty = f_n(x_n) \underset{+\infty}{=} \sqrt{\dfrac{n}{e}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Par contre, si $a \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, si n est assez grand, on a $x_n < a$ donc f_n est positive et décroissante sur $\left[a;\frac{\pi}{2}\right]$ et $||f_n||_{\infty,[a;\pi/2]} = f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\left[a;\frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $a \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

6.83 On sait d'après le cours que les séries de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^x}$ convergent pour $x > 1$ (par comparaison série-intégrale) donc $\mathcal{D}_\zeta =]1;+\infty[$. Posons $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ pour $n \geqslant 1$. Les fonctions f_n sont toutes de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$ et $f_n'(x) = -\ln(n)f_n(x) = -\dfrac{\ln(n)}{n^x}$. Soit $a > 1$, alors par croissance de f_n' sur $[a;+\infty[$, et puisque f_n' est négative, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = |f_n'(a)| = \dfrac{\ln(n)}{n^a} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$ si $1 < b < a$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Ainsi ζ est de classe C^1 sur $]1;+\infty[$ et $\forall x > 1,\ \zeta'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n^x}$.

$\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement vers $\zeta - 1$ sur $[2;+\infty[$. Les f_n sont continues et intégrables sur $[2;+\infty[$ car

$\frac{1}{n^x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées si $n \geqslant 2$. La fonction $\zeta - 1$ est elle aussi continue sur $[2;+\infty[$. De plus, $\int_2^{+\infty} |f_n| = \int_2^{+\infty} \frac{1}{n^x}dx = \int_2^{+\infty} e^{(-\ln n)x}dx = \left[\frac{e^{(-\ln n)x}}{-\ln n}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{n^2 \ln n}$. Comme $\frac{1}{n^2\ln n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \int\limits_2^{+\infty} |f_n|$ converge. Par le TITT, on a donc $\zeta-1$ intégrable sur $[2;+\infty[$ et on a la relation souhaitée : $\int_2^{+\infty} \big(\zeta(x)-1\big)dx = \int_2^{+\infty}\Big(\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)\Big)dx = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\int_2^{+\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln(n)} \sim 0.605.$

6.84 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-x^n}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[\alpha;+\infty[$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ existe. Comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 2}(-1)^n\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ est une série alternée.

(H_1) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f telle que $f(x) = 1$ si $x < 1$, $f(1) = e^{-1}$, $f(x) = 0$ si $x > 1$.

(H_2) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec φ telle que $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0;1]$ et $\varphi(x) = e^{-x}$ si $x > 1$. Or φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence).

On peut appliquer le théorème de convergence dominée sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$.

- Si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^1 1dx = 1-\alpha > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}(-1)^n\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = 0$. Comme $\forall x \in [\alpha;+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \geqslant x^{n+1}$ (car $x \geqslant 1$), on en déduit que $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$ par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 2}(-1)^n\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ converge par le critère spécial des séries alternées car $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et tend vers 0.

Quant à la convergence absolue de cette série, il nous faut être plus précis sur u_n.

- Si $\alpha < 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ diverge grossièrement d'après ce qui précède.
- Si $\alpha = 1$, on pose $x = h(u) = u^{1/n}$ avec h de classe C^1, bijective et strictement croissante de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$ et on a $u_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}u^{1/n}du$. On pose $g_n : u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}u^{1/n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

    (H_1) La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers $g : u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$.

    (H_2) Les g_n et g sont continues sur $[1;+\infty[$.

    (H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall u \geqslant 1,\ |g_n(u)| \leqslant e^{-u}$ et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

  Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} g_n = \int_1^{+\infty} g = I > 0$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ diverge par comparaison à la série harmonique.
- Si $\alpha > 1$, comme $\forall t > 1,\ te^{-t} \leqslant 1$ (faire une étude de fonction), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [\alpha;+\infty[,\ e^{-x^n} \leqslant \frac{1}{x^n}$ donc $u_n \leqslant \int_\alpha^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}}$ converge car $\frac{1}{(n-1)\alpha^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ converge par comparaison.

Au final, $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ converge $\Longleftrightarrow \alpha\geqslant 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\int_\alpha^{+\infty} e^{-x^n}dx$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

6.85 **a.** Soit $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Comme l'amplitude totale de g vaut $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\underset{\mathbb{R}}{\mathrm{Max}}(g)-\underset{\mathbb{R}}{\mathrm{Min}}(g)=\frac{1}{2}$, il est évident que $g(y)-g(x)\geqslant -|y-x|$ dans les cas suivants : $g(y)-g(x)\geqslant 0$ ou $|y-x|\geqslant\frac{1}{2}$. Si $|y-x|<\frac{1}{2}$ et $g(y)<g(x)$, on peut traiter deux cas (mais à l'oral un dessin suffit) :

- s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $(x,y)\in\left[k;k+\frac{1}{2}\right]^2$, on a (faire un graphe) $g(y)-g(x)=-|y-x|$.
- soit par exemple (il y a 3 autres cas) $x\in\left[k;k+\frac{1}{2}\right]$ et $y\in\left[k+\frac{1}{2};k+1\right]$, comme $2x\leqslant 2k+1$ par hypothèse,

on a $g(y)-g(x)=g(y)-g\left(k+\frac{1}{2}\right)+g\left(k+\frac{1}{2}\right)-g(x)=-\left(y-k-\frac{1}{2}\right)+\left(k+\frac{1}{2}-x\right)\geqslant -|y-x|=-y+x$.

Ainsi, on a bien $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(y)-g(x)\geqslant -|y-x|$.

b. Comme g est bornée par $\frac{1}{2}$, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ |g_n(x)|\leqslant\frac{1}{2\ell^n}$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}}\leqslant\frac{1}{2\ell^n}$. Or, comme $\ell>1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\ell^{-n}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f. Comme toutes les fonctions g_n (comme g) sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit par théorème la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

c. Avec ces notations, on a $f(a+h)-f(a)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(g_n(a+h)-g_n(a))$. Or pour $n\geqslant m$, on a $\ell^n a\in\mathbb{Z}$ donc $g_n(a)=0$. De plus, pour $n\geqslant 2m+1$, $\ell^n(a+h)\in\mathbb{Z}$ donc $g_n(a+h)=0$ aussi. Si $n\in[\![m;2m]\!]$, $g_n(a+h)=\frac{g(\ell^n(a+h))}{\ell^n}=\frac{g(\ell^n h)}{\ell^n}=g_n(h)$ car $\ell^n a\in\mathbb{Z}$ et que g est 1-périodique. Par conséquent, $f(a+h)-f(h)=\sum\limits_{n=0}^{m-1}(g_n(a+h)-g_n(a))+\sum\limits_{n=m}^{2m}g_n(h)$ ce qui donne, comme $\ell^n h\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ donc $g_n(h)=|h|$ pour $n\in[\![m;2m]\!]$, et d'après la question **a.**, $f(a+h)-f(a)\geqslant -m|h|+(m+1)|h|=|h|$.

d. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha<\beta$ tels que f soit monotone (par exemple croissante) sur $]\alpha;\beta[$. Par densité dans $\mathbb{R}$ des $\left\{\frac{k}{\ell^p}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\text{ et }p\in\mathbb{N}\right\}$, on a l'existence d'un entier $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $\alpha<a-\frac{1}{\ell^{2m+1}}<a<\beta$ avec $\ell^m a\in\mathbb{Z}$. Si on veut être constructif, on prend $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $\beta-\alpha>\frac{3}{\ell^m}$ (il en existe car $\lim\limits_{m\to+\infty}\ell^m=+\infty$), puis $a=\frac{\lfloor\beta\ell^m\rfloor-1}{\ell^m}$. Alors $\beta\ell^m-1<\lfloor\beta\ell^m\rfloor\leqslant\beta\ell^m$ ce qui donne $\beta\ell^m-1<a\ell^m+1\leqslant\beta\ell^m$ donc $a\leqslant\beta-\frac{1}{\ell^m}<\beta$ et $\beta-\frac{1}{\ell^m}<a+\frac{1}{\ell^m}\Longrightarrow\beta-\frac{2}{\ell^m}<a\Longrightarrow\alpha+\frac{1}{\ell^m}-\frac{1}{\ell^{2m+1}}<a-\frac{1}{\ell^{2m+1}}$ car $\beta>\frac{3}{\ell^m}+\alpha$. Si on pose $h=-\frac{1}{\ell^{2m+1}}$ comme ci-dessus, on a donc $\alpha<a+h<a<\beta$ avec $f(a+h)-f(a)\geqslant|h|>0$ alors que $a+h<a$ ce qui contredit la croissance de f. Si on suppose f décroissante sur $]\alpha;\beta[$, il suffit de prendre $h=+\frac{1}{\ell^{2m+1}}$. On vient donc de montrer par l'absurde que f n'est monotone sur aucun intervalle réel.

On pourrait montrer avec un peu plus d'efforts que f est certes continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable nulle part : c'est la fonction de TAKAGI découverte en 1903 et son graphe est aussi appelé courbe du blanc-manger.

e. f est 1-périodique car toutes les fonctions g_n le sont (car $\ell\in\mathbb{N}$). Ainsi, $\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$. Or on a vu à la question **b.** que $\sum\limits_{n\geqslant 0}g_n$ convergeait normalement vers f sur le segment $[0;1]$, ce qui donne par théorème $\int_0^1 f(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n(x)dx$. Or $\int_0^1 g_n(x)dx=\int_0^1\frac{g(\ell^n x)}{\ell^n}dx=\frac{1}{\ell^{2n}}\int_0^{\ell^n}g(u)du$ en posant $u=\ell^n x$. Comme g est 1-périodique, on a $\int_0^1 g_n(x)dx=\frac{1}{\ell^n}\int_0^1 g(u)du=\frac{1}{4\ell^n}$. D'où, $\int_k^{k+1}f(x)dx=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\ell^n}=\frac{\ell}{4(\ell-1)}$.

6.86 **a.** Si $t = 1$, on a $\forall n \geqslant 1,\ u_n(t) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(1)$ converge.

Si $t \in]0;1[$, $u_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ converge absolument par RIEMANN.

Si $t > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(t)$ diverge grossièrement. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $]0;1]$ seulement ce qui fait que le domaine de définition de la fonction S est $\mathcal{D}_S =]0;1]$.

b. Comme $\varphi : t \mapsto t\ln(t)$ est bornée sur $]0;1]$ car continue sur le segment $[0;1]$ puisqu'on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, il vient $\forall t \in]0;a],\ \forall n \geqslant 1,\ |u_n(t)| = \dfrac{t^{n-1}|\varphi(t)|}{H_n} \leqslant \dfrac{a^{n-1}||\varphi||_\infty}{H_n}$ par conséquent $||u_n||_{\infty,]0;a]} \leqslant \dfrac{a^{n-1}||\varphi||_\infty}{H_n} \underset{+\infty}{=} o(a^n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (puisqu'on a $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$) donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $]0;a]$.

Même si ce n'est pas demandé, voyons si la convergence est normale sur $]0;1]$. Soit $n \geqslant 1$, d'abord u_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall t \in]0;1],\ u_n'(t) = \dfrac{t^{n-1}}{H_n}(n\ln t + 1)$, de plus u_n est négative et $u_n(0) = u_n(1) = 0$ donc $||u_n||_{\infty,]0;1]} = -u_n\left(e^{\frac{-1}{n}}\right) = \dfrac{1}{enH_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{en\ln(n)}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge par comparaison série/intégrale car une primitive de la fonction $x \to \dfrac{1}{x\ln(x)}$ décroissante sur $]1;+\infty[$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $]0;1]$.

c. Soit $t \in]0;1[$, $n \geqslant 0$, $|R_n(t)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{t^k|\ln t|}{H_k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{t^k|\ln t|}{H_{n+1}} = \dfrac{t^{n+1}|\ln t|}{(1-t)H_{n+1}}$ car ces séries convergent, que $\forall k \geqslant n+1,\ H_k \geqslant H_{n+1}$ et que les u_k sont toutes négatives sur $]0;1[$. Par conséquent, en posant la fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{t|\ln t|}{1-t}$, on a $\forall t \in]0;1[,\ |R_n(t)| \leqslant \dfrac{\psi(t)}{H_{n+1}}$. Or ψ se prolonge par continuité en 0 avec $\psi(0) = 0$ et en 1 avec $\psi(1) = 1$. Ainsi, par continuité de ψ, elle est bornée (par M) sur le segment $[0;1]$ et on a donc $\forall t \in]0;1],\ |R_n(t)| \leqslant \dfrac{M}{H_{n+1}}$ (ça marche aussi pour $t = 1$ car $R_n(1) = 0$). On en déduit que $||R_n||_{\infty,]0;1]} \leqslant \dfrac{M}{H_{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{H_{n+1}} = 0$; ce qui nous permet de conclure que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]0;1]$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $]0;1]$, la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $]0;1]$ montre que u est continue sur $]0;1]$.

Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et on a $u_n'(t) = \dfrac{t^{n-1}(n\ln(t)+1)}{H_n}$. Soit un segment $[a;b] \subset]0;1[$, alors $\forall t \in [a;b],\ |u_n'(t)| \leqslant \dfrac{b^{n-1}(n|\ln(a)|+1)}{H_n}$ donc la fonction u_n' est bornée sur $[a;b]$ et $||u_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant \dfrac{b^{n-1}(n|\ln(a)|+1)}{H_n} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment de $]0;1[$. On peut conclure par théorème que S est de classe C^1 sur $]0;1[$.

Même si ce n'est pas demandé, voyons si S est dérivable en 1. Le taux d'accroissement correspondant s'écrit $\dfrac{S(t)-S(1)}{t-1} = \dfrac{\ln(t)}{t-1}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{H_n}\right)$. La fonction $\theta : t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{H_n}$ est croissante sur $[0;1[$ donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ par le théorème de la limite monotone. Pour tout entier n, $\theta(t) \geqslant \theta_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{t^k}{H_k}$. Or $\lim\limits_{t\to1^-} \theta_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{H_k}$. Ainsi, par passage à la limite : $\lim\limits_{t\to1^-} \theta(t) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{H_k}$. Or, ceci étant vrai pour tout entier $n \geqslant 1$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{H_n}$ divergeant car $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{H_n}\right)$, on a $\lim\limits_{t\to1^-} \theta(t) = +\infty$ donc, comme $\lim\limits_{t\to1^-} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$, on a $\lim\limits_{t\to1^-} \dfrac{S(t)-S(1)}{t-1} = +\infty$ donc S n'est pas dérivable en 1.

6.87 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ donc f_n est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, u_n existe. De plus, pour $n \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties dans u_n en posant $u = f_n$ et $v : t \mapsto t$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ puisque $2n-1 > 0$ donc, $u_n = \left[\dfrac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-n)(2t)t}{(1+t^2)^{n+1}}dt$ donc $u_n = 2n\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt = 2n(u_n - u_{n+1})$ ce qui donne bien $u_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}u_n$.

b. Effectuons le changement de variable $t = \varphi(u) = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$ (φ est bien de classe C^1, bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante), ce qui donne $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n}$. Posons $f_n : u \mapsto \dfrac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $f : u \mapsto e^{-u^2}$ puisque $\dfrac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right) = u^2$ par DL. Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $u \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} \leqslant \dfrac{1}{1+u^2} = \varphi(u)$ (binôme de NEWTON) avec φ qui est clairement continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^2}$. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)du = \int_0^{+\infty} f(u)du = \alpha > 0$. Puisque $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)du$, il vient donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.
On a $u_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. La relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}u_n$ donne la relation $u_n = \dfrac{2n-3}{2n-2}u_{n-1} = \cdots = \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \dfrac{2n-5}{2n-4} \cdots \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}u_1 = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}.\dfrac{2n}{2n-1}$.
Or on sait que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Par produit et rapport d'équivalents, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{(2\pi n)2^{2n}n^{2n}e^{2n}}\pi \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.
En comparant les deux équivalents de u_n, on trouve finalement $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6.88 **a.** Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on peut distinguer trois cas :

- soit $t < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^t$.
- soit $t = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = e/2$.
- soit $t > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^t$ si $t \in [0;1[$, $f(1) = e/2$ et $f(t) = 0$ si $t \in]1;+\infty[$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues et que f ne l'est pas, la convergence de cette suite de fonctions ne peut pas être uniforme par théorème.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n étant continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction φ_n de l'énoncé est la primitive de f_n qui s'annule en 0 donc $\varphi_n' = f_n > 0$ et φ_n est donc strictement croissante. Ainsi, φ_n réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $[0; \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x)[$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = +\infty$ par croissances comparées, la fonction f_n n'est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, comme φ_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $\alpha \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique antécédent noté $x_n(\alpha)$ de α par φ_n, ce qui s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha > 0,\ \exists! x_n(\alpha) > 0,\ \displaystyle\int_0^{x_n(\alpha)} f_n(t)dt = \varphi_n(x_n(\alpha)) = \alpha$.

Dans les deux prochaines questions, tout repose sur le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1$.

c. Soit $\alpha > e - 1$, encore une fois avec un dessin, on conjecture que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n(\alpha) = +\infty$ dans ce cas. Soit $\beta > 1$, comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0;\beta]$, que les f_n et f sont continues par morceaux sur $[0;\beta]$, que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;\beta], |f_n(t)| \leqslant e^t$ et que $t \mapsto e^t$ est intégrable sur $[0;\beta]$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\beta f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\beta) = \int_0^\beta f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = e - 1$ (car $\beta > 1$) par le théorème de convergence dominée. Mais comme $\alpha > e - 1$, par définition de la limite, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \varphi_n(\beta) < \alpha$ ce qui impose, comme φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $\varphi_n(x_n(\alpha)) = \alpha$, que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n(\alpha) > \beta$. On a bien montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n(\alpha) = +\infty$ si $\alpha > e - 1$.

d. Soit $\alpha < e - 1$, on conjecture, toujours à l'aide d'un dessin, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n(\alpha) = \ln(\alpha + 1)$, c'est-à-dire l'unique réel tel que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^t dt = e^x - 1 = \alpha$. D'abord, comme $\forall t \in [0;1[$, on a $f_n(t) < e^t$, donc $\displaystyle\varphi_n(\ln(\alpha+1)) = \int_0^{\ln(\alpha+1)} f_n(t)dt \leqslant \int_0^{\ln(\alpha+1)} e^t dt = \alpha = \varphi_n(x_n(\alpha))$ ce qui conduit à nouveau à $x_n(\alpha) \geqslant \ln(\alpha+1)$ par stricte croissance de φ_n. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\beta = \ln(\alpha+1) + \varepsilon < 1$ (on le peut car $\ln(\alpha+1) < \ln(e - 1 + 1) = \ln(e) = 1$), alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0;\beta]$, les fonctions f_n et f sont continues sur $[0;\beta]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;\beta], |f_n(t)| \leqslant e^t$ et $t \mapsto e^t$ est intégrable sur $[0;\beta]$. On peut donc conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\beta f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\beta) = \int_0^\beta f(t)dt = [e^t]_0^\beta = e^\beta - 1 = e^\varepsilon(\alpha+1) - 1$ par le théorème de convergence dominée. Ainsi, comme $e^\varepsilon(\alpha+1) - 1 > \alpha$, la limite précédente montre que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \varphi_n(\beta) > \alpha = \varphi_n(x_n(\alpha))$ donc $x_n(\alpha) < \beta$ par stricte croissance de φ_n. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \ln(\alpha+1) \leqslant x_n(\alpha) < \ln(\alpha+1) + \varepsilon$. En conclusion, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n(\alpha) = \ln(\alpha+1)$.

6.89 **a.** • Si $x < 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x = 0$, $u_n(x) = \ln(2)$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge aussi grossièrement.

• Si $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (e^{-x})^n$ converge (série géométrique avec $0 < e^{-x} < 1$) donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi le domaine de définition de f vaut $I = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$, comme u_n est décroissante et positive, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(a)$ converge d'après ce qui précède. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[a;+\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\displaystyle\mathbb{R}_+^* = I = \bigcup_{a>0} [a;+\infty[$.

b. On a $u_0(x) = \ln(2)$ et $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $[1;+\infty[$ et théorème de la double limite, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \ln(2)$.

c. Les u_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$, la fonction f est aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ par le théorème de la limite monotone. Supposons que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$, et soit un entier $n \in \mathbb{N}$, posons alors $\displaystyle S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + e^{-kx})$, il vient donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} S_n(x) = (n+1)\ln(2)$. Comme toutes les u_k sont positives, $\forall x > 0,\ f(x) \geqslant S_n(x)$ (I) donc $\ell \geqslant (n+1)\ln(2)$

en passant à la limite dans (I) quand x tend vers 0 (elles existent). Il est impossible que cette inégalité soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, par l'absurde, on a montré que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Comme $f = \ln(2) + u_1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ et que u_1 est strictement décroissante, la fonction f est aussi strictement décroissante sur I car $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ est décroissante. D'après le théorème de la bijection, puisque f est continue sur I, on obtient donc $f(I) = \left] \lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right[=]\ln(2); +\infty[$.

Questions de cours :

• Les séries géométriques $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ convergent si et seulement si $|z| < 1$ et on a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

• Par développements limités, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, il vient $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ainsi, $\forall n \geqslant 2,\ u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Ainsi, par somme, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

• Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, la fonction $f_n - f$ est bornée. Ensuite, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt$ par linéarité de l'intégrale et inégalité de la moyenne. Puis $\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = (b-a)||f_n - f||_{\infty,[a;b]}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ par encadrement car $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = 0$ par hypothèse.

6.90 **a.** Si $x \leqslant 1$, alors $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^x \ln(n)} \geqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge par comparaison série/intégrale car une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite $+\infty$ en $+\infty$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^x\ln(n)}$ diverge par comparaison. Par contre, si $x > 1$, $\dfrac{1}{n^x\ln(n)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^x}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^x\ln(n)}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN. Ainsi, le domaine de définition de h est $\mathcal{D}_h = D =]1; +\infty[$.

b. Posons, pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction $h_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x\ln(n)}$. Soit $a > 1$, comme h_n est décroissante sur D, $||h_n||_{\infty,[a;+\infty[} = h_n(a) = \dfrac{1}{n^a\ln(n)}$. Comme on a vu en **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^a\ln(n)}$ convergeait, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} h_n$ converge normalement sur tout segment de D. Comme les fonctions h_n sont toutes continues sur D, on en déduit la continuité de h sur D par théorème.

c. Comme la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} h_n$ est uniforme (car normale) sur $[2; +\infty[$ et que $\forall n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = 0$, on déduit du théorème de la double limite que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 0 = 0$. On a vu en **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ divergeait. Soit $A > 0$, il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)} \geqslant A + 1$. Or la fonction $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^x\ln(k)}$ est continue en 1 donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in]1; 1+\alpha[$, $|S_n(x) - S_n(1)| \leqslant 1$ ce qui implique que $S_n(x) \geqslant S_n(1) - 1 \geqslant A$. Or $\forall x \in]1; 1+\alpha[$, $h(x) \geqslant S_n(x) \geqslant A$. On vient donc de montrer que $\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]1; 1+\alpha[,\ h(x) \geqslant A$ ce qui se traduit par $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = +\infty$.

d. On se rend compte que $h_{n+1}(x) \underset{+\infty}{=} o(h_n(x))$ pour tout entier $n \geqslant 2$ ce qui nous conduit à conjecturer que $h(x) \underset{+\infty}{\sim} h_2(x)$. Or $\forall x > 1$, $\dfrac{h(x)}{h_2(x)} = 1 + \ln(2) \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{(n/2)^x\ln(n)}$. Posons $g_n(x) = \dfrac{1}{(n/2)^x\ln(n)}$, alors pour

$n \geqslant 3$, comme g_n est décroissante sur $[2;+\infty[$, on a $||g_n||_{\infty,[2;+\infty[} = g_n(2) = \dfrac{1}{(n/2)^2\ln(n)} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$.
Comme $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge par RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} g_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[2;+\infty[$ alors que $\forall n \geqslant 3,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\dfrac{h(x)}{h_2(x)} - 1\Big) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} 0 = 0$ par le théorème de la double limite. Par conséquent : $h(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^x\ln(2)}$.
Pour $x > 1$, la fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x\ln(t)}$ est décroissante sur $[2;+\infty[$ car $h_x'(t) = -\dfrac{x\ln(t)+1}{t^{x+1}\ln^2(t)} < 0$. Ainsi, pour $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_n^{n+1} h_x(t)dt \leqslant \dfrac{1}{n^x\ln(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} h_x(t)dt$. On somme pour $n \geqslant 3$ (tout converge) pour avoir $\displaystyle\int_3^{+\infty} h_x(t)dt \leqslant h(x) - \dfrac{1}{2^x\ln(2)} \leqslant \int_2^{+\infty} h_x(t)dt$ donc, on a l'encadrement suivant avec CHASLES : $\displaystyle\int_2^{+\infty} h_x(t)dt - \int_2^{3} h_x(t)dt + \dfrac{1}{2^x\ln(2)} \leqslant h(x) \leqslant \int_2^{+\infty} h_x(t)dt + \dfrac{1}{2^x\ln(2)}$.
On pose $t = e^u = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1, bijective et strictement croissante de $[\ln(2);+\infty[$ dans $[2;+\infty[$ et on a $\displaystyle\int_2^{+\infty} h_x(t)dt = \int_{\ln(2)}^{+\infty}\dfrac{e^{(1-x)u}}{u}du$. On pose à nouveau $u = \dfrac{v}{x-1}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} h_x(t)dt = \int_{(x-1)\ln(2)}^{+\infty}\dfrac{e^{-v}}{v}dv$.
En écrivant $\displaystyle\int_2^{+\infty} h_x(t)dt = \int_{(x-1)\ln(2)}^{1}\dfrac{e^{-v}-1}{v}dv + \int_{(x-1)\ln(2)}^{1}\dfrac{1}{v}dv + \int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-v}}{v}dv$, les deux termes extrêmes sont bornés et celui du milieu vaut $-\ln((x-1)\ln(2))$ qui tend vers $+\infty$ en 1^+ donc $h(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\ln(x-1)$.

6.91 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n =$ "$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$".
Initialisation : $u_1(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x dt = x+1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x \leqslant \dfrac{x^{0+1}}{(0+1)!}$ et $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a donc $u_{n+2}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_{n+1}(t/2)dt$ et $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t/2)dt$ ce qui donne $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2))dt$ donc, comme $\forall t \in [0;x]$, $t/2 \in \mathbb{R}_+$, par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_{n+1}(t/2) - u_n(t/2) \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}0$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}dt = \dfrac{x^{n+2}}{2^{n+1}(n+2)!} \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$ car $2^{n+1} \geqslant 1$.
On conclut par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge absolument par le critère de D'ALEMBERT ou car $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées, la série télescopique à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}(x) - u_n(x))$ converge par comparaison. Par dualité suite-série, cela équivaut à la convergence de la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$. Ainsi, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction u.
b. Pour $a > 0$ et $x \in [0;a]$, $0 \leqslant u(x) - u_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}(x) - u_k(x)) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!} = R_{n,a}$.
Or $R_{n,a}$ est le reste d'ordre n d'une série convergente car $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{a^n}{n!}$ converge et $e^a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n!}$. Ainsi, on a $0 \leqslant ||u - u_n||_{\infty,[0;a]} \leqslant R_{n,a}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n,a} = 0$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}||u - u_n||_{\infty,[0;a]} = 0$ ce qui se traduit par la convergence uniforme de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers u sur le segment $[0;a]$.
Comme $a > 0$, $\Big|\displaystyle\int_0^a u_n(t/2)dt - \int_0^a u(t/2)dt\Big| = \Big|\int_0^a \big(u_n(t/2) - u(t/2)\big)dt\Big| \leqslant \int_0^a |u_n(t/2) - u(t/2)|dt$ par inégalité triangulaire, on a $\Big|\displaystyle\int_0^a u_n(t/2)dt - \int_0^a u(t/2)dt\Big| \leqslant \int_0^a ||u_n - u||_{\infty,[0;a]}dt = a||u_n - u||_{\infty,[0;a]}$ car

$[0;a/2] \subset [0;a]$ donc, par encadrement, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a u_n(t/2)dt = \int_0^a u(t/2)dt$.
En passant à la limite (elles existent) quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1}(a) = 1 + \int_0^a u_n(t/2)dt$, on obtient $u(a) = 1 + \int_0^a u(t/2)dt$ donc u est solution de (E) car ceci est vrai pour tout $a > 0$ et aussi pour $a = 0$ car $u(0) = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0)$ puisqu'on a facilement $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(0) = 1$ par récurrence.
Soit v une autre fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui est solution de (E), alors la fonction $f = u - v$ vérifie $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \int_0^x f\Big(\dfrac{t}{2}\Big)dt$. On en déduit en dérivant par le théorème fondamental de l'intégration que $\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = f\Big(\dfrac{x}{2}\Big)$. Par récurrence, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(k)}(x) = \dfrac{1}{2^{k-1}} f\Big(\dfrac{x}{2^k}\Big)$ (I).
Soit $a > 0$, la fonction f est continue sur le segment $[0;a]$ donc elle y est bornée, on peut donc définir le réel $M = ||f||_{\infty,[0;a]}$. Comme $u(0) = v(0) = 1$, on a $f(0) = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = 0$ d'après la relation (I) précédente. Par TAYLOR reste intégral, $\forall x \in [0;a],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} + \dfrac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.
Or d'après (I), $||f^{(n+1)}||_{\infty,[0,a]} \leqslant \dfrac{M}{2^n}$ car si $x \in [0;a]$, $\dfrac{x}{2^{n+1}} \in [0;a]$. Ainsi, par l'inégalité de la moyenne et puisque $(x-t)^n \geqslant 0$ dans l'intégrale précédente, on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{n!2^n}\int_0^x (x-t)^n dt = \dfrac{M}{(n+1)!2^n}$. Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ et $\forall x \in [0;a],\ f(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc $v = u$. Il y a donc une unique solution de l'équation (E) et c'est la fonction $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ de la question **a.**.

6.92 Pour tout l'exercice, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$. L'ensemble de définition sur $\mathbb{R}$ de f_n est $\mathbb{R} \setminus \Big\{-\dfrac{1}{n}\Big\}$.

a. • Si $x = 0$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ diverge grossièrement car $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| = 1$.
• S'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $x = -\dfrac{1}{p}$, $f_p(x)$ n'est pas défini donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ non plus.
• Si $x \in \mathbb{R}^* \setminus \Big\{-\dfrac{1}{p} \ \Big|\ p \in \mathbb{N}^*\Big\}$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alternée si $x > 0$ et elle l'est à partir d'un certain rang $n_0 = \Big\lfloor -\dfrac{1}{x} \Big\rfloor + 1$ si $x < 0$. La suite $\Big(\Big|\dfrac{1}{1+nx}\Big|\Big)_{n\geqslant n_0}$ étant décroissante et tendant vers 0, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ converge par le critère spécial des séries alternées.
Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}^* \setminus \Big\{-\dfrac{1}{p} \ \Big|\ p \in \mathbb{N}^*\Big\}$.
On pouvait aussi dire que $\dfrac{(-1)^n}{1+nx} = \dfrac{(-1)^n}{nx} \times \dfrac{1}{1+1/(nx)} \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{nx}\Big(1 + O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{nx} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ pour $x \in D$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{nx}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\Big(\dfrac{1}{nx}\Big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument par RIEMANN. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge par somme.
On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur D. Il est clair que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n}$ et, si $a > 0$, que $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = ||f_n||_{\infty,[a;b]} = \dfrac{1}{1+na}$ si $b > a$ car $|f_n|$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, il n'y a pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f ni sur $\mathbb{R}_+^*$, ni sur $[a;+\infty[$, ni sur $[a;b]$.
Intéressons-nous donc à la convergence uniforme, et tout d'abord sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a;+\infty[$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{1+kx}$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)x} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)a}$ toujours par le critère spécial. On a donc $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers f sur $[a;+\infty[$.
Comme chaque f_n est continue sur D, on en déduit d'après le cours que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $n \geqslant 1$ et $a < -\frac{1}{n}$, posons $g_n = f - \sum_{k=0}^{n-1} f_k = \sum_{k=n}^{+\infty} f_k$. Soit $x \in]-\infty; a[$, $\sum_{k \geqslant n} f_k(x)$ est alternée et $\left(\left|\frac{1}{1+kx}\right|\right)_{k \geqslant n}$ décroît et tend vers 0 d'où, en posant $\overline{R_m}(x) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a la majoration, pour tout entier $m \geqslant n$, $|\overline{R_m}(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \left|\frac{1}{1+(m+1)x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{1+(m+1)a}\right|$ dont on déduit la nouvelle majoration $||\overline{R_m}||_{\infty,]-\infty;a]} \leqslant \left|\frac{1}{1+(m+1)a}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum_{k=n}^{+\infty} f_k$ converge uniformément sur $]-\infty; a]$. Ainsi, g_n est continue sur $]-\infty; a]$ car les f_k) sont toutes continues si $k \geqslant n$. Par somme, $f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k + g_n$ est continue sur $D \cap \left]-\infty; -\frac{1}{n}\right[$. Comme ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f est continue sur D.

b. Pour $n \geqslant 0$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1}n}{(1+nx)^2}$. Soit $x > 0$ et $g_x : t \mapsto \frac{t}{(1+tx)^2}$, alors g_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x'(t) = \frac{1-xt}{(1+xt)^3}$ donc g_x est décroissante sur $\left[\frac{1}{x}; +\infty\right[$. Ainsi, la suite $(|f_n'(x)|)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et tend vers 0 si on pose $n_0 = \lfloor 1/x \rfloor + 1$. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n'(x)$ converge. Posons $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$. Soit $a > 0$ et $x \in [a; +\infty[$, si $n_0 \geqslant \frac{1}{a}$, alors $n_0 \geqslant \frac{1}{x}$ donc, comme g_x est décroissante sur $[n_0; +\infty[$, la suite $(|f_n'(x)|)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial, $|r_n(x)| \leqslant |f_{n+1}'(x)| = \frac{n}{(1+nx)^2} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2}$. Ainsi, $||r_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum_{n \geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$: f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{(1+nx)^2}$.

c. On a convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ vers f sur $[1; +\infty[$ (par exemple), $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$ si $n \geqslant 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = \ell_0 = 1$. Ainsi, par théorème de la double limite, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$. Pour $x > 0$, on a $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ et on conjecture (en négligeant les 1 du dénominateur) que $f(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{x}$ car il est classique que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On écrit donc, pour $x > 0$, $x(f(x) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{1+nx}$ et on pose, pour $n \geqslant 1$, $h_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{1+nx}$. La suite $(|h_n(x)|)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial, $|\widetilde{R_n}(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(x)\right| \leqslant |h_{n+1}(x)| = \frac{x}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Ainsi, $||\widetilde{R_n}||_{\infty,[1;+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on a convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 1} h_n$ sur $[1; +\infty[$. Pour $n \geqslant 1$, $\lim_{x \to +\infty} h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. Par double limite toujours, $\lim_{x \to +\infty} x(f(x) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ donc $f(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{x}$.

Si on veut un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$, on peut regrouper les termes deux par deux. Ainsi, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_{2n}(x) + f_{2n+1}(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2nx+1} - \frac{1}{(2n+1)x+1}\right)$. Pour $x > 0$, en définissant la fonction $g_x : u \mapsto \frac{x}{(2ux+1)\big((2u+1)x+1\big)} = \frac{1}{2ux+1} - \frac{1}{(2u+1)x+1}$, g_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où, pour $n \geqslant 1$, $\int_n^{n+1} g_x(u)du \leqslant \frac{1}{2nx+1} - \frac{1}{(2n+1)x+1} = g_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(u)du$. Comme g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que la série $\sum_{n \geqslant 0} g_x(n)$ converge, on somme ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}^*$ à droite et pour $n \in \mathbb{N}$ à gauche : $\int_0^{+\infty} g_x(u)du \leqslant f(x) \leqslant g_x(0) + \int_0^{+\infty} g_x(u)du$. Or $\int_0^{+\infty} g_x(u)du = \left[\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{2ux+1}{2u+x+1}\right)\right]_0^{+\infty}$ donc

$\int_0^{+\infty} g_x(u)du = \frac{\ln(1+x)}{2x}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1} + \frac{\ln(1+x)}{2x}$.

6.93 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$, on a $f(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ par RIEMANN. De plus, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f est aussi intégrable sur $[1;+\infty[$ par RIEMANN. Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ existe.

b. On sait d'après les séries géométriques que $\forall t \in]0;1[$, $\frac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$. Alors, il vient (c'est même vrai si $t = 1 : 0 = 0$) la relation $\forall t \in]0;1]$, $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \ln(t)$. On pose $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{2n} \ln(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1]$. De plus, les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0;1]$ car $f_0(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et f_n se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ par croissances comparées. La fonction f est continue sur $]0;1]$. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0;1]$, on a $|f_n(t)| = -t^{2n}\ln(t)$. Or $\int_0^1 |f_n(t)|dt = \left[-\frac{t^{2n+1}\ln(t)}{2n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 t^{2n}dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2}$ par une intégration par parties facile à justifier. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge par RIEMANN, on déduit du TITT que f est intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et que $\int_0^1 f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$ de sorte que $\int_0^1 f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} = -C$ où $C = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ est la constante de CATALAN valant $C \sim 0,91$.

En effectuant le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{1}{u}$, φ étant une bijection C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $I = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -I$ donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0$.

6.94 **a.** Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \frac{C_n x^n}{n!}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} C_n$ converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 0$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{x^n}{n!}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées ce qui démontre que $\sum\limits_{n\geqslant} u_n(x)$ converge absolument.

On vient de prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement (vers f par définition) sur $\mathbb{R}$.

Soit $a > 0$, alors $||u_n||_{\infty,[-a;a]} = \frac{|C_n|a^n}{n!} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{a^n}{n!}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour les mêmes raisons. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues (car polynomiales), la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car sur tout segment de $\mathbb{R}$).

On aurait bien sûr pu parler de séries entières de de rayon de convergence pour les mêmes conclusions.

b. Par définition, on a $\forall x \geqslant 0$, $f(x)e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n x^n e^{-x}}{n!}$. On note donc $v_n : x \mapsto \frac{C_n x^n e^{-x}}{n!}$ pour traduire ceci en $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-x}$.

Pour tout entier n, v_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car, par croissances comparées, $v_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x/2})$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $\int_0^{+\infty} |v_n| = \frac{|C_n|}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \frac{|C_n|}{n!}\Gamma(n+1) = |C_n|$ pour $n \in \mathbb{N}$ (car $\Gamma(n+1) = (n+1-1)! = n!$) et on vérifie bien que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |v_n|$ converge puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0} C_n$ converge absolument par hypothèse. On conclut avec le TITT que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a la relation $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n$ (même calcul).

6.95 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0;1[$. Puisque $\ln(1-t^2) \underset{0}{\sim} -t^2$, on obtient $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{-t^2\ln(t^2)}{t^2} = -2\ln(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\Big]0;\dfrac{1}{2}\Big]$ par critère de Riemann. De plus, $\ln(1-t^2) = \ln(1-t)+\ln(1+t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t)$ car $\lim\limits_{t\to 1^-} \ln(1+t) = \ln(2)$ et, comme $\lim\limits_{t\to 1^-} t^2 = 1$, on sait que $\ln(t^2) \underset{1^-}{\sim} t^2-1 = (t-1)(t+1) \underset{1^-}{\sim} 2(t-1)$ donc $f(t) \underset{1^-}{\sim} 2(t-1)\ln(1-t)$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ ce qui montre que f est intégrable sur $\Big[\dfrac{1}{2};1\Big[$. Ainsi, f est intégrable sur $]0;1[$ donc I existe.

b. $\forall t \in]0;1[,\ \ln(1-t^2) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{n}$ donc $\forall t \in]0;1[,\ f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n(t) = -\dfrac{2t^{2n-2}\ln(t)}{n}$.

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ d'après ce qui précède.

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ car on peut prolonger f_n en 1 en posant $f_n(1) = 0$ et en 0 en posant $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$ et $f_1(t) = -2\ln(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$. De plus, f est continue sur $]0;1[$.

(H_3) Pour $n \geqslant 1$, $\int_0^1 |f_n(t)|dt = -\dfrac{2}{n}\int_0^1 t^{2n-2}\ln(t)dt$ car f_n est positive sur $]0;1[$. Posons $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{t^{2n-1}}{2n-1}$ de sorte que u et v sont C^1 sur $]0;1[$ et que $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to 1} u(t)v(t) = 0$. Par intégration par parties, $\int_0^1 |f_n(t)|dt = \dfrac{2}{n(2n-1)}\int_0^1 t^{2n-2}dt = \dfrac{2}{n(2n-1)^2}$. Comme $\dfrac{2}{n(2n-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^3}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n(t)|dt$ converge par comparaison eux séries de Riemann.

On conclut avec le théorème d'intégration terme à terme que $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n(2n-1)^2}$.

c. On décompose $\dfrac{2}{n(2n-1)^2} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{4}{2n-1} + \dfrac{4}{(2n-1)^2}$ en procédant par identification par exemple. Ainsi, en posant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k(2k-1)^2}$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, on a $S_n = 2H_n - 4\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} + 4\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)^2}$ donc $S_n = 2H_n - 4\Big(H_{2n} - \dfrac{H_n}{2}\Big) + 4\Big(T_{2n} - \dfrac{T_n}{4}\Big) = 4(H_n - H_{2n}) + 4T_{2n} - T_n$ en rajoutant et en enlevant les termes d'indices pairs. Or on sait que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{\pi^2}{6}$ donc, en injectant ceci dans la relation précédente, $S_n \underset{+\infty}{=} 4(\ln(n)+\gamma-\ln(2n)-\gamma) + \dfrac{4\pi^2}{6} - \dfrac{\pi^2}{6} + o(1) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{2} - 4\ln(2) + o(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{2} - 4\ln(2)$ ce qui montre finalement que $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}dt = \dfrac{\pi^2}{2} - 4\ln(2) \sim 2,16$.

6.96 **a.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-x^n}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et v_n existe.

b. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f telle que $f(x) = 1$ si $x < 1$, $f(1) = e^{-1}$ et $f(x) = 0$ si $x > 1$. Les f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec φ telle que $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0;1]$, $\varphi(x) = e^{-x}$. Or φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}_+$ et il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 dx = 1$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x = h(u) = u^{1/n}$ avec h de classe C^1, bijective et strictement croissante de $]0;+\infty[$

dans $]0;+\infty[$ et on a $v_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1}e^{-u}du = \frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)$. De plus, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = v_n - 1 = \frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big) - \Gamma(1)$.

d. Par une intégration par parties facile à justifier, on a comme dans le cours que $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Ainsi, $u_n = \Gamma\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - \Gamma(1)$ donc, puisqu'on a supposé que $\Gamma'(1) \neq 0$, cela donne $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma'(1)}{n}$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique.

6.97 **a.** Si $x \leqslant 0$, la suite $\Big(\frac{1}{n^x}\Big)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0 donc les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ divergent grossièrement. Si $x > 0$, comme la suite $\Big(\frac{1}{n^x}\Big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0, la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge par le CSSA. Toujours si $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ étant positive, décroissante et continue, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction h_x sur $[1;+\infty[$ par le théorème de comparaison série/intégrale. Or une primitive de h_x est $H_x : t \mapsto \ln(t)$ si $x = 1$, et $H_x : t \mapsto \frac{1}{(1-x)t^{x-1}}$. Ainsi, H_x admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x > 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$. Ainsi, les domaines de définition cherchés sont $\mathcal{D}_f =]1;+\infty[$ et $\mathcal{D}_g =]0;+\infty[$.

Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ et $g_n = (-1)^{n-1}f_n$ de sorte que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]1;+\infty[$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement vers g sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 1$, comme f_n est décroissante et positive sur $]1;+\infty[$, on a $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a) = \frac{1}{n^a}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^a}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]1;+\infty[$. Comme toutes les f_n sont continues sur $]1;+\infty[$, la fonction f l'est aussi par théorème.

Soit $a > 0$ et $x \in [a;+\infty[$, si on pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)$, alors $|R_n(x)| \leqslant |g_{n+1}(a)|$ par le CSSA donc R_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \to 0$. On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément vers g sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc, comme toutes les g_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction g l'est aussi.

b. Soit $x > 1$ et $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}$ et $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$. Alors, $T_{2n}(x) = \sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ qu'on sépare en $T_{2n}(x) = -\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^x} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x} = -\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^x} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^x} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^x}$ en utilisant les termes pairs et impairs. Ainsi, $T_{2n}(x) = -\frac{2}{2^x}S_n(x) + S_{2n}(x)$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{2n}(x) = g(x) = (1-2^{1-x})f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}(x) - \frac{2}{2^x}\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

c. On a vu la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ vers f sur $[2;+\infty[$ (par exemple). Or, pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$ si $n \geqslant 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1 = \ell_1$. Par théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$. D'après le relation de la question **b.** car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2^{1-x}) = 1$ ou par convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ vers g sur $[2;+\infty[$, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

6.98 **a.** Pour $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car f l'est et $\forall x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{n||f||_\infty}{1+n^2x^2} = g_n(x)$. Comme g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $g_n(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{||f||_\infty}{nx^2}\Big)$ donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et f_n a fortiori par comparaison donc I_n existe. La suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

b. Soit $n \geqslant 1$, on effectue le changement de variable $x = \varphi(u) = \dfrac{u}{n}$ avec φ qui est bien de classe C^1, bijective, strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ pour avoir $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(u/n)}{1+u^2}\frac{du}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}du$.

c. On pose $h_n : u \mapsto \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}$. La suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $h : u \mapsto \dfrac{f(0)}{1+u^2}$ par continuité de la fonction f en 0. Les fonctions h_n et la fonction h sont continues sur $\mathbb{R}_+$ car f l'est. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, on a $|h_n(u)| \leqslant \dfrac{||f||_\infty}{1+u^2} = \varphi(u)$ et φ est bien continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par Riemann car $\varphi(u) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{u^2}\Big)$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc la limite attendue :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(u)du = \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} h(u)du = f(0)[\text{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi f(0)}{2}$.

6.99 **a.** Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

- Comme $f_0 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, f_0 n'est pas définie en -1, f non plus. Par contre, toutes les f_n sont définies sur $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^{2^n} \geqslant 1 > 0$. Le domaine de définition de f est donc inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- Pour $|x| > 1$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{x^{2^n}} = \dfrac{2^n}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ diverge grossièrement.
- Si $x = 1$, $f_n(x) = 2^{n-1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ diverge grossièrement à nouveau.
- Si $x \in]-1;1[$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} 2^n x^{2^n-1} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$ par croissances comparées car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2x^{n-1} = 0$ si $|x| < 1$ donc, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, par composition de limites, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4^n x^{2^n-1} = 0$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ converge absolument par comparaison à la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ qui converge d'après le cours.

En conclusion, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-1;1[$.

b. Soit $x \in]-1;1[$. Effectuons une récurrence sur N.

Initialisation : $\forall x \in]-1;1[$, $\displaystyle\prod_{n=0}^{0}(1+x^{2^n}) = 1+x$ et $\displaystyle\prod_{n=0}^{1}(1+x^{2^n}) = (1+x)(1+x^2) = 1+x+x^2+x^3$.

Hérédité : soit $N \geqslant 1$ tel que $\displaystyle\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k$ (c'est donc vrai aux rangs $N=0$ et $N=1$). Alors $\displaystyle\prod_{n=0}^{N+1}(1+x^{2^n}) = \prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\Big) \times (1+x^{2^{N+1}}) = \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^{k+2^{N+1}}\Big)$ donc, en posant $j = k+2^{N+1}$ dans la seconde somme, $\displaystyle\prod_{n=0}^{N+1}(1+x^{2^n}) = \Big(\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k\Big) + \Big(\sum_{k=2^{N+1}}^{2^{N+1}+2^{N+1}-1} x^j\Big) = \sum_{k=0}^{2^{N+2}-1} x^k$.

Par principe de récurrence, $\forall x \in]-1;1[$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} x^k = \frac{1-x^{2^{N+1}}}{1-x}$ (formule classique).

c. Pour $x \in]-1;1[$, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$ car $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} x^{2^{N+1}} = 0$. Par continuité de $\ln$, tout étant strictement positif, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln(1+x^{2^n}) = -\ln(1-x)$, donc $\forall x \in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2^n}) = -\ln(1-x)$.

Posons donc $v_n(x) = \ln(1+x^{2^n})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1;1[$:

(H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge simplement vers $S : x \mapsto -\ln(1-x)$ sur $]-1;1[$.

(H_2) Toutes les fonctions v_n sont de classe C^1 sur $]-1;1[$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ v_n'(x) = \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}} = f_n(x)$. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a;a]$, alors $|v_n'(x)| \leqslant 2^n a^{2^n-1}$ car $1+x^{2^n} \geqslant 1$ donc $||v_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant 2^n a^{2^n-1}$ et on a vu à la question **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n a^{2^n-1}$ convergeait. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n'$ converge normalement (v_0' est continue sur le segment $[-a;a]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes) sur tout segment de $]-1;1[$.

Par théorème, la fonction $h : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = -\ln(1-x)$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$ (ce qu'on savait déjà) et $\forall x \in]-1;1[,\ h'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$.

On en déduit que $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = (-\ln(1-x))' = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

6.100 **a.** Par imparité de $\sin$, il suffit de montrer que $\forall x \geqslant 0,\ |\sin(x)| \leqslant x$. On étudie les deux fonctions $x \mapsto x+\sin(x)$ et $x \mapsto x-\sin(x)$ qui s'annulent en 0 et ont des dérivées $1+\cos$ et $1-\cos$ positive donc ces deux fonctions sont positives sur $\mathbb{R}_+$ ce qui revient bien à l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$.

Plus simplement, si $x \neq 0$, $\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \dfrac{\sin(x)}{x}$ donc, par l'égalité des accroissements finis, comme $\sin$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il existe $c \in \widetilde{]0;x[}$ tel que $\dfrac{\sin(x)}{x} = \sin'(c) = \cos(c)$ et on a bien $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$.

b. Pour $n \geqslant 1$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et vérifie $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: I_n existe.

c. (H_1) La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle $f=0$.

(H_2) Les f_n et f sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. (H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall t > 0,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ car, d'après **a.**, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{t}{nt(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. De plus, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f = 0$.

Plus simplement, avec l'inégalité de la moyenne, $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t/n)|}{t(1+t^2)}dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{n(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{2n}$ et on conclut à nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ par encadrement.

d. On écrit $nI_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{t(1+t^2)} \sin\left(\frac{t}{n}\right)dt = \int_0^{+\infty} g_n$ en posant $g_n : t \mapsto \dfrac{n}{t(1+t^2)} \sin\left(\dfrac{t}{n}\right)$.

(H_1) La suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $g : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(t/n)}{(t/n)} = 1$.

(H_2) Les fonctions g_n et g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. (H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t > 0,\ |g_n(t)| \leqslant g(t) = \varphi(t)$.

Par convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

6.101 La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations. De plus, comme $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$, on a $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Enfin, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN toujours. Au final, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc I existe.

Il faut écrire f sous la forme d'une somme de série de fonctions pour pouvoir intervertir les symboles de série et d'intégrale par un des théorèmes à disposition. Pour $t > 0$, on a $f(t) = \sqrt{t}e^{-t} \times \dfrac{1}{1-e^{-t}} = \sqrt{t}e^{-t}\sum\limits_{p=0}^{+\infty} e^{-pt}$ (série géométrique car $0 < e^{-t} < 1$). Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ (avec $n = p+1$) où $f_n(t) = \sqrt{t}e^{-nt}$. D'après ce qu'on vient de faire, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $n \geqslant 1$.

Par le changement de variable $t = \dfrac{u^2}{n} = \varphi(u)$ (on a bien φ de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$), on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} 2u^2e^{-u^2}du$. Par une intégration par parties facile à justifier (le crochet converge) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2u^2e^{-u^2}du = \int_0^{+\infty} u(-2ue^{-u^2})du = \Big[-ue^{-u^2}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$. D'après Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$.

6.102 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+e^t}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et on a $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(e^{-t}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $t \mapsto e^{-t}$ l'est.

Si $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ donc $\dfrac{1}{1+e^t} = e^{-t}\dfrac{1}{1+e^{-t}} = e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(e^{-t})^n$ (série géométrique) ce qui donne $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$. Posons $f_n(t) = (-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}(-1)^ne^{(i-n-1)t}dt\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^ne^{(i-n-1)t}}{i-n-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$.

Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$ ne converge pas absolument, on ne peut pas utiliser le TITT.

<u>Méthode 1</u> : posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, alors $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty} f_k(t)dt\right|$ donc par linéarité de l'intégrale, inégalité de la moyenne et majoration du CSSA, on a la majoration : $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| \leqslant \int_0^{+\infty}|\cos(t)|\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^ke^{-kt}\right|dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}dt = \frac{1}{n+1} \to 0$. Ainsi, la suite numérique $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$, qui s'écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

<u>Méthode 2</u> : posons $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$, ce qui précède montre que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f. Les fonctions f_n, donc les S_n par linéarité, et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $|f(t) - S_n(t)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| = |\cos(t)|e^{-(n+2)t}\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-e^{-t})^k\right| = \dfrac{|\cos(t)|e^{-(n+2)t}}{1+e^{-t}} \leqslant \dfrac{e^{-2t}}{1+e^{-t}} \leqslant \varphi(t) = e^{-t}$ pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ Ainsi, comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut avec le théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Comme, par linéarité de l'intégrale, on a la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(k+1)}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, on a bien la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$ et à nouveau la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

6.103 **a.** Posons $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \geqslant 1$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument d'après RIEMANN. Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. De plus, comme toutes les fonctions f_n sont impaires, on en déduit que f est aussi impaire.

b. Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [-a;a]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{a}{0^2+n^2}$ donc $||f_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{a}{n^2}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge par RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement vers f sur $[-a;a]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

c. Par contre, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant f_n(n) = \dfrac{1}{2n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge par comparaison à la série harmonique et il n'y a pas converge normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$. Bien sûr, une étude de fonction faisait le travail, en effet $f_n'(x) = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$ donc f_n atteint son maximum en valeur absolue en $\pm n$ d'où $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = f_n(n)$.

d. On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $x > 0$ fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi_x(t)dt$. On somme ces inégalités : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)dt \iff \Big[\mathrm{Arctan}\Big(\frac{t}{x}\Big)\Big]_1^{+\infty} \leqslant f(x) \leqslant \Big[\mathrm{Arctan}\Big(\frac{t}{x}\Big)\Big]_0^{+\infty}$ (tout converge). Ainsi, on a $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ par encadrement.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout entier n, si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\big(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, on n'a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}$ (ni sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$).

6.104 **a.** $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;1[$ et $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{-t\ln(t)}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t}\ln(t)$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$ par croissances comparées et on peut prolonger f par continuité en 0 si $f(0) = 0$. De plus, $f(t) \underset{1^-}{\sim} (t-1)\ln(1-t)$ et, avec les mêmes arguments, on prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$.

Ainsi, f est continue sur le segment $[0;1]$ donc I existe.

b. $\forall t \in]0;1[$, $\ln(1-t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$ donc $\forall t \in]0;1[$, $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n(t) = -\dfrac{t^{n-\frac{1}{2}}\ln(t)}{n}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ d'après ce qui précède. Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ car on peut prolonger f_n en 1 en posant $f_n(1) = 0$ et en 0 en posant $f_n(0) = 0$. La fonction f est continue sur $]0;1[$. Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = -\frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}\ln(t)dt$ car f_n est positive sur $]0;1[$; on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{2t^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1}$ de sorte que u et v sont C^1 sur $]0;1[$ et que $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to 1} u(t)v(t) = 0$. On obtient donc par intégration par parties $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = \frac{2}{n(2n+1)}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}dt = \frac{4}{n(2n+1)^2}$. On conclut avec le TITT que $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n(2n+1)^2}$.

c. On décompose $\dfrac{4}{n(2n+1)^2} = \dfrac{4}{n} - \dfrac{8}{2n+1} - \dfrac{8}{(2n+1)^2}$ en procédant par identification par exemple. Ainsi, en posant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{4}{k(2k+1)^2}$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, on a $S_n = 4H_n - 8\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1} - 8\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$

donc $S_n=4H_n-8\Big(H_{2n}-\dfrac{H_n}{2}-1+\dfrac{1}{2n+1}\Big)-8\Big(T_{2n+1}-\dfrac{T_n}{4}-1\Big)$ en rajoutant et en enlevant les termes d'indices pairs. Or on sait que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=\dfrac{\pi^2}{6}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=16-8\ln(2)-\pi^2\sim 0,58$.

6.105 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n : x\mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\,(nx)}{e^x\mathrm{ch}\,(nx)}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. f_0 est la fonction nulle donc I_0 existe et $I_0=0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{th}\,(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{sh}\,(t)}{\mathrm{ch}\,(t)}=1$, on a $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$ et $x\mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison d'où l'existence de I_n.

b. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$, la croissance de th montre que $\mathrm{th}\,(nx)\leqslant \mathrm{th}\,((n+1)x)$ donc $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$. On intègre cette inégalité sur $\mathbb{R}_+$ pour avoir $I_n\leqslant I_{n+1}$. Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme, pour tout entier n, on a $\forall x\geqslant 0,\ \mathrm{th}\,(nx)\leqslant 1 \Longrightarrow \mathrm{th}\,(nx)e^{-x}\leqslant e^{-x}$, il vient $I_n\leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^{+\infty}=1$. Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un réel $\ell\leqslant 1$.

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f:x\mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{th}\,(t)=1$.
- Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\geqslant 0,\ |f_n(x)|=f_n(x)\leqslant e^{-x}=\varphi(x)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On peut conclure par le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx=[-e^{-x}]_0^{+\infty}=1=\ell$.

c. Comme $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative et croissante d'après **b.**, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

$\mathrm{th}\,(y)-1=\dfrac{\mathrm{sh}\,(y)-\mathrm{ch}\,(y)}{\mathrm{ch}\,(y)}=-\dfrac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}}$ d'où $u_n=I_n-1=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\mathrm{th}\,(nx)-1)e^{-x}dx=-2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)x}}{1+e^{-2nx}}dx$.
On effectue le changement de variable $x=\varphi(u)=\dfrac{u}{2n+1}$, φ étant bien de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, pour avoir $u_n=-\dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+e^{\frac{-2nu}{2n+1}}}du$. Posons $h_n : u\mapsto \dfrac{e^{-u}}{1+e^{\frac{-2nu}{2n+1}}}$:

- La suite $(h_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $h : u\mapsto \dfrac{e^{-u}}{1+e^{-u}}$.
- Les fonctions h_n et la fonction h sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall n\geqslant 0,\ \forall u\geqslant 0,\ |h_n(u)|\leqslant \varphi(u)=e^{-u}$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(u)du=\int_0^{+\infty} h(u)du=[-\ln(1+e^{-u})]_0^{+\infty}=\ln(2)$.
Ainsi, $u_n\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{\ln(2)}{n}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique.

6.106 **a.** Comme $u_0(x)=x>0$, la relation de récurrence de l'énoncé permet de montrer par une récurrence simple que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement positive et strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle tend vers un réel $\ell>0$ ou vers $+\infty$. Si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=\ell>0$, en passant à la limite dans $u_{n+1}(x)=u_n(x)+\dfrac{1}{u_n(x)}$, on aurait $\ell=\ell+\dfrac{1}{\ell}$ ce qui est absurde donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=+\infty$.

b. Pour tout réel $x>0$, la suite $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}=\Big(\dfrac{1}{u_n(x)}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 d'après la question précédente donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{u_n(x)}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. Par conséquent, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. La fonction u_0 est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, puisque $u_1 = u_0 + \dfrac{1}{u_0}$, la fonction u_1 l'est aussi et on montre par une récurrence facile que $\forall n \geqslant 1,\ u_n$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ d'ordre n. D'après le critère spécial des séries alternées, pour tout réel $x > 0$, on a $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{u_{n+1}(x)}$.

La fonction $u_1 : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_1'(x) = x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^3-1}{x^2}$ donc u_1 est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$; elle est donc minimale en 1 où elle vaut $u_1(1) = 2$. Son graphe est celui d'une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations $x = 0$ et $y = x$.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall x > 0,\ u_n(x) > 1$, u_n dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, u_n décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Alors, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est dérivable par opérations sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x > 0,\ u_{n+1}(x) > u_n(x) > 1$ donc $u_{n+1}(x) > 1$, et $\forall x > 0,\ u_{n+1}'(x) = u_n'(x) - \dfrac{u_n'(x)}{u_n^2(x)} = \dfrac{(u_n^2(x)-1)u_n'(x)}{u_n^2(x)}$ est du signe de $u_n'(x)$ car $u_n^2(x) - 1 > 0$ et $u_n^2(x) > 0$. Par hypothèse de récurrence, $u_n'(x) \leqslant 0$ si $x \in]0;1]$ et $u_n'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$ donc u_{n+1} est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Par principe de récurrence, on a bien établi que $\forall n \geqslant 1,\ \forall x > 0,\ u_n(x) > 1$, u_n dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, u_n décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

Ceci montre en particulier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n admet son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ en 1.
Ainsi, $\forall n \geqslant 0,\ \forall x > 0,\ \dfrac{1}{u_{n+1}(x)} \leqslant \dfrac{1}{u_n(1)}$ et on peut donc majorer $\forall x > 0,\ |R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{u_{n+1}(1)}$. R_n est donc bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $||R_n||_{\infty\,\mathbb{R}_+^*} \leqslant \dfrac{1}{u_n(1)}$. Mais on sait depuis **a.** que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1) = +\infty$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty\,\mathbb{R}_+^*} = 0$ et on a prouvé la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut par le théorème de continuité des séries de fonctions que f est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.107 **a.** Si $x \leqslant 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement.
Par contre, si $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge par le critère spécial des séries alternées. Ainsi, le domaine de définition de θ est $\mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $n \geqslant 1$, posons $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Toutes les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers θ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ f_n'(x) = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n^x}$.
Soit $a > 0$ et $x \in [a;+\infty[$, alors $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{\ln(n)}{n^a}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^a}$ ne converge pas si $a \leqslant 1$ donc on va passer par la convergence uniforme. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ est alternée, on s'intéresse à la décroissance de la suite $(|f_n'(x)|)_{n\geqslant 1}$, au moins à partir d'un certain rang. Posons la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_x'(t) = \dfrac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$. Ainsi, g_x est décroissante sur $[e^{1/x};+\infty[$, donc notamment sur $[e^{1/a};+\infty[$ car $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{x}$. Par conséquent, dès que $n \geqslant e^{1/a}$, $g_x(n) = |f_n'(x)| \geqslant |f_{n+1}'(x)| = g_x(n+1)$ donc la suite $(|f_n'(x)|)_{n\geqslant \lfloor e^{1/a}+1\rfloor}$ est décroissante et tend vers 0 par croissances comparées. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ converge et on peut donc définir la fonction reste d'ordre n, $R_n : x \mapsto \sum\limits_{k=n+1} f_k'(x)$.

Pour $n \geqslant e^{1/a}$, le critère spécial montre aussi que $|R_n(x)| \leqslant |f'_{n+1}(x)| = \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Ainsi, la fonction R_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et on a $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$ par croissances comparées toujours, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème ad-hoc, θ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Pour $x > 1$, posons les deux sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^x}$ et $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^x}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S'_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k^x} - 2 \times \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k)^x}$ (séparer termes d'indices pairs et impairs). Ainsi, $S'_{2n} = S_{2n} - \dfrac{1}{2^{x-1}} S_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient $\theta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \theta(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \zeta(x)$ (suite extraite).

d. Pour $x = 1$, $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1} (-1)^j t^j\Big) dt$ par linéarité de l'intégrale. Comme $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (-t)^j = \dfrac{1-(-t)^n}{1+t}$, on a $\left|S'_n - \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t}\right| = \left|\int_0^1 \dfrac{(-1)^{n+1}t^n}{1+t} dt\right| \leqslant \int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$ car $\forall t \in [0;1]$, $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$. Par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \theta(1) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Or $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln(2)} \underset{1}{=} 1 - (1 - (1-x)\ln(2) + o(1-x)) \underset{1}{\sim} (1-x)\ln(2)$ donc, par continuité de θ en 1, $\zeta(x) = \dfrac{\theta(x)}{1-2^{1-x}} \underset{1}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{(1-x)\ln(2)} = \dfrac{1}{1-x}$ et on a $\zeta(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$.

f. Pour $x > 1$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x} = e^{-x\ln t}$ est continue, intégrable sur $[1;+\infty[$ par critère de RIEMANN et décroissante. Ainsi : $\forall k \geqslant 1$, $\int_k^{k+1} g_x(t)dt \leqslant \dfrac{1}{k^x}$ ce qui donne $\int_1^{+\infty} g_x \leqslant \zeta(x)$ en sommant pour $k \in \mathbb{N}^*$ puisque la série et l'intégrale convergent. De même, $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^x} \leqslant \int_{k-1}^{k} g_x(t)dt$ donc $\zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} g_x$. Or $\int_1^{+\infty} g_x = \left[\dfrac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{x-1}$. Ainsi, $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$ ce qui garantit par le théorème des gendarmes que, à nouveau, $\zeta(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

6.108 **a.** Soit I un intervalle, un entier $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ de classe C^{n+1}, alors pour tous réels a et b dans I, on a $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + \dfrac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)$ (formule de TAYLOR reste intégral).

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$, $S_{n,0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$ d'après le binôme de NEWTON. De plus, $S_{n,1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}(k-nx) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - nx \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ après développement donc, comme on connaît la formule $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$, on obtient après factorisation la relation $S_{n,1}(x) = nx \sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} - nx(x+1-x)^n = nx(x+1-x)^{n-1} - nx = 0$.

c. Pour $x \in [0;1]$, d'après la question **b.** $B_n(f)(x) - f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} f\Big(\dfrac{n}{k}\Big) x^k (1-x)^{n-k} - 1.f(x) - \dfrac{0}{n} f'(x)$ donc
$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{n}{k}\Big) x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \Big(\frac{k}{n} - x\Big) f'(x)$$
qu'on regroupe en $B_n(f)(x) - f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big[f\Big(\dfrac{n}{k}\Big) - f(x) - \Big(\dfrac{k}{n} - x\Big) f'(x)\Big]$. Par inégalité

triangulaire, on a donc $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{n}{k}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right)f'(x)\right|$. Or d'après la question **a.** avec $n = 1$, $a = x$ et $b = \frac{k}{n}$, on a $f\left(\frac{n}{k}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right)f'(x) = \int_x^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)f''(t)dt$. Comme f'' est continue donc bornée sur le segment $[0;1]$ par hypothèse puisque f est de classe C^2 sur $[0;1]$, il existe une constante M telle que $\forall x \in [0;1]$, $|f''(t)| \leqslant M$. Ainsi, par inégalité de la moyenne, $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} M \left|\int_x^{k/n} \left|\frac{k}{n} - x\right| dt\right| = M \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2$. Or, on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \frac{1}{n^2}S_{n,2}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$ donc $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{Mx(1-x)}{n}$ comme attendu.

d. Grâce à la majoration de la question précédente, comme $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$ (en fait on a même $\underset{x\in[0;1]}{\text{Max}}\, x(1-x) = \frac{1}{4}$), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{M}{n}$ donc $B_n(f) - f$ est bornée et $||B_n(f) - f||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{M}{n}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} ||B_n(f) - f||_{\infty,[0;1]} = 0$ ce qui montre la convergence uniforme de $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0;1]$.

6.109 **a.** Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ donc, avec l'hypothèse de l'énoncé, $a_n \underset{+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge ce qui donne l'existence d'un réel k tel que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n^\alpha u_n) = k$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \lambda = e^k > 0$ donc que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Soit $x \in]-1;0[$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1-(1-t)^x}{t}$ est continue sur $]0;1[$.

• Comme $x < 0$, $\lim_{t\to 1^-} (1-t)^x = +\infty$ donc $g_x(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{-x}}$ et, comme $-x < 1$, g_x est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

• On sait que $(1-t)^x \underset{0}{=} 1 - xt + o(t)$ donc $g_x(t) \underset{0}{=} \frac{xt + o(t)}{t} \underset{0}{=} x + o(1)$ donc g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$; Ainsi, g_x est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

Ainsi, g_x est intégrable sur $]0;1[$ (même $[0;1[$) donc f est bien définie sur $]-1;0[$.

b. Pour $t \in [0;1[$, on a $(1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}(-t)^n$ d'après le cours sur les séries entières donc $g_x(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^n$ pour $t \in]0;1[$, ce qui se simplifie en (relation vraie pour $t = 0$ car $g_x(0) = x$) $g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

Posons donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $u_n : t \mapsto (-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

• La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers g_x sur $[0;1[$ (on vient de le voir).

• Les fonctions u_n et g_x sont continues sur $[0;1[$, u_n est intégrable car polynomiale sur le segment $[0;1]$.

• Posons $I_n = \int_0^1 |u_n| = \frac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n!}\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1 = \frac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n.n!}$. Utilisons **a.** en calculant $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n-x)n.n!}{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n+1).(n+1)!} = \frac{n(n-x)}{(n+1)^2} = \left(1 - \frac{x}{n}\right) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2}$ ce qui donne, par développements limités, $\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{x+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit d'après la question précédente qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{x+2}}$ donc, par RIEMANN toujours $\sum\limits_{n\geqslant 1} I_n$ converge car $x+2>1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on l'intégrabilité de g_x (on le savait déjà) et surtout la relation $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}dt = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n$.

$\boxed{\textbf{6.110}}$ **a.** Soit I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

(H_1) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,

(H_2) les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur I,

(H_3) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n\in\mathbb{N}, |f_n| \leqslant \varphi$.

Alors :

(R_1) Les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I.

(R_2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I f$.

b. $f_n : x \mapsto n\sin(x^n)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Posons $u : x \mapsto 1-\cos(x^n)$ de sorte que $u'(x) = nx^{n-1}\sin(x^n)$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x^{n-1}}$ avec $v'(x) = -\dfrac{n-1}{x^n}$, alors les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ car $n-1>0$ et $\cos$ bornée, et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^{2n}}{2x^{n-1}} = \dfrac{x^{n+1}}{2}$ puisque $1-\cos(v) \underset{0}{\sim} \dfrac{v^2}{2}$.
L'existence de I_n, c'est-à-dire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx$, équivaut donc par intégration par parties à celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx$, donc à celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(n-1)(1-\cos(x^n))}{x^n}dx$. Or $g_n : x \mapsto \dfrac{(n-1)(1-\cos(x^n))}{x^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g_n(x) \underset{0}{\sim} (n-1)\dfrac{x^n}{2}$ donc on peut prolonger g_n par continuité en 0 en posant $g_n(0)=0$ et $g_n(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big)$ donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN car $n\geqslant 2$. Par conséquent, le réel I_n existe pour $n\geqslant 2$ et on a même la relation $I_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^n)dx = \int_0^{+\infty}\frac{(n-1)(1-\cos(x^n))}{x^n}dx$.

c. Dans la dernière intégrale, on pose $x = u^{1/n} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et, par changement de variable, on a $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}(n-1)\frac{1-\cos(u)}{u}\Big(\frac{1}{n}u^{(1/n)-1}\Big)du$.
Si on pose $a_n : u \mapsto (n-1)\dfrac{1-\cos(u)}{u}\Big(\dfrac{1}{n}u^{(1/n)-1}\Big)$, alors la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers la fonction $a : u \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\dfrac{n-1}{n} \leqslant 1$ et que $u^{1/n} \leqslant 1$ si $u\leqslant 1$ et $u^{1/n} \leqslant \sqrt{u}$ si $u\geqslant 1$, on a $\forall n\geqslant 2$, $\forall u>0$, $|a_n(u)| = a_n(u) \leqslant \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$ si $u\in]0;1]$ et $\varphi(u) = \dfrac{1-\cos(u)}{u\sqrt{u}}$ si $u\geqslant 1$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{u\to 0^+}\varphi(u) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(u) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{u^{3/2}}\Big)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}a_n(u)du = \int_0^{+\infty}a(u)du$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}du$. On pose $g(u) = 1-\cos(u)$ et $h(u) = -\dfrac{1}{u}$, g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{u\to 0^+} g(u)h(u) = 0$ car $g(u)h(u) \underset{0}{\sim} -\dfrac{u}{2}$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} g(u)h(u) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}du = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de DIRICHLET). Au final, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{6.111}}$ **a.** Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I si les f_n sont bornées sur I et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_{\infty,I}$ converge.

On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I si elle y converge simplement et si, en posant $R_n : I \to \mathbb{K}$ définie par $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, les R_n sont bornées à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,I} = 0$.
D'après le cours, la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur I implique sa convergence uniforme.

b. Toutes les fonctions u_n sont bien définies et continues sur $]-1;+\infty[$ car $\forall x > -1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+\frac{x}{n} > 0$.
Pour $x > -1$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} \frac{x}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{x}{n} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement (vers S) sur $]-1;+\infty[$.
Soit $[a;b] \subset]-1;+\infty[$, comme u_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que $u_n'(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}$, la fonction u_n est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, comme $u_n(0) = 0$, la fonction u_n est négative et on a $||u_n||_{\infty,[a;b]} = \text{Max}(|u_n(a)|, |u_n(b)|) \leqslant |u_n(a)| + |u_n(b)|$. Ainsi, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n(a)|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n(b)|$ convergent d'après ce qui précède, on en déduit par comparaison que $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n||_{\infty,[a;b]}$ converge donc que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $]-1;+\infty[$. On peut conclure d'après le cours que S est bien continue sur $]-1;+\infty[$.

c. Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$ avec $u_n'(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers S sur $]-1;+\infty[$. De plus, pour $[a;b] \subset]-1;+\infty[$, $|u_n'(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)} \leqslant \frac{\text{Max}(|a|,b)}{n(n+a)}$ donc $||u_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant \frac{\text{Max}(|a|,b)}{n(n+a)} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n'||_{\infty,[a;b]}$ converge par comparaison aux séries de Riemann et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-1;+\infty[$. Ainsi, par théorème, la fonction S est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$ avec $\forall x > -1,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\Big)$.
Ainsi, S est dérivable en 1 et on a $S'(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) = -1$ (série télescopique).

6.112 **a.** Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. Distinguons deux cas :

- Si $x = 1$, alors $\forall n \geqslant 0,\ u_n(0) = 0$ donc $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $x \in [0;1[$, la suite géométrique $(x^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 donc la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend encore vers 0.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1]$.

b. La fonction $v_n : x \mapsto x^n(1-x)$ est dérivable sur $[0;1]$ et $v_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$.
Ainsi, v_n est maximale en $x_n = \frac{n}{n+1}$ et, comme v_n est positive, $||v_n||_{\infty,[0;1]} = v_n(x_n) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
Par conséquent, $||u_n||_{\infty,[0;1]} = \frac{a_n}{n+1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n}$. Comme $\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} = \exp\Big(-n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} = e^{-1}$ donc $||v_n||_{\infty,[0;1]} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n}{ne}$. Ainsi, par comparaison de série à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[0;1]$ si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}$ converge.

c. ($\Longrightarrow$) Supposons que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1[$, on peut minorer $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k(1-x) \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k x^k(1-x) \geqslant (1-x)a_{2n}\sum\limits_{k=n+1}^{2n} x^k = (1-x)a_{2n}x^{n+1}\frac{1-x^n}{1-x}$ car $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et décroissante donc $R_n(x) \geqslant a_{2n}x^{n+1}(1-x^n)$ (même si $x = 1$). Par exemple,

$0 \leqslant a_{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \leqslant R_n\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant ||R_n||_{\infty,[0;1]}$ donc, par encadrement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right) = 0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right) = e^{-1}(1-e^{-1}) \neq 0$ comme avant donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$. Comme la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ, on a $\ell = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$, alors on peut majorer (vrai même si $x = 1$) $0 \leqslant R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k(1-x) \leqslant a_{n+1}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = a_{n+1}x^{n+1} \leqslant a_{n+1}$. Ainsi, $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant a_{n+1}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0;1]} = 0$ ce qui montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

Par double implication, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

d. • Si $x \in]-1;1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et, comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (elle tend vers ℓ), la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend vers 0. Par contre, la suite $(u_n(-1))_{n\geqslant 0} = (2(-1)^n a_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[-1;1]$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et elle tend dans ce cas vers la fonction nulle sur $[-1;1]$.

• Supposons dans la suite que la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ est réalisée. Comme $|u_n| : x \mapsto a_n(-x)^n(1-x)$ est décroissante sur $[-1;0]$, on a $||u_n||_{\infty,[-1;0]} = |u_n(-1)| = 2a_n$ d'où, comme $2a_n > \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}a_n$ puisque $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < 1 < 2$, $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = ||u_n||_{\infty,[-1;0]} = 2a_n$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

• $(\Longrightarrow)$ Supposons que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[-1;1]$, d'où aussi sur $[0;1]$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a déjà vu que $\forall x \in [0;1]$, $|R_n(x)| \leqslant a_{n+1}$. De plus, si $x \in [-1;0]$, comme la suite $\big(a_n|x|^n(1-x)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0, on déduit du critère spécial des séries alternées que $|R_n(x)| \leqslant a_{n+1}|x|^{n+1}(1-x) \leqslant a_{n+1}$. Par conséquent, $\forall x \in [-1;1]$, $|R_n(x)| \leqslant a_{n+1}$ donc R_n est bornée sur $[-1;1]$ et on a $||R_n||_{\infty,[-1;1]} \leqslant a_{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[-1;1]} = 0$ par encadrement. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge donc uniformément sur $[-1;1]$.

Par double implication, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[-1;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

6.113 **a.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, définissons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

- Si $x = 0$, on a $\forall n \geqslant 2,\ u_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(0)$ converge.
- Si $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx})$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ converge absolument donc converge.
- Si $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = -\infty$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition de f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. (H_1) D'après **a.**, on a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur R_+^*.

(H_2) Toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ u_n'(x) = \frac{(1-nx)e^{-nx}}{\ln(n)}$.

(H_3) Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, alors il vient $\forall x \in [a;b],\ \forall n \geqslant 2,\ |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{(1+nb)e^{-na}}{\ln(n)}$ donc u_n' est bornée sur $[a;b]$ et $||u_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant \dfrac{(1+nb)e^{-na}}{\ln(n)}$. Comme $\dfrac{(1+nb)e^{-na}}{\ln(n)} \underset{+\infty}{=} o(ne^{-na}) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison.

Ainsi, par théorème, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(1-nx)e^{-nx}}{\ln(n)}$.

c. Soit $x > 0$, le taux d'accroissement de f au voisinage de 0 vaut $T(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{\ln(n)}$ donc, comme on somme des termes positifs, on a l'inégalité $T(x) \geqslant \sum\limits_{k=2}^{p} \dfrac{e^{-kx}}{\ln(k)} = S_p(x) \qquad (I_p)$. Comme toutes les $g_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{\ln(n)}$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+$, T est elle aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une limite finie ou $+\infty$ en 0^+ par le théorème de la limite monotone.

Supposons que $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = \ell \in \mathbb{R}$, en passant à la limite quand x tend vers 0^+ dans les inégalités (I_p), on trouve $\forall p \geqslant 2,\ \ell \geqslant \lim\limits_{x\to 0^+} S_p(x) = \sum\limits_{k=2}^{p} \dfrac{1}{\ln(k)} \qquad (E_p)$. Or la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{\ln(k)}$ diverge puisque $\dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{\ln(k)}\Big)$ et que $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k}$ diverge. On obtient donc une contradiction en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité (E_p). Ainsi, par raisonnement par l'absurde, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0 ; le graphe de f admet une tangente verticale en 0.

d. Soit $x > 0,\ n \geqslant 2,\ R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{xe^{-kx}}{\ln k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)}$ car les deux séries convergent et que $\forall k \geqslant n+1,\ \ln(k) \geqslant \ln(n+1)$. Ainsi : $R_n(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(k-n-1)x}$ et on reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$ donc, comme tous les termes sont strictement positifs dans $R_n(x)$: $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ et ainsi $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ car $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-x}$. Par conséquent, en posant $\varphi : x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{x}{e^x - 1}$, on a $\forall x > 0,\ 0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\ln(n+1)}$. Or φ se prolonge par continuité en 0 avec $\varphi(0) = 1$ car $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, par continuité de φ, elle est bornée (par M) sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0,\ 0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ (ça marche aussi pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$). Plus précisément, $M = 1$ car on connaît l'inégalité de convexité $\forall x > 0,\ e^x \geqslant 1 + x$ qui équivaut à $e^x - 1 \geqslant x > 0$ donc $\varphi(x) \leqslant 1$ pour $x > 0$. Ainsi, R_n est bornée et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{\ln(n+1)} = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour un équivalent de f en $+\infty$, on constate que $u_{n+1}(x) \underset{+\infty}{=} o(u_n(x))$ pour $n \geqslant 2$. On peut conjecturer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x)$. Or $\forall x > 0,\ \dfrac{f(x)}{u_2(x)} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$ en posant $v_n(x) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x}$. Or v_n est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc $||v_n||_{\infty,[1;+\infty[} = v_n(1) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)} \underset{+\infty}{=} o((e^{-1})^n)$ donc, comme $\sum\limits_{n\geqslant 2} (e^{-1})^n$ converge, on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ sur $[1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v_2(x) = 1$ et que $\forall n \geqslant 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x) = 0$, à nouveau par théorème de la double limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u_2(x)} = 1 + \sum\limits_{n=3}^{+\infty} 0 = 1$ ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x) = \dfrac{xe^{-2x}}{\ln(2)}$. Par conséquent $f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

6.114 **a.** • Si $x = 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.

• Si $x \in]0;1]$, par croissances comparées, on a $(1-x)^n \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$ car $|1-x| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction nulle.

Puisque f_n est dérivable sur $[0;1]$ par opérations, $\forall x \in [0;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_n(x) = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$ par calcul. Ainsi, f_n est croissante sur $\Big[0; \dfrac{1}{n+1}\Big]$ et décroissante sur $\Big[\dfrac{1}{n+1}; 1\Big]$ et, comme f_n est positive sur $[0;1]$, $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(\dfrac{1}{n+1}\Big) = \dfrac{n^\alpha}{n+1}\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big)^n$. Comme $\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big)^n = \exp\Big(n \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big)\Big)$ et que l'on a $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$, on en déduit la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big) = -1$ donc, par continuité de la fonction $\exp$, il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big)^n = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Par conséquent, $||f_n||_{\infty,[0;1]} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$.

Il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ vers $f = 0$ sur $[0;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f_n - 0||_{\infty,[0;1]} = 0$, donc il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ vers la fonction nulle sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Pour aller plus loin, comme le “problème” est au voisinage de 0, si $a \in]0;1[$ et dès que n est assez grand (en fait dès que $n + 1 \geqslant \dfrac{1}{a}$ d'après l'étude précédente), on a $||f_n||_{\infty,[a;1]} = f_n(a)$ et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = 0$ donc $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a;1]$ indépendamment de la valeur de α.

b. • Si $x = 0$, comme $f_n(0) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(0)$ converge.

• Si $x \in]0;1]$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ à nouveau par croissances comparées. Ainsi, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc elle converge.

Ainsi, il y a convergence simple de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ sur $[0;1]$ pour tout réel α.

Posons $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

• Comme $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(\dfrac{1}{n+1}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{e} = \dfrac{1}{en^{1-\alpha}}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha < 0$ par comparaison aux séries de Riemann. Dans ce cas, comme convergence normale implique convergence uniforme, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

• Pour $\alpha < 0$, si on ne s'intéresse qu'à la convergence uniforme, on pouvait aussi majorer R_n sur $[0;1]$ car $0 \leqslant R_n(x) \leqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car puisque $\alpha < 0$, on a $\forall k \geqslant n+1$, $k^\alpha \leqslant (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x \in]0;1]$, $0 \leqslant R_n(x) \leqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k = (n+1)^\alpha x \dfrac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (n+1)^\alpha(1-x)^{n+1} \leqslant (n+1)^\alpha$. On a aussi $R_n(0) = 0$. Ainsi $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant (n+1)^\alpha$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)^\alpha = 0$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

• Si $\alpha \geqslant 0$, alors $R_n(x) \geqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k$ car $\forall k \geqslant n+1$, $k^\alpha \geqslant (n+1)^\alpha$. Ainsi, si $x \in]0;1]$, on a $R_n(x) \geqslant (n+1)^\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x(1-x)^k = (n+1)^\alpha x \dfrac{(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = (n+1)^\alpha(1-x)^n$ et $R_n(0) = 0$. Même si R_n est bornée, on déduit de cette minoration que $||R_n||_{\infty,[0;1]} \geqslant (n+1)^\alpha = \lim\limits_{x \to 0^+} (n+1)^\alpha(1-x)^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^\alpha = 1$ si $\alpha = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$.

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha < 0$.

Pour aller plus loin à nouveau, si $a \in]0;1[$, dès que $n+1 \geqslant \dfrac{1}{a}$, on a $||f_n||_{\infty,[a;1]} = f_n(a)$ et on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a)$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;1]$ indépendamment de la valeur de α.

6.115 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$. Les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0;1]$ donc l'intégrale I_n est bien définie.

<u>Méthode 1</u> : pour $x \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0;1[$ et $f(1) = \dfrac{1}{3}$. De plus, f est continue par morceaux sur $[0;1]$. Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant 1 = \varphi(x)$ et φ est continue et intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$.

<u>Méthode 2</u> : plus simplement, on peut utiliser l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$ qu'on intègre en $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ et conclure à nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ par le théorème des gendarmes.

b. <u>Méthode 1</u> : un grand classique dans ce type d'exercice, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $x = u^{1/n} = \psi(u)$ où ψ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $]0;1]$ dans $]0;1]$ permet d'avoir $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}}du$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n : u \mapsto \dfrac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}}$. Les fonctions g_n sont continues sur $]0;1]$ et $\forall u \in]0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \dfrac{1}{3}$ donc $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction continue $g : u \mapsto \dfrac{1}{3}$ sur $]0;1]$. Comme $\forall n \geqslant 1$, $\forall u \in]0;1]$, $|g_n(u)| = g_n(u) \leqslant 1 = \varphi(u)$ avec φ toujours continue et intégrable sur $]0;1]$, par convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 g_n = \int_0^1 g = \frac{1}{3}$. Ainsi, $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$.

<u>Méthode 2</u> : comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$, on obtient en intégrant $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, si $n \geqslant 2$, on a $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \leqslant 3I_n \leqslant I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$. Or, par linéarité de l'intégrale, $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{1+x+x^2}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ d'où $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$. Par conséquent, on a $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{3(n-1)}$ ce qui justifie plus simplement que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$.

<u>Méthode 3</u> : Dans I_n, on pose $u : x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ qui sont de classe C^1 sur $[0;1]$ et, par intégration par parties, il vient $I_n = \left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x+x^2)}\right]_0^1 + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+2x)x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$. Or, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+2x)x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leqslant 3\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{3}{n+2}$ donc $I_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{3(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$.

6.116 **a.** On peut poser les deux fonctions $a : t \mapsto \ln(1+t) - t$ et $b : t \mapsto \ln(1+t) - t + 2t^2$ qui sont dérivables sur $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. Comme $a'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = -\dfrac{t}{1+t}$, a est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ et décroissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ donc atteint son maximum en 0 où elle est nulle. Ainsi, a est négative sur $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. Comme $b'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 + 4t = \dfrac{t(3+t)}{1+t}$, à nouveau, b est décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ et décroissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

donc atteint son minimum en 0 où elle est nulle. Ainsi, b est positive sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Par conséquent, on a $\forall t \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $t-2t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ donc, moins précisément : $\forall t \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $\left|\ln(1+t)-t\right| \leqslant 2t^2$.

On pouvait aussi écrire la formule de TAYLOR reste intégral : $\forall t \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $\ln(1+t) = t - \int_0^t \frac{t-u}{(1+u)^2}du$ donc $|\ln(1+t)-t| \leqslant 4\left|\int_0^t (t-u)du\right| = 2t^2$ car $\frac{1}{(1+u)^2} \leqslant 4$ si $u \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} = 0$, $u_n(x) = \ln\left(1+\frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en effectuant le développement limité $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + O(x^2)$. Ainsi, en notant $v_n(x) = u_n(x) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}$, on a $v_n(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge absolument. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}$ converge car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Ainsi, par somme, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge. Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 0$, posons $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ (reste d'ordre n qui existe car la série converge). Comme $\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$ (car $(1-|x|)^2 \geqslant 0$), on a $\left|\frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}$ donc, d'après la question **a.**, on majore $\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right| \leqslant 2\frac{x^2}{n^2(1+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{2n^2}$. En notant $S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)}$, le critère spécial montre aussi que $|S_n(x)| \leqslant \frac{x}{(n+1)(1+x^2)} \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$. Posons $T_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \left(u_k(x) - \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)}\right)$, par inégalité triangulaire, on a $|T_n(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \left|u_k(x) - \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)}\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} = A_n$. Par conséquent, comme $R_n(x) = S_n(x) + T_n(x)$, on a $|R_n(x)| \leqslant |S_n(x)| + |T_n(x)| \leqslant \frac{1}{2(n+1)} + A_n$. Comme ceci ne dépend pas de x, R_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2(n+1)} + A_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2(n+1)} + A_n\right) = 0$ (reste d'une série convergente d'après RIEMANN). Il y a bien convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

6.117 **a.** Soit $x \in [0;1]$, distinguons deux cas :

- si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
- si $x \in]0;1]$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nx}{nx+1} = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+a)e^{-x}$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0;1]$, $f(x) = (x^2+a)e^{-x}$.

b. • Si $a \neq 0$, la fonction f n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a \neq f(0)$ donc, comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0;1]$, on n'a pas convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0;1]$.

• Si $a = 0$, $\forall x \in [0;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2 e^{-x}}{nx+1} \leqslant \frac{x^2}{nx+1} = g_n(x)$. Or g_n est dérivable sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1]$, $g'_n(x) = \frac{x(nx+2)}{(nx+1)^2} \geqslant 0$. Ainsi, g_n est croissante sur $[0;1]$ donc maximale sur $[0;1]$ en 1 avec $g_n(1) = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\forall x \in [0;1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $f_n - f$ est bornée et $||f_n - f||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0;1]$.

c. On majore, $\forall x \in [R;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2 e^{-x}}{nx+1} \leqslant \frac{1}{nx+1} \leqslant \frac{1}{nR+1}$. Par conséquent, $f_n - f$ est bornée sur $[R;1]$ et $||f_n - f||_{\infty,[R;1]} \leqslant \frac{1}{nR+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nR+1} = 0$, n en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[R;1]$ si $0 < R < 1$.

6.118 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations. De plus, comme $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$, on a $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Enfin, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN toujours. Au final, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc I existe.

b. Il faut écrire f sous la forme d'une somme de série de fonctions pour pouvoir intervertir les symboles de série et d'intégrale par un des théorèmes à disposition. Pour $t > 0$, on a $f(t) = \sqrt{t}e^{-t} \times \dfrac{1}{1 - e^{-t}} = \sqrt{t}e^{-t} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} e^{-pt}$ (série géométrique car $0 < e^{-t} < 1$). Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ (avec $n = p+1$) où $f_n(t) = \sqrt{t}e^{-nt}$.

• D'après ce qu'on vient de faire, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Les f_n et f sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car f_n se prolonge en 0 en posant $f_n(0) = 0$ et que $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

• Par le changement de variable $t = \dfrac{u^2}{n} = \varphi(u)$ (on a bien φ de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$), on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} 2u^2e^{-u^2}du$. Par une intégration par parties facile à justifier (le crochet converge) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2u^2e^{-u^2}du = \int_0^{+\infty} u(-2ue^{-u^2})du = \Big[-ue^{-u^2}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$. D'après RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2)$.

6.119 **a.** Pour $n \geqslant 0$, la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \ln(1 + t^n)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc I_n est bien défini. De plus, comme $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, par croissance de l'intégrale, on en déduit l'inégalité $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0 = \ell$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée mais c'est pus long !

b. On considère l'intégrale I_n sur $]0;1]$ et on effectue, pour $n \geqslant 1$, le changement de variable $t = u^{1/n} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante et de classe C^1 (c'est pour ça qu'on a enlevé 0 de l'intervalle) de $]0;1]$ dans $]0;1]$. Ainsi, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+u)\frac{1}{n}u^{(1/n)-1}du = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}du$.

Soit, pour $n \geqslant 1$, la fonction $g_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = \dfrac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}$.

(H_1) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0;1]$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $g :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

(H_2) Toutes les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $]0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall u \in]0;1],\ u^{1/n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant g_n(u) \leqslant g(u)$ et g est intégrable sur $]0;1]$ car g se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n = \int_0^1 g$, c'est-à-dire que

$\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 g$. Par définition, et comme $\int_0^1 g > 0$ car g est continue, positive et non nulle sur $]0;1]$, on en déduit que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.

c. On considère cette fois l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$ sur $[0;1[$ avec $g(0) = 1$. On sait d'après le cours que $\forall u \in [0;1[,\ \ln(1+u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^n}{n}$ donc $g(u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$ (ceci est aussi valable pour $u = 0$). Or le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ donc on ne peut pas intégrer terme à terme par le théorème du cours puisqu'on n'est pas sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Posons $v_p : u \mapsto \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$, alors $||v_p||_{\infty,[0;1[} = \frac{1}{p+1}$ donc on ne peut pas non plus utiliser la convergence normale sur un intervalle borné. Il reste le théorème d'intégration terme à terme.

(H_1) La série $\sum\limits_{p\geqslant 0} v_p$ converge simplement vers g sur $[0;1[$ (on en vient).

(H_2) Les fonctions v_p sont continues et intégrables sur $[0;1[$ et g est continue sur $[0;1[$.

(H_3) $\int_0^1 |v_p(u)|du = \left[\frac{u^{p+1}}{(p+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(p+1)^2}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{p\geqslant 0} \frac{1}{(p+1)^2}$ converge.

Ainsi, g est intégrable sur $[0;1[$ (on le savait déjà) et $I = \int_0^1 g(u)du = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 v_p = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$. Posons, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $S'_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$ en séparant indices pairs et impairs. Ensuite, $S'_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{S_n}{2}$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \frac{\pi^2}{6}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $I = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \frac{\pi^2}{12}$ et, d'après la question précédente, on a donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

6.120 **a.** • Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

• Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n|x|} = +\infty$ donc, par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

La suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend toujours vers 0 donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

b. • Pour $n = 0$, on a $f_0(x) = x$ donc la fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est impaire, nulle en 0 et positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}-$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall x > 0,\ f'_n(x) = e^{-\sqrt{nx}} + x\Big(-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{x}}\Big)e^{-\sqrt{nx}} = \frac{e^{-\sqrt{nx}}}{2}(2-\sqrt{nx})$ donc f_n atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en $x_n = \frac{4}{n}$ et $\underset{x\in\mathbb{R}_+}{\mathrm{Max}}\, f_n(x) = f_n(x_n) = \frac{4e^{-2}}{n}$. Par imparité de la fonction f_n, $\underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Max}}\, |f_n(x)| = ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{4e^{-2}}{n}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$ donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

c. • Si $x = 0$, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge.

• Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n|x|}} = 0$ donc $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Le domaine de définition D de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ vaut $D = \mathbb{R}$ et on a convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ pour tout réel x.

d. On a vu en question que $\forall n \geqslant 1,\ ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{4e^{-2}}{n}$ donc, par RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ car la série harmonique diverge, et encore moins $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ car f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

e. Soit $a > 0$, d'après l'étude de f_n faite en **b.**, dès que $\frac{4}{n} \leqslant a$ et toujours par imparité de f_n, on a $||f_n||_{\infty,I_a} = f_n(a)$. Or on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(a)$ converge d'après **c.**. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I_a, à fortiori uniformément. Si on rajoute f_0 qui n'est pas bornée sur I_a, on n'a plus convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur I_a ; par contre on conserve la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur I_a car ceci concerne les restes.

6.121 **a.** • Si $x \in]0;1[$ et $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n \ln(n) = 0^+$ par croissances comparées donc, comme $\ln(x) < 0$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = -\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x = 1$, $u_n(1) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(1)$ converge.

• Si $x > 1$, $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(x^{-n})$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi, l'ensemble de définition D de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ vaut $D = [1;+\infty[$.

b. Pour $n \geqslant 2$, u_n est positive et dérivable sur $[1;+\infty[$ et $u_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)}$ donc u_n est croissante sur $[0;e^{1/n}]$ et décroissante sur $[e^{1/n};+\infty[$ ce qui montre que $|u_n = u_n$ est maximale en $e^{1/n}$ et on a $||u_n||_{\infty,D} = u_n(e^{1/n}) = \dfrac{1}{en\ln(n)}$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur D et qu'une de ses primitives $x \mapsto \ln(\ln(x))$ admet une limite infinie en $+\infty$, la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Soit $x \in]1;+\infty[$ et $n \geqslant 1$, alors $0 \leqslant R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^k\ln(k+1)}$ et, pour tout entier $k \geqslant n$, $\ln(k+1) \geqslant \ln(n+1)$ donc on peut majorer $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (1/x)^k = \dfrac{\ln(x)}{x-1} \times \dfrac{(1/x)^n}{\ln(n+1)}$. Or $0 \leqslant (1/x)^n \leqslant 1$ et, comme $\forall x > 1$, $\ln(x) \leqslant x - 1$, on a $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x-1} \leqslant 1$. Par conséquent, comme $R_n(1) = 0$, on a $\forall x \in D$, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. On déduit de **c.** que $||R_n||_{\infty,D} \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,D} = 0$ par encadrement et $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément sur D donc, comme toutes les u_n sont continues sur D, S est continue sur D.

e. Pour $x > 1$, d'après la question précédente, $0 \leqslant S(x) = R_1(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x-1} \times \dfrac{(1/x)}{\ln(2)} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$ et S est continue sur D. Ainsi, la fonction S est intégrable sur D par comparaison à une intégrale de Riemann.

6.122 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, pour que $S(x)$ existe, on doit au moins avoir $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + x \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin (-\mathbb{N})$. Soit donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{a^n}{n+x}$. Traitons alors quatre cas :

- • Si $|a| < 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n$ converge car $|a| < 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries géométriques.
- • Si $|a| > 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- • Si $a = 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge par comparaison à la série harmonique.
- • Si $a = -1$, alors $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n} \times \dfrac{1}{1 + (x/n)} \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ car $\dfrac{1}{1 + (x/n)} \underset{+\infty}{=} 1 + O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Ainsi,

$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum_{n\geqslant 1}\Big(f_n(x)-\frac{(-1)^n}{n}\Big)$ converge par comparaison aux séries de Riemann. Ainsi, par somme, $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge (mais pas absolument).

Le domaine de définition de S vaut donc $D_S=\emptyset$ si $|a|>1$ ou $a=1$, $D_S=\mathbb{R}\setminus(-\mathbb{N})$ si $|a|<1$ ou $a=-1$.

b. Tout d'abord, les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 1 : soit $0<\alpha<\beta$, alors pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[\alpha;\beta]$, comme $|f_n|:x\mapsto\frac{|a|^n}{n+x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $|f_n(x)|\leqslant|f_n(\alpha)|$ donc f_n est bornée sur $[\alpha;\beta]$ et $||f_n||_{\infty,[\alpha;\beta]}=|f_n(\alpha)|\underset{+\infty}{=}o(|a|^n)$. Comme $\sum_{n\geqslant 0}|a|^n$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement vers S sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On sait d'après le cours que ceci implique la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, pour $n\geqslant 1$, comme $|f_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=\lim_{x\to 0^+}|f_n(x)|=\frac{|a|^n}{n}\underset{+\infty}{=}o(|a|^n)$. Comme la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}|a|^n$ converge car $|a|<1$ par hypothèse, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $T:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le cours. Comme $S=T+f_0$ et que f_0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $x>0$, $a\,S(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}af_n(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}}{n+x+1}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{p+x}$ en effectuant le changement d'indice $p=n+1$. Ainsi, $aS(x+1)=S(x)-f_0(x)=S(x)-\frac{1}{x}$.

d. $\forall x>0,\ S(x)=\frac{1}{x}+a\,S(x+1)$ or S est continue en 1 d'après **b.** donc $\lim_{x\to 0^+}S(x+1)=S(1)$ donc S est bornée au voisinage de 1 et on en déduit que $S(x)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{x}+O(1)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)$ ce qui montre bien que $S(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

e. Méthode 1 : la borne β n'est pas intervenue dans les calculs de la question **b.** donc $||f_n||_{\infty,[\alpha;+\infty[}=|f_n(\alpha)|$ à nouveau et on a convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[\alpha;+\infty[$. Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$, par théorème de la double limite, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$.

Méthode 2 : Comme $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **b.** et que $\forall n\geqslant 1,\ \lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\ell_n=0$, par double limite, $\lim_{x\to+\infty}T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ell_n=0$. Comme $\lim_{x\to+\infty}f_0(x)=0$, par somme $\lim_{x\to+\infty}S(x)=0+0=0$.

Comme $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a^n}{x}$, si on admet pouvoir sommer les équivalents, on aurait $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{x}=\frac{1}{(1-a)x}$. Pour le montrer rigoureusement, on écrit $x\,S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x)$ avec $g_n(x)=\frac{a^nx}{n+x}=a^n-\frac{na^n}{n+x}$, la fonction $|g_n|:x\mapsto|a|^n-\frac{n|a|^n}{n+x}$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim_{x\to+\infty}|g_n(x)|=|a|^n$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=|a|^n$. Ainsi, comme $\sum_{n\geqslant 0}|a|^n$ converge, $\sum_{n\geqslant 0}g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la double limite, on obtient $\lim_{x\to+\infty}x\,S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$. Par conséquent, $S(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{(1-a)x}$.

Pour être plus précis, pour $x>0$, $\Big|S(x)-\frac{1}{(1-a)x}\Big|=\Big|\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{a^n}{n+x}-\frac{a^n}{x}\Big)\Big|$ car $\frac{1}{1-a}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n$ donc, par inégalité triangulaire, on a $\Big|S(x)-\frac{1}{(1-a)x}\Big|=\Big|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{na^n}{x(n+x)}\Big|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n|a|^n}{x^2}=\frac{A}{x^2}$ en posant $A=\sum_{n=0}^{+\infty}n|a|^n$. Ainsi, $S(x)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ ce qui est plus précis que ce qu'on a obtenu avant.

6.123 **a.** Si $n \geqslant 1$, g_n est dérivable sur $[0;1]$ par théorèmes généraux et $g_n'(t) = -\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} e^t + \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t$ qu'on factorise en $g_n'(t) = -\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{te^t}{n}$ pour $t \in [0;1]$. Ainsi, comme $\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right| = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant 1$ et $|t| \leqslant 1$, on a bien la majoration suivante, $\forall t \in [0;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$.

b. Si $t \in]0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, par le théorème des accroissements finis, comme g_n est dérivable sur $[0;1]$, il existe $c \in]0;t[$ tel que $g_n(t)-1 = g_n(t)-g_n(0) = tg_n'(c)$. Or $|g_n'(c)| \leqslant \frac{e^c}{n} \leqslant \frac{e^t}{n}$ d'après **a.** donc $|g_n(t)-1| \leqslant \frac{te^t}{n}$.

c. Soit $x \in [0;1]$, $|I_n(x)-x| = \left|\int_0^x g_n(t)dt - \int_0^x dt\right| = \left|\int_0^x (g_n(t)-1)dt\right| \leqslant \int_0^x |g_n(t)-1|dt \leqslant \frac{1}{n}\int_0^x te^t dt$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^x te^t dt = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = x$. Ainsi, la suite de fonctions $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto x$ sur $[0;1]$.

d. On reprend la majoration précédente, $|I_n(x)-x| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^x te^t dt \leqslant \frac{I}{n}$ si $I = \int_0^1 te^t dt = [(t-1)e^t]_0^1 = 1$ donc $I_n - f$ est bornée sur $[0;1]$ et on a $||I_n - f||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a bien convergence uniforme de $(I_n)_{n\geqslant 1}$ vers f sur $[0;1]$.

6.124 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$: f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. La majoration de la question précédente montre aussi que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car cette valeur majorante est la limite de f_n en $+\infty$). Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et les fonctions f_n admettent des limites en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}$. Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

c. • On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).

• Pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

• Soit $a > 0$, posons $J_a =]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$, on a la majoration $\forall x \in J_a$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n'(x)| \leqslant f_n'(a)$ donc $||f_n'||_{\infty,J_a} = f_n'(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur J_a.

Par théorème de dérivation des séries de fonctions, f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

d. On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geqslant 2$, on a $\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = f_n'(x) \leqslant \int_{n-1}^n g_x(t)dt$. On somme pour n allant de 1 à p pour l'inégalité de gauche et pour n allant de 2 à p pour celle de droite et on obtient par Chasles $\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leqslant \sum\limits_{n=1}^{p} f_n'(x) \leqslant f_1'(x) + \int_1^p g_x(t)dt$. Or, pour $y \geqslant 1$, on a $\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\right)dt = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_1^y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\right)$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Par encadrement, on en déduit l'équivalent $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0.

6.125 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, distinguons deux cas :

- Si $x = 0$, alors $u_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge et $S(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, $\ln(1+n^2x^2) = \ln\left(n^2x^2\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)\right) = 2\ln(n) + 2\ln(|x|) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(n)$. De même, $\ln(1+n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ d'où la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ par RIEMANN.

Le domaine de definition de S est donc égal à $D = \mathbb{R}$.

b. Toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et, si $a > 0$ et $n \geqslant 1$, comme u_n est paire, positive, croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \in [-a;a]$, $|u_n(x)| \leqslant u_n(a)$ d'où $||u_n||_{\infty,[-a;a]} = u_n(a)$ et on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(a)$ converge d'après **a.** donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. Ainsi, par théorème, S est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $u'_n(x) = \dfrac{2x}{(1+n^2x^2)\ln(1+n)}$. Par exemple, on a $u'_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n\ln(1+n)}$ donc $||u'_n||_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant u'_n\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et on sait (série de BERTRAND par comparaison série-intégrale) que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge. Ainsi, on n'a pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u'_n$ sur $\mathbb{R}$. Comme le problème est apparemment au voisinage de 0, on n'aura même pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u'_n$ sur tout segment (surtout ceux qui contiennent 0). On va donc étudier la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u'_n$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{2x}{(1+t^2x^2)\ln(1+t)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour $k \geqslant 1$, on a $u'_k(x) = f_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f_x(t)dt$. Pour des entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant n+1$, on somme toutes ces inégalités pour $k \in [\![n+1;p]\!]$ et on obtient $0 \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{p} u'_k(x) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{p} \int_{k-1}^{k} f_x(t)dt = \int_n^p f_x(t)dt$ par CHASLES. Comme $\int_n^{+\infty} f_x(t)dt$ converge car $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\sum\limits_{k\geqslant n+1} u'_k(x)$ aussi car $u'_k(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, en faisant tendre p vers $+\infty$, $0 \leqslant R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u'_k(x) \leqslant \int_n^{+\infty} f_x(t)dt \leqslant \dfrac{2}{\ln(1+n)} \int_n^{+\infty} \dfrac{xdt}{1+(xt)^2} = \dfrac{2}{\ln(1+n)}[\text{Arctan}(xt)]_n^{+\infty}$.

Par conséquent, comme $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{2}{\ln(1+n)}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(nx)\right) \leqslant \dfrac{\pi}{\ln(1+n)}$, R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme R_n est impaire car toutes les u'_k le sont, R_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\pi}{\ln(1+n)}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{\ln(1+n)} = 0$, on a bien la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u'_n$ sur $\mathbb{R}$.

d. Comme toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'on a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u'_n$ sur $\mathbb{R}$, on conclut par un théorème du cours que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

6.126 **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et elle est positive car $f_n : x \mapsto x^n \sin(\pi x)$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$. Par intégration par parties (simple à justifier), il vient $u_n = -\dfrac{\pi}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\cos(\pi x)dx$ donc, par l'inégalité de la moyenne, $|u_n| \leqslant \dfrac{\pi}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}dx = \dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)}$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument par RIEMANN et le théorème de comparaison car $\dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Bien sûr, la majoration $|u_n| \leqslant \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$ ne suffit pas pour conclure.

b. Comme $\forall x \in [0;1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(\pi x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$. Il vient :

(H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ sur $[0;1[$.

(H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $[0;1[$ (même sur $[0;1]$) et f est continue sur $[0;1[$.

(H_3) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \displaystyle\int_0^1 |f_n|$ converge d'après ce qui précède (question **a.**).

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $[0;1[$ (ce qu'on pouvait voir en écrivant $f(x) = \dfrac{\sin(\pi(1-x))}{1-x}$ ce qui montre que f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \pi$) et il vient $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$. Or, par le changement de variable $x = 1 - \dfrac{u}{\pi} = \varphi(u)$ (cela revient à poser $u = \pi(1-x)$) avec φ bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0;\pi]$ dans $[0;1[$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u}du$. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u}du \sim 1,85$.

6.127 **a.** Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) Soit $x > 0$, alors $u_n(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de Riemann. Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement vers S sur I.

(H_2) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur I et $u_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$ après simplification.

(H_3) Ainsi, u_n' est décroissante et positive, donc bornée sur I pour $n \geqslant 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} u_n'(x) = \dfrac{1}{n^2}$ et on a $\forall x > 0,\ 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ de sorte que $||u_n'||_{\infty,I} = \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} u_n'(x)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||u_n'||_{\infty,I}$ converge et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur I.

Par le fameux théorème, $S - u_0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur I donc S l'est aussi par somme car u_0 est C^1 sur I. De plus, $\forall x > 0,\ S'(x) = u_0'(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$ car $u_0'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ puisque $u_0(x) = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$.
On pouvait utiliser le théorème sur tout segment de I car si $[a;b] \subset I$, on a a $\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n'||_{\infty,[a;b]} = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+a)^2}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur tout segment de I. On a alors directement la conclusion que S est de classe C^1 sur I et que $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

b. Pour $x \in I$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{n+x-(n+1)}{(n+1)(n+x)} = \dfrac{x-1}{(n+1)(n+x)} = u_n(x)$. Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+p}\right) = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dfrac{1}{j} - \sum\limits_{j=n+2}^{n+p} \dfrac{1}{j}$ par télescopage ou changement d'indice dans les deux sommes. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S(p) = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dfrac{1}{j}$.

c. Par comparaison série-intégrale, on montre très classiquement que $S(p) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Or on a vu en **a.** que S est croissante donc, si $p \leqslant x < p+1$ (ce qui caractérise $p = \lfloor x \rfloor$), alors $S(p) \leqslant S(x) \leqslant S(p+1)$. Comme $S(p) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$ et $S(p+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p+1) = \ln(p) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$, par encadrement, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Or, par croissance de $\ln$, $\ln(p) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(p+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$ donc $\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(p)$. Ainsi, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

6.128 **a.** Soit la fonction $h :]-\infty;1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(u) = -u - \ln(1-u)$. h est dérivable sur $]-\infty;1[$ et on calcule $h'(u) = -1 + \dfrac{1}{1-u} = \dfrac{u}{1-u}$ donc h est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $[0;1[$, elle est donc minimale en 0 où $h(0) = 0$. Par conséquent, h est positive sur $]-\infty;1[$ et on a bien $\forall u \in]-\infty;1[,\ \ln(1-u) \leqslant -u$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ si $x \in [0;\sqrt{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > \sqrt{n}$. f_n est continue sur le segment $[0;\sqrt{n}]$ donc $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ existe et, par construction, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, dès que $n \geqslant x^2$, on a $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$ car $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{x^2}{n}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(0) = 1 = e^{-0^2}$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.
- Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \geqslant 0,\ |f_n(x)| = 0$ si $x^2 > n$ et $|f_n(x)| = f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right) \leqslant e^{-x^2} = f(x)$ d'après **a.** car $-\dfrac{x^2}{n} \in]-\infty;1[$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale I_n, on pose le changement de variable $x = \sqrt{n}\cos(t) = \varphi(t)$ et φ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;\sqrt{n}]$. Ainsi, d'après le cours, on a $I_n = \displaystyle\int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2(t))^n(-\sqrt{n}\sin(t))dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'équivalent admis. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et, par unicité de la limite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6.129 **a.** Par le binôme de NEWTON, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^{2n+1-k}X^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^{2n+1-k}X^k$ et les termes en X^k s'éliminent dans les deux sommes quand $2n+1-k$ est pair, donc quand k est impair. Par contre, les termes s'ajoutent quand k est pair. On pose donc le changement d'indice $k = 2p$ avec $p \in [\![0;n]\!]$ pour avoir $P_n = 2\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p} i^{2n+1-2p}X^{2p} = 2i\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p}(-1)^{n-p}X^{2p} = 2iQ_n(X^2)$.

D'abord, i n'est pas racine de P_n car $P_n(i) = (2i)^{2n+1}$. Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$, on a $P_n(z) = 0 \iff \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1$ et le cours sur les racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité nous donne, comme $\dfrac{z+i}{z-i} \neq 1 = e^{i0}$, l'équivalence $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \iff \exists k \in [\![1;2n]\!],\ \dfrac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \iff \exists k \in [\![1;2n]\!],\ z = \dfrac{i(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1)}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1} = \text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Comme cotan est injective sur $]0;\pi[$, les racines de P_n sont les $2n$ réels $\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in [\![1;2n]\!]$ et, puisque le coefficient dominant de P_n vaut $2i(2n+1)$, on a $P_n = 2i(2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$. Comme on dispose de $P_n(X) = 2iQ_n(X^2)$, les réels $\text{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \text{cotan}^2\left(\dfrac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in [\![1;n]\!]$ sont des racines de Q_n qui est de degré n donc ces n réels sont exactement les n racines de Q_n. Puisque le coefficient dominant de Q_n vaut $(2n+1)$, on a donc $Q_n = (2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$

b. D'après la question précédente, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ est la somme des racines de Q_n. Par définition de Q_n, on a $Q_n = \binom{2n+1}{2n}X^n - \binom{2n+1}{2n-2}X^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-2}(-1)^{n-p}\binom{2n+1}{2p}X^p$, donc la somme des racines de Q_n vaut, d'après le cours, $T_n = \dfrac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = \dfrac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)} = \dfrac{n(2n-1)}{3} = T_n$.

c. Comme les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont positives sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, l'inégalité de l'énoncé est équivalence à l'encadrement $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$ ce qui est évident par deux petites études de fonctions ou par le théorème des accroissements finis appliqué à $\sin$ et $\tan$ entre 0 et x car $\sin' \leqslant 1$ et $\tan' \geqslant 1$. Par exemple, $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\exists c \in]0;x[$, $\dfrac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0} = \tan'(c) = \dfrac{1}{\cos^2(c)} > 1$ donc $\tan(x) > x$.

d. Pour $n \geqslant 1$, remplaçons x par $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ (pour $k \in [\![1;n]\!]$) dans l'inégalité précédente et sommons, ce qui donne $T_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\dfrac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = n + T_n$. En posant la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$, on a $\dfrac{n(2n-1)}{3} \leqslant \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2}S_n \leqslant n + \dfrac{n(2n-1)}{3} = \dfrac{2n(n+1)}{3}$ ce qui revient à $\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, par encadrement, on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \ln(1+x^n)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ existe.

f. On considère l'intégrale I_n sur $]0;1]$ et on pose $x = t^{1/n} = \varphi_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme φ_n est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+t)\left(\frac{1}{n}t^{(1/n)-1}\right)dt$ donc $nI_n = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)t^{1/n}}{t}dt$. Soit $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{\ln(1+t)t^{1/n}}{t}$.

- (H_1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ sur $]0;1]$.
- (H_2) Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $]0;1]$.
- (H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]0;1]$, $|f_n(t)| = \dfrac{\ln(1+t)t^{1/n}}{t} \leqslant \dfrac{\ln(1+t)}{t} = \varphi(t)$ car $0 \leqslant t^{1/n} \leqslant 1$ et la fonction φ est continue et intégrable sur $]0;1]$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}dt$.

g. Pour $t \in]0;1[$, on a $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}t^n}{n}$ donc $f(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{n}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction $u_n :]0;1[\to \mathbb{R}$ par $u_n(t) = \dfrac{(-1)^{n+1}t^n}{n}$.

- (H_1) la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ (on en vient).
- (H_2) les fonctions u_n sont continues et intégrables (car polynomiales) sur $]0;1[$.
- (H_3) la fonction f est continue sur $]0;1[$.
- (H_4) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 |u_n| = \dfrac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1}dt = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann).

Par le théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = S$.

Posons $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}$ donc $T_{2n} = S_{2n} - \dfrac{S_n}{2}$ ce qui, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, donne $S = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\pi^2}{12} = \dfrac{\pi^2}{12}$ car $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, c'est-à-dire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

6.130 **a.** Les fonctions f_n sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - g(x)| = \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}}$

donc $|f_n(x) - g(x)| = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (maximal en $x = 0$). On pouvait aussi étudier la fonction paire $f_n - g$ en la dérivant sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $(f_n - g)'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} - 1 \leqslant 0$ donc $f_n - g$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue en 0 donc maximale en 0. Ou alors, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b} \iff a+b \leqslant a+b+2\sqrt{ab}$ est vrai pour tous réels positifs a et b d'où $f_n(x) - g(x) = \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2} + \sqrt{\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Par conséquent, la fonction $f_n - g$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a $||f_n - g||_{\infty,\mathbb{R}} = f_n(0) - g(0) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ||f_n - g||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

c. Les fonctions f_n sont de classe C^∞ par opérations car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + \dfrac{1}{n} > 0$ et g n'est pas dérivable en 0. On ne peut donc pas se passer de la converge uniforme de la suite $(f_n')_{n\geqslant 1}$ dans le théorème de dérivabilité des suites de fonctions qui suppose seulement la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur I.

6.131 La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -2\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc f est intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$. De plus, f est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$ car $f(x) \underset{1}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ donc se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$. Comme on a le développement en série entière $\forall x \in]0;1[$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, il vient $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx$ avec $f_n(x) = -\dfrac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$.

Pour $n \geqslant 2$, f_n est continue sur $[0;1]$ en prolongeant par continuité en 0 et en 1 en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. de plus, f_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $f_n'(x) = -\dfrac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}\Big)$ donc, avec le tableau de variations de f_n, on trouve $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\left(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\right) = \dfrac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n^2}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ par Riemann. En posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geqslant 2$ donc, par intégration par parties, on obtient $\displaystyle\int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^n\ln x}{n^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n^3}$ si $n \geqslant 2$. Par convergence normale (donc uniforme) de

la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur le segment $[0;1]$, on a $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3)-1$.
De plus, $\displaystyle\int_0^1 f_1 = -\int_0^1 \ln(x)dx = [x - x\ln(x)]_0^1 = 1$ donc $\displaystyle I = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.
On pouvait utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

6.132 **a.** • Si $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.
• Si $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \ln(2)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge aussi grossièrement.
• Si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-nx}$ converge (série géométrique, $0 < e^{-x} < 1$).
Ainsi le domaine de définition de f vaut $I = \mathbb{R}_+^*$.
b. Soit $a > 0$, comme u_n est décroissante et positive, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(a)$ converge d'après ce qui précède. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[a;+\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^* = I = \bigcup\limits_{a>0}[a;+\infty[$.
Les u_n sont décroissantes donc, par convergence simple, f est décroissante. Comme $u_0(x) = \ln(2)$ et $u_1(x) = \ln(1+e^{-x})$, la fonction $u_0 + u_1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme avant, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ est décroissante. Ainsi, si $0 < x < y$, on a $(u_0+u_1)(x) > (u_0+u_1)(y)$ et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \geqslant \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(y)$. En sommant, on obtient donc $(u_0+u_1)(x) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x) = f(x) > f(y) = (u_0+u_1)(y) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(y)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ou alors, avec $0 < x < y$, on a $f(x) - f(y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n(x) - u_n(y))$ et tous les $u_n(x) - u_n(y)$ sont strictement positifs donc, par somme, $f(x) - f(y) > 0$.
c. Comme f est décroissante et minorée par 0, f admet une limite finie en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone. $u_0(x) = \ln(2)$ et $\forall n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur $[1;+\infty[$ et théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = \ln(2)$.
d. Comme f est décroissante et positive, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ par théorème de la limite monotone. Pour $x > 0$, on pose $g_x : t \mapsto \ln(1+e^{-tx})$ d'où $u_n(x) = g_x(n)$. Comme g_x est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-tx}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle g_x(n+1) = u_{n+1}(x) \leqslant \int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = u_n(x)$.
En sommant l'inégalité de gauche pour $n \in \mathbb{N}$ et en rajoutant $u_0(x) = \ln(2)$ (tout converge), on obtient par CHASLES $\displaystyle f(x) \leqslant \ln(2) + \int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt$. En sommant l'inégalité de droite pour $n \in \mathbb{N}$, on arrive directement à $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt \leqslant f(x)$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt \leqslant f(x) \leqslant \ln(2) + \int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt$.
Or, comme $0 < e^{-tx} < 1$ si $t > 0$, on a $\displaystyle\ln(1+e^{-tx}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-nxt}}{n}$. Comme les $t \mapsto (-1)^{n+1}\dfrac{e^{-nxt}}{n}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$, que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nxt}}{n}dt = \frac{1}{n^2x}$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2x}$ converge par RIEMANN, on conclut par le théorème d'intégration terme à terme que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2x} = \frac{\pi^2}{12x}$ d'après l'énoncé. Ainsi, l'encadrement précédent montre que $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
Si on ne connaît pas le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on peut faire d'abord une intégration par parties pour avoir (facilement) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt = \int_0^{+\infty}\frac{txe^{-tx}dt}{1+e^{-tx}}$ puis le changement de variable $u = tx$

(facile aussi) pour avoir $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{ue^{-u}du}{1+e^{-u}}$ et ensuite utiliser les séries géométriques pour écrire, comme $\frac{1}{1+e^{-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nu}$ si $u>0$, $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n ue^{-(n+1)u}du$ et refaire une intégration terme à terme avec les fonctions $h_n : u \mapsto (-1)^n ue^{-(n+1)u}$ qui sont bien continues sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que $\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge simplement vers $S : u \mapsto \frac{ue^{-u}}{1+e^{-u}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifie enfin la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|h_n|$ car $\int_0^{+\infty}|h_n| = \frac{1}{n^2}$ par une intégration par parties des plus zézées. On peut aussi montrer l'égalité admise $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ en se souvenant de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans la somme partielle $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ (classique).

6.133 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{\text{sh}\,(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme on sait que $\sin(t) \underset{0}{\sim} \text{sh}\,(t) \underset{0}{\sim} t$, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Comme $\text{sh}\,(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2}$, on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 2\sin(t)e^{-t}$ donc $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ et, par comparaison, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le cours, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\text{sh}\,(t)}dt$ converge.

b. Si $t>0$, $\frac{1}{\text{sh}\,(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}} = 2e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-2nt}$ (car $e^{-2t}<1$) donc $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}2\sin(t)e^{-(2n+1)t}$ (série géométrique). Posons, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : t \mapsto 2\sin(t)e^{-(2n+1)t}$.

(H_1) $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le faire).

(H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car elles sont prolongeables par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ et que $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$.

(H_3) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_4) Comme $|\sin(t)| \leqslant t$, par inégalité de la moyenne, $I_n = \int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt \leqslant 2\int_0^{+\infty}te^{-(2n+1)t}$. Par une intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}$, comme u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, il vient $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^{+\infty}e^{-(2n+1)t}dt = \frac{2}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ donc $\sum_{n\geqslant 0} I_n$ converge (RIEMANN).

Par le théorème d'intégration terme à terme, $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\text{sh}\,(t)}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}f_n(t)dt = 2\text{Im}\Big(\int_0^{+\infty}e^{it}e^{-(2n+1)t}dt\Big) = 2\text{Im}\Big(\int_0^{+\infty}e^{(i-(2n+1))t}dt\Big) = 2\Big[\frac{e^{(i-(2n+1))t}}{i-(2n+1)}\Big]_0^{+\infty}$ ce qui donne $\int_0^{+\infty}f_n(t)dt = 2\text{Im}\Big(\frac{1}{2n+1-i}\Big) = 2\text{Im}\Big(\frac{2n+1+i}{(2n+1)^2+1}\Big) = \frac{2}{(2n+1)^2+1}$.

On a bien l'égalité attendue, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\text{sh}\,(t)}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{1+(2n+1)^2} \sim 0,72$.

6.134 **a.** Si $x=0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Si $x>0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx}) \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument par le critère de RIEMANN car $2>1$ ou par comparaison aux séries géométriques. Pour être complet, on peut constater que si $x<0$, on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$ par croissances comparées ce qui prouve que le domaine de définition de S est effectivement $\mathbb{R}_+$. Au final, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $x \geqslant 0$, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et tend vers 0 donc, d'après le critère spécial des séries alternées, en posant les restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{1}{n+1}$. La convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les u_n sont continues, on en déduit d'après le cours que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. (H_1) On a vu la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en question **a.**.

(H_2) Toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a $u_n'(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx}$.

(H_3) Soit $a > 0$ et $n \geqslant 1$, $||u_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = |u_n'(a)| = e^{-na}$ et $\sum_{n\geqslant 1} e^{-na}$ converge (série géométrique avec $0 < e^{-a} < 1$) donc on a convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ sur $[a;+\infty[$ sachant que toutes les u_n sont de classe C^1 et qu'on a convergence simple (même uniforme et même normale) de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[a;+\infty[$. Par un théorème du cours, S est de classe C^1 sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$.

Par un théorème du cours, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}e^{-nx}$.

d. Pour $x > 0$, $S'(x) = e^{-x}\sum_{p=0}^{+\infty}(-e^{-x})^p = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \big(-\ln(1+e^{-x})\big)'$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe donc une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ S(x) = k - \ln(1+e^{-x})$.

(H_1) D'après la question **b.**, on a convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0 = \ell_n$.

Par théorème de la double limite, $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} -\ln(1+e^{-x}) = 0$, on en déduit que $k = 0$ donc que $\forall x > 0,\ S(x) = -\ln(1+e^{-x})$.

On pouvait constater, ce qui rend ces dernières questions inutiles, que si $x > 0$, on a $-e^{-x} \in]-1;1[$ donc, comme on reconnaît le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ qui est de rayon de convergence 1, on a directement $\ln(1+e^{-x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(e^{-x})^n}{n} = -S(x)$.

e. Comme S est continue en 0 d'après **b.**, on a $S(0) = \lim_{x\to 0^+} S(x) = \lim_{x\to 0^+}(-\ln(1+e^{-x})) = -\ln(2)$.

6.135 **a.** Avec la condition de l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \left|\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{c|x|}{2^n}$ et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{c|x|}{2^n}$ converge car $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$ donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge absolument donc converge. Ainsi, en posant $u_n : x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$, on peut définir la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur I car on vient de voir la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur I.

Avec la même majoration que précédemment, comme $|x| \leqslant a$ pour $x \in I$, on a $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \frac{ca}{2^n}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{ca}{2^n}$ converge comme avant donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0} ||u_n||_{\infty,[-a;a]}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur I. Or les u_n sont continues sur I par hypothèse donc, d'après le cours, S est continue sur I.

b. D'après l'hypothèse, comme $0 \in I$, on a $|\varphi(0)| \leqslant c|0| = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $S(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi(0) = 0$. De plus, d'après **a.**, S est continue sur I. Enfin, pour $x \in I$, $S(x) - S\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big) = \varphi(x)$ après simplification. Par conséquent, S est solution de (P).

c. Méthode 1 : soit f une fonction vérifiant (P) et $x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{2^k} \in I$ donc $f\Big(\frac{x}{2^k}\Big) - f\Big(\frac{x}{2^{k+1}}\Big) = \varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big)$. En sommant pour $k \in [\![0;n]\!]$, on obtient, après télescopage, $f(x) - f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi\Big(\frac{x}{2^k}\Big)$ (R). Comme f est continue en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big) = f(0) = 0$ donc, en passant à la limite dans (R), on a finalement $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = S(x)$ ce qui assure l'unicité d'une solution de (P).

Méthode 2 : soit S_1 et S_2 deux solutions de (P). Posons $d = S_1 - S_2$, alors d est continue sur I par opérations, $d(0) = S_1(0) - S_2(0) = 0$ et $\forall x \in I$, $d(x) - d\Big(\frac{x}{2}\Big) = S_1(x) - S_1\Big(\frac{x}{2}\Big) - S_2(x) + S_2\Big(\frac{x}{2}\Big) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$. Soit $x \in I$, en itérant la relation $d(x) = d\Big(\frac{x}{2}\Big)$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x) = d\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$. Comme d est continue en 0, en passant à la limite dans cette relation, on a donc $d(x) = d(0) = 0$. Ainsi, $S_1 = S_2$ et on a encore établi l'unicité d'une solution de (P).

d. Comme S est solution de (P) avec la question **b.** et que deux solutions de (P) sont égales d'après la question **c.**, on en déduit que S est la seule solution de (P).

e. Supposons φ de classe C^1 sur I. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- D'après **a.**, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement (même normalement) sur I.
- Toutes les u_n sont de classe C^1 sur I car φ l'est.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $u_n'(x) = \frac{1}{2^n}\varphi'\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$ or φ' est continue sur le segment I donc elle y est bornée et on peut définir $M = ||\varphi'||_{\infty,I}$. On a donc $\forall x \in I$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{M}{2^n}$ donc u_n' est bornée sur I, $||u_n'||_{\infty,I} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{M}{2^n}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur I.

Si on suppose φ de classe C^1 sur I, alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est aussi de classe C^1 sur I.

6.136 **a.** On a $f_n(0) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} = x$ et, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{nx^3}{nx^2} = x$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

Si $x \geqslant 0$, on a $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{nx^2}{1+nx} - x = \frac{nx^2 - x(1+nx)}{1+nx} = \frac{-x}{1+nx}$. par contre, si $x < 0$, il vient $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2} - x = \frac{nx^3 - x(1+nx^2)}{1+nx^2} = \frac{-x}{1+nx^2}$. Une petite étude de la fonction g_n montre que g_n est négative, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet pour limite $-\frac{1}{n}$ en $+\infty$. De même, g_n est positive sur $\mathbb{R}_-$, elle est croissante sur $\Big]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{n}}\Big]$ et décroissante sur $\Big[-\frac{1}{\sqrt{n}}; 0\Big]$. De plus, $g_n\Big(-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On déduit de tous ces renseignements que g_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}} = ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = \text{Max}\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\Big)$. Ainsi, $\forall n \geqslant 4$, $||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$ ce qui montre la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

b. Par opérations, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $x>0$, $\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\dfrac{nx}{1+nx}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$ et, si $x<0$, $\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\dfrac{nx^2}{1+nx^2}\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}0$ donc f_n est dérivable en 0 avec $f'_n(0)=0$. Ainsi, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule, pour $x>0$, $f'_n(x)=\dfrac{nx(2+nx)}{(1+nx)^2}$ et, si $x<0$, $f'_n(x)=\dfrac{nx^2(3+nx^2)}{(1+nx^2)^2}$. Comme avant, la suite de fonctions $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $g(0)=0$ et $g(x)=1$ sinon.

c. Les expressions de $f'_n(x)$ de a question précédente montrent que $\lim\limits_{x\to 0}f'_n(x)=0=f'_n(0)$ donc f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car elle l'est par opérations sur $\mathbb{R}^*$. Comme toutes les f'_n sont continues sur $\mathbb{R}$, si on avait convergence uniforme de $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$ (ou sur $[-1;1]$), on aurait continuité de sa limite, donc continuité de g. NON ! Par l'absurde, $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge uniformément ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $[-1;1]$.

6.137 **a.** Si $x\in]0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n\ln(n)=0^+$ par croissances comparées donc, comme $\ln(x)<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=-\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x=1$, il vient $u_n(1)=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n(1)$ converge. Si $x>1$, $u_n(x)\underset{+\infty}{=}o(x^{-n})$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n(x)$ converge par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi, l'ensemble de définition D de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}u_n$ vaut $D=[1;+\infty[$.

b. Pour $n\geqslant 2$, u_n est positive et dérivable sur $[1;+\infty[$ et $u'_n(x)=\dfrac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)}$ donc u_n est maximale en $e^{1/n}$ et on a $||u_n||_{\infty,D}=u_n(e^{1/n})=\dfrac{1}{en\ln(n)}$. Comme la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur D et qu'une de ses primitives $x\mapsto\ln(\ln(x))$ admet une limite infinie en $+\infty$, la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ ne converge pas normalement sur D.

Si $a>1$, il existe $n_0\geqslant 2$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ e^{1/n}\leqslant a$ d'où, avec ce qui précède, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[}=u_n(a)$. Or $\sum\limits_{n\geqslant n_0}u_n(a)$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a;+\infty[$ inclus dans $]1;+\infty[$.

c. Soit $x\in]1;+\infty[$ et $n\geqslant 1$, alors $0\leqslant R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^k\ln(k+1)}$ et, pour tout entier $k\geqslant n$, $\ln(k+1)\leqslant\ln(n+1)$ donc on peut majorer $0\leqslant R_n(x)\leqslant\dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(1/x)^k=\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{(1/x)^n}{\ln(n+1)}$. Or $0\leqslant(1/x)^n\leqslant 1$ et, comme $\forall x>1,\ \ln(x)\leqslant x-1$ par concavité de $\ln$, on a $0\leqslant\dfrac{\ln(x)}{x-1}\leqslant 1$. Par conséquent, comme $R_n(1)=0$, on a $\forall x\in D,\ \forall n\geqslant 1,\ 0\leqslant R_n(x)\leqslant\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. On en déduit que R_n est bornée sur D et que $||R_n||_{\infty,D}\leqslant\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}||R_n||_{\infty,D}=0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ converge donc uniformément sur D et, comme les u_n sont continues sur D, S est continue sur D.

e. Pour $x>1$, d'après la question précédente, $0\leqslant S(x)=R_1(x)\leqslant\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{(1/x)}{\ln(2)}\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{\ln(x)}{x^2}\Big)$ donc $S(x)\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$. Ainsi, la fonction S qui est continue sur $[1;+\infty[$ est intégrable sur D par comparaison à une intégrale de Riemann.

6.138 **a.** Soit $x\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f_n:t\mapsto\dfrac{1}{\mathrm{ch}^n(t)}$ est continue sur le segment $[0;x]$ donc $I_n(x)$ existe. La fonction I_n est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, I_n est la primitive de f_n qui s'annule en 0 donc elle est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;x]$ vers la fonction $f : [0;x] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ car $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 0$ car $\mathrm{ch}(t) > 1$. Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $[0;x]$. $\forall n \geqslant 0$, $\forall t \in [0;x]$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t) = 1$ et φ est continue et intégrable sur $[0;x]$. Par conséquent, par le théorème de convergence dominée, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x f(t)dt = 0$.

Ainsi, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

c. Pour $n = 0$, $f_0(x) = \int_0^x dt = x$ donc f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$. Par contre, dès que $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^t}{2}$, on a $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} 2^n e^{-nt}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $-n < 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = J_n$ (voir question **e.**). Comme I_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ car f_n est positive et $I_n' = f_n$, $||I_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}_+} = J_n$.

<u>Méthode 1</u> : comme $\mathrm{ch}(t) \geqslant \dfrac{e^t}{2}$, il vient $0 \leqslant \int_{\ln(2)}^{+\infty} f_n(t)dt \leqslant \int_{\ln(2)}^{+\infty} 2^n e^{-nt}dt = 2^n\left[-\dfrac{e^{-nt}}{n}\right]_{\ln(2)}^{+\infty} = \dfrac{1}{n}$. Par Chasles, on obtient $J_n = I_n(\ln(2)) + \int_{\ln(2)}^{+\infty} f_n(t)dt$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\ln(2)) = 0$ d'après **b.** et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\ln(2)}^{+\infty} f_n(t)dt = 0$ par encadrement car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||I_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$.

<u>Méthode 2</u> : comme avant,$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ car $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 0$ car $\mathrm{ch}(t) > 1$. Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $\mathbb{R}_+$. $\forall n \geqslant 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(t)| \leqslant f_1(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ et f_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||I_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$.

Avec les deux méthodes, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $u = f_n$ et $v = \mathrm{th}$, u et v sont de classe C^1 sur $[0;x]$ avec $v'(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$ et $u'(t) = -\dfrac{n\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{n+1}(t)}$ donc $I_{n+2}(x) = \int_0^x u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt$ par intégration par parties et on a $I_{n+2}(x) = \dfrac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^{n+1}(x)} + n\int_0^x \dfrac{\mathrm{th}(t)\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{n+1}(t)}dt$ donc, comme $\mathrm{th}(t) = \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}$ et $\mathrm{sh}^2(t) = \mathrm{ch}^2(t) - 1$, on a $I_{n+2}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{n+2}(x)} + n\int_0^x \dfrac{\mathrm{ch}^2(t) - 1}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)}dt = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{n+2}(x)} + n(I_n(x) - I_{n+2}(x))$.

La relation cherchée entre $I_n(x)$ et $I_{n+2}(x)$ est donc $I_{n+2}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{(n+1)\mathrm{ch}^{n+2}(x)} + \dfrac{nI_n(x)}{n+1}$.

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{(n+1)\mathrm{ch}^{n+2}(x)} = 0$ si $n \geqslant 1$ donc, avec **d.**, $J_{n+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} I_{n+2}(x) = \dfrac{n}{n+1}\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x) = \dfrac{nJ_n}{n+1}$.

- $J_1 = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{\mathrm{ch}(t)}dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{2e^t dt}{1 + (e^t)^2} = [2\,\mathrm{Arctan}(e^t)]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$. Pour $n = 2p+1 \geqslant 1$ impair, on a $J_{2p+1} = \dfrac{2p-1}{2p}J_{2p-1} = \dfrac{2p-1}{2p} \times \dfrac{2p-3}{2p-2}J_{2p-3} = \cdots = \dfrac{2p-1}{2p} \times \dfrac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \dfrac{1}{2} \times J_1$. En multipliant par les termes pairs au numérateur, $J_{2p+1} = \dfrac{(2p)(2p-1)(2p-3)\cdots 3.1}{[(2p)(2p-2)\cdots 2]^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
- $J_2 = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{\mathrm{ch}^2(t)}dt = [\mathrm{th}(t)]_0^{+\infty} = 1$. Pour $n = 2p \geqslant 2$ pair, $J_{2p} = \dfrac{2p-2}{2p-1}J_{2p-2}$ et, par récurrence, $J_{2p} = \dfrac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \dfrac{2}{3} \times J_2$. En multipliant par les termes pairs au dénominateur, on arrive à

$$J_{2p} = \frac{[(2p-2)(2p-4)(2p-3)\cdots 2]^2}{(2p-1)(2p-2)\cdots 3.2} \times 1 = \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{2^{2p-2}(p!)^2 2p}{p^2(2p)!} = \frac{2^{2p-1}(p!)^2}{p(2p)!}.$$

Pour aller plus loin, $J_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}(e^p)^2}{2^{2p}e^{2p}(\sqrt{2\pi p})^2(p^p)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2p+1)}}$. Pour les indices pairs, $J_{2p} = \dfrac{2^{2p-1}(p!)^2}{p(2p)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2p-1}(\sqrt{2\pi p})^2(p^p)^2e^{2p}}{p(e^p)^2\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2p)}}$. En général, $J_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

6.139 Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $h_n : t \mapsto \dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, $h_n(t) = \dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}} \underset{0}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ donc h_n est intégrable en 0. Comme on a aussi $h_n(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nt}) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$, par comparaison, h_n est aussi intégrable en $+\infty$. Ainsi, a_n est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelle que soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_n : t \mapsto nt$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, par changement de variable, en posant $u = nt = \varphi_n(t)$, on a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}du$ par linéarité de l'intégrale. On pose $g_n : u \mapsto \dfrac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}$ de sorte que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)du$.

(H_1) Comme f est continue en 0, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $g : u \mapsto \dfrac{e^{-u}f(0)}{\sqrt{u}}$.

(H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$, $|g_n(u)| = \dfrac{e^{-u}|f(u/n)|}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{e^{-u}||f||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{\sqrt{u}} = \varphi(u)$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}+^*$ car $\varphi(u) \underset{0}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Big)$ et $\varphi(u) \underset{+\infty}{=} o(e^{-u})$ comme avant.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 2f(0)\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv$ en posant $u = \psi(v) = v^2$ avec ψ bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît l'intégrale de Gauss et on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\sqrt{\pi} \neq 0$ par hypothèse d'où, avec le calcul précédent, que $a_n \underset{+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme en **a.**, on a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}\sin(u/n)}{\sqrt{u}}du$. Pour pouvoir utiliser $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, on écrit plutôt $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}du$. On pose $k_n : u \mapsto \dfrac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}$ de sorte que, dorénavant, on aura $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty} k_n(u)du$.

(H_1) Comme $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, $(k_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $k : u \mapsto \sqrt{u}e^{-u}$.

(H_2) Les fonctions k_n et la fonction k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$, $|k_n(u)| = \dfrac{\sqrt{u}e^{-u}|\sin(u/n)|}{(u/n)} \leqslant \sqrt{u}e^{-u} = \psi(u)$ car il est classique que $\forall t > 0,\ |\sin(t)| \leqslant t$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car ψ se prolonge par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 0$ et que $\psi(u) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(u/2)})$ par croissances comparées.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty} k(u)du$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty}\sqrt{u}e^{-u}du = I$. Par intégration par parties, en posant $a(u) = \sqrt{u}$ et $b(u) = -e^{-u}$, comme a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\lim_{u\to 0^+} a(u)b(u) = \lim_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$, on a

$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après **a.**. Ainsi, si $f = \sin$, $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$.

6.140 **a.** Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $f_{p,q} : x \mapsto x^p \ln^q(x)$ est continue sur $]0; 1]$ et $f_{0,q}(x) = (\ln(x))^q \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_{p,q}(x) = 0$ si $p \geqslant 1$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0; 1]$ donc $I_{p,q}$ existe.

b. Si $q = 0$, alors $I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$. De plus, pour $q \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u : x \mapsto (\ln x)^q$ et $v : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0; 1]$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x)v(x) = 0$ et $u(1)v(1) = 0$. Ainsi, $I_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(x)dx = -\frac{q}{p+1} \int_0^1 (\ln x)^{q-1} x^p dx = -\frac{qI_{p,q-1}}{p+1}$.

Alors, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{p,q} = -\frac{qI_{p,q-1}}{p+1} = \frac{q}{p+1} \times \frac{(q-1)I_{p,q-2}}{p+1} = \cdots = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

c. La fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$ est continue sur $]0; 1]$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$. Ainsi, $\int_0^1 f(x)dx$ existe car f se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0; 1]$. Comme $x^x = e^{x \ln(x)} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p (\ln x)^p}{p!}$ en développant l'exponentielle en série entière, on a $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum\limits_{p=0}^{+\infty} f_{p,p}(x)dx$.

- (H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{p \geqslant 0} \frac{f_{p,p}}{p!}$ converge simplement vers la fonction f sur $]0; 1]$.
- (H_2) Toutes les fonctions $f_{p,p}$ sont continues et intégrables sur $]0; 1]$ (on vient de le voir) et la fonction f est continue sur $]0; 1]$.
- (H_3) Pour $p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}| = \frac{1}{(p+1)^{p+1}}$ d'après **b.** et la série $\sum\limits_{p \geqslant 0} \int_0^1 |\frac{f_{p,p}}{p!}|$ converge par comparaison aux séries de Riemann car $u_p = \frac{1}{(p+1)^{p+1}} \leqslant \frac{1}{p^2}$ dès que $p \geqslant 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0; 1]$ (on le savait déjà) et il vient $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^x dx = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^{p+1}} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^p}$ après changement d'indice.

6.141 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin^n(t)}{t}$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 1$ et $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$ car $f_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^n}{t} = t^{n-1}$. Ainsi, f_n étant maintenant continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

- (H_1) la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (attention à $t = \frac{\pi}{2}$),
- (H_2) les fonctions f_n et la fonction nulle sont continues sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
- (H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, comme $\sin(t) \leqslant t$, on a $|f_n(t)| = \frac{\sin(t)}{t} \times \sin^{n-1}(t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ et la fonction φ est clairement continue et intégrable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} 0.dt = 0$.

c. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leqslant \frac{\sin^{n+1}(t)}{t} \leqslant \frac{\sin^n(t)}{t}$, par positivité et croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et elle tend vers 0 d'après la question précédente. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge.

d. Méthode 1 : comme la fonction $\sin$ est concave sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur cet intervalle, sa courbe est en dessus de ses cordes, et on a donc la minoration suivante $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$. Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2t}{\pi}\right)^n \frac{1}{t} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\pi/2} t^{n-1} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n}$. Comme la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, par minoration, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

Méthode 2 : supposons que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, comme

- (H_1) la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers $S : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t(1-\sin(t))}$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (série géométrique),
- (H_2) les f_n sont continues et intégrables sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ d'après **b.** et la fonction S est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
- (H_3) la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\pi/2} |f_n(t)| dt$ converge par hypothèse

Par le théorème d'intégration terme à terme, S est intégrable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a $\int_0^{\pi/2} S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Or $S(t) = \dfrac{\sin(t)}{t(1-\sin(t)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \dfrac{2}{\pi(1-\sin(t))} = \dfrac{2}{\pi\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)} \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \dfrac{4}{\pi\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}$ car $1-\cos(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ donc S n'est pas intégrable en $\frac{\pi}{2}$ par RIEMANN. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

Méthode 3 : beaucoup plus précis mais pas nécessaire si c'est juste pour répondre à la question de l'énoncé, on peut chercher un équivalent de u_n. On pose $u = \sin^n(t) = \varphi_n(t)$ et φ_n est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $]0; 1]$, ce qui revient à poser $t = \varphi_n^{-1}(u) = \operatorname{Arcsin}(u^{1/n})$ et on a par changement de variable $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \dfrac{u}{\operatorname{Arcsin}(u^{1/n})} \dfrac{u^{(1/n)-1}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} du$. Or $1 - u^{2/n} = 1 - e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n} \ln(u)$ donc on écrit plutôt $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^1 \dfrac{u^{(1/n)}}{\operatorname{Arcsin}(u^{1/n})} \dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}} du$. Soit $g_n :]0; 1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = \dfrac{u^{(1/n)}}{\operatorname{Arcsin}(u^{1/n})} \dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- (H_1) Comme $1 - u^{2/n} = 1 - e^{(2/n)\ln(u)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n} \ln(u)$ et $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arcsin}(u^{1/n}) = \frac{\pi}{2}$, la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{2}{\pi\sqrt{-\ln(u)}}$ sur $]0; 1[$.
- (H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $]0; 1[$.
- (H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]0; 1[$, $\operatorname{Arcsin}(u^{1/n}) \geqslant u^{1/n} > 0$ et $0 < 1 - u^{2/n} = 1 - e^{(2/n)\ln(u)} \leqslant -\frac{2}{n} \ln(u)$ donc $0 < \dfrac{u^{(1/n)}}{\operatorname{Arcsin}(u^{1/n})} \dfrac{\sqrt{-(2/n)\ln(u)}}{\sqrt{1-u^{2/n}}} \leqslant 1$ et $|g_n(u)| \leqslant \varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(u)}}$. Or φ est continue sur $]0; 1[$ où elle est intégrable par RIEMANN car $\lim_{u\to 0^+} \varphi(u) = 0$ et $\varphi(u) \underset{u\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u) du = \int_0^1 g(t) dt = I$. En posant $u = e^{-x} = \psi(x)$, comme ψ est C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0; 1[$, on a $I = \int_{+\infty}^0 \dfrac{2}{\pi\sqrt{-\ln(e^{-x})}} (-e^{-x}) dx$ donc $I = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$. On pose $x = v^2$ et, comme $v \mapsto v^2$ est C^1, strictement croissante et bijective de

$\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $I = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS) donc $I = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi n}}$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

6.142 **a.** • Pour $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.

• Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3} \geqslant 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN.

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ car $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x)} = \dfrac{n^2x}{n^3(1+n^2x)} = \dfrac{(1+n^2x)-1}{n^3(1+n^2x)} = \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{n^3(1+n^2x)}$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que f est aussi croissante sur $\mathbb{R}_+$. Toutes les f_n sont paires donc f l'est aussi. Par parité, f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

c. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme :

(H_1) On a vu en **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ convergeait simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Toutes les $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+n^2x)}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x)^2}$.

(H_3) Soit $a > 0$, $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n'(a) = \dfrac{1}{n(1+n^2a)^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car f_n' est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

Par le théorème, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par parité de f, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.

Étudions la dérivabilité de f à droite en 0, posons donc $\forall x > 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+n^2x)}$.

Comme g est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, g admet une limite finie en 0^+ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$. Supposons par l'absurde que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \ell \geqslant 0$.

Si on note $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(1+k^2x)}$, comme on somme des quantités positives, $\forall n \geqslant 1$, $\forall x > 0$, $g(x) \geqslant S_n(x)$.

Si on fait tendre x vers 0^+ dans cette inégalité, on obtient $\ell \geqslant \lim\limits_{x\to 0^+} S_n(x) = H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (série harmonique) donc l'inégalité $\ell \geqslant H_n$ devient fausse à partir d'un certain rang.

On vient de montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0, donc pas à gauche non plus par parité de f. Mieux, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ donc le graphe de f admet au point $(0,0)$ une tangente verticale.

Questions de cours :

• Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe C^n sur I. Alors pour tout couple $(x,y) \in I^2$, on a $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f_n^{(k)}(y)(x-y)^k}{k!} + \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_y^x (x-t)^{n-1} f_n^{(n)}(t)dt$.

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors pour tout couple $(a,b) \in I^2$ et $y \in [\widetilde{f(a); f(b)}]$, $\exists c \in [\widetilde{a; b}]$, $f(c) = y$.

6.143 **a.** Si $x = 0$, on a $\forall n \geqslant 2$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(0)$ converge.

Si $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx})$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et, comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ converge absolument donc converge. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$. On note $S = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$. Pour aller plus loin, si

$x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = -\infty$ par croissances comparées donc $\mathbb{R}_+$ est bien l'ensemble de définition de S.

b. Soit $n \geqslant 2$, u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{\ln(n)}(1-nx)e^{-nx}$ avec $u_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Ainsi, u_n est positive et atteint son maximum (même en valeur absolue) en $x_n = \dfrac{1}{n}$ et il vaut $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = u_n(x_n) = \dfrac{1}{e n\ln(n)}$. Comme la fonction $f : x \to \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue, décroissante sur $[2;+\infty[$ et admet comme primitive la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$, f n'est pas intégrable ce qui prouve, par comparaison série-intégrale, que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge (les séries de BERTRAND sont hors programme): ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin, comme le défaut de convergence normale est au voisinage de 0, si on prend $a > 0$, alors dès que $n > \dfrac{1}{a}$, on a $\dfrac{1}{n} < a$ donc l'étude précédente de la fonction u_n montre que u_n est décroissante et positive sur $[a;+\infty[$ (on s'éloigne de 0) donc $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et, cette fois-ci, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(a)$ converge ce qui montre la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur $[a;+\infty[$.

c. Soit $x > 0$, $n \geqslant 2$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{xe^{-kx}}{\ln k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)}$ car les deux séries convergent et que $\forall k \geqslant n+1$, $\ln(k) \geqslant \ln(n+1)$. Ainsi : $R_n(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(k-n-1)x}$.
On reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$ donc, comme tous les termes sont strictement positifs dans $R_n(x)$: $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ et ainsi $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ car $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-x}$.
Par conséquent, en posant $\varphi : x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{x}{e^x - 1}$, on a $\forall x > 0$, $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\ln(n+1)}$. Or φ se prolonge par continuité en 0 avec $\varphi(0) = 1$ car $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, par continuité de φ, elle est bornée (par M) sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0$, $0 < R_n(x) \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ (ça marche aussi pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$). Plus précisément, on a même $M = 1$ car on connaît l'inégalité de convexité $\forall x > 0$, $e^x \geqslant 1 + x$ qui équivaut à $e^x - 1 \geqslant x > 0$ donc $\varphi(x) \leqslant 1$ pour $x > 0$. On en déduit que $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{M}{\ln(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{\ln(n+1)} = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
Pour aller plus loin, comme toutes les u_n tendent vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées, en appliquant le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 0 = 0$. Et si on cherche un équivalent de S en $+\infty$, on peut constater que $u_{n+1}(x) \underset{+\infty}{=} o(u_n(x))$ pour tout entier $n \geqslant 2$ donc on peut conjecturer que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x)$. Or $\dfrac{S(x)}{u_2(x)} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$ en posant $v_n(x) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x}$. Or v_n est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ (par exemple) donc $||v_n||_{\infty,[1;+\infty[} = v_n(1) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)} \underset{+\infty}{=} o((e^{-1})^n)$ donc, comme $\sum\limits_{n\geqslant 2} (e^{-1})^n$ converge, on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ sur $[1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v_2(x) = 1$ et que $\forall n \geqslant 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = 0$, on a à nouveau par théorème de la double limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{u_2(x)} = 1 + \sum\limits_{n=3}^{+\infty} 0 = 1$ ce qui prouve que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x) = \dfrac{xe^{-2x}}{\ln(2)}$. De la même manière, on montre que $S(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} u_k(x) \underset{+\infty}{\sim} u_{n+1}(x)$.

6.144 Si $n = 0$, $f_0 : t \mapsto \dfrac{\sin(0.t)}{e^t - 1}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$ existe et $I_0 = 0$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin(n.t)}{e^t - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n$ car

$\sin(nt) \underset{0}{\sim} nt$ et $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$. De plus, $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ donc, par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$ existe.
Pour utiliser l'indication de l'énoncé, on peut penser à poser $t = \dfrac{u}{n} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{n(e^{u/n} - 1)} du$. On constate que $e^{u/n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(u)}{u}$. Mais comme cette fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u}$ n'est pas intégrable, on ne peut pas utiliser directement le théorème de convergence dominée. Il faut d'abord effectuant une intégration par parties en posant $a(u) = 1 - \cos(u)$, $b(u) = \dfrac{1}{n(e^{u/n} - 1)}$ de sorte que a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{u \to +\infty} a(u)b(u) = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0^+} a(u)b(u) = 0$ car $1 - \cos(u) \underset{0}{=} \dfrac{u^2}{2}$ et $n(e^{u/n} - 1) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, on a une nouvelle expression de I_n, à savoir $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n} - 1)^2} du$. Posons, $g_n(u) = \dfrac{(1 - \cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n} - 1)^2}$.

(H_1) Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, comme $n^2(e^{u/n} - 1)^2 \underset{+\infty}{\sim} u^2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{u/n} = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(u) = \dfrac{1 - \cos(u)}{u^2} = g(u)$.
Ainsi, la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{1 - \cos(u)}{u^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les fonctions g_n et la fonction g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(u)| = \dfrac{(1 - \cos(u))e^{u/n}}{n^2(e^{u/n} - 1)^2} = \dfrac{(1 - \cos(u))}{n^2(e^{u/2n} - e^{-u/2n})^2}$ donc on a l'expression $|g_n(u)| = \dfrac{(1 - \cos(u))}{4n^2 \mathrm{sh}\,(u/2n)^2}$. Or sh est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\mathrm{sh}'' = \mathrm{sh} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathrm{sh}\left(\dfrac{u}{2n}\right) \geqslant \dfrac{u}{2n}$.
Ainsi, $|g_n(u)| \leqslant \dfrac{(1 - \cos(u))}{4n^2(u/2n)^2} = g(u)$ et g est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \dfrac{1}{2}$ car $1 - \cos(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$ et $g(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u) du = \int_0^{+\infty} g(u) du$. Or en posant $a(u) = 1 - \cos(u)$ et $b(u) = -\dfrac{1}{u}$, les fonctions a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{\substack{u \to +\infty \\ u \to 0^+}} a(u)b(u) = 0$ car $\dfrac{1 - \cos(u)}{u} \underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$. Par intégration par parties, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} = \frac{\pi}{2}$ d'après l'énoncé (classique intégrale de DIRICHLET). Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt = \frac{\pi}{2}$.

6.145 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{(\ln t)^2}{1 + t^2}$. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, que $f(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées.
De plus, on sait que $\forall t \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1 + t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ (série géométrique). Ainsi, $\forall t \in]0;1[$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{2n} (\ln(t))^2$. Mais que faire pour $t \in [1;+\infty[$? Un changement de variable !
On écrit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} dt$ et on pose $t = \dfrac{1}{u}$ (facile à justifier) dans la seconde intégrale d'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} dt = \int_1^0 \frac{(-\ln u)^2}{1 + (1/u)^2} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} dt$. Ainsi $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} dt$ (on intègre sur $]0;1[$).
Par construction, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$. Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ car $f_0(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et les f_n se prolongent par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ par croissances comparées pour $n \geqslant 1$. Elles se prolongent toutes par continuité en 1 avec $f_n(1) = 0$. De plus, f est continue sur $]0;1[$.

Pour $n \geqslant 0$, $\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 (\ln(t))^2 t^{2n} dt = \frac{2}{(2n+1)^3}$ avec deux intégrations par parties (à faire). Comme $\sum_{n \geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^3}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme nous apprend que f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et que $\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$ donc $I = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sim 3,87$.

Il se trouve que $I = \frac{\pi^3}{8}$ mais c'est une autre histoire.

6.146 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que la fonction somme f est définie sur $\mathbb{R}$.

- (H_1) La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2n^2}$) et la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
- (H_2) Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par opérations.

Par théorème, la fonction f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- (H_1) On vient de voir que $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).
- (H_2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
- (H_3) Soit $a > 0$, posons $J_a =]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$, $\forall x \in J_a$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n'(x)| \leqslant f_n'(a)$ car $|f_n'|$ est paire et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $||f_n'||_{\infty,J_a} = f_n'(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum_{n \geqslant 1} ||f_n'||_{\infty,J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur J_a.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^* = \bigcup_{a>0} J_a$ et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

c. On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geqslant 2$, on a $\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = f_n'(x) \leqslant \int_{n-1}^n g_x(t)dt$. On somme pour $n \in [\![1;p]\!]$ pour l'inégalité de gauche et pour $n \in [\![2;p]\!]$ pour celle de droite et on obtient par Chasles $\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{p} f_n'(x) \leqslant f_1'(x) + \int_1^p g_x(t)dt$. Or, pour tout réel $y \geqslant 1$, on a la relation $\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\right)dt = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_1^y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\right)$ donc $\lim_{y \to +\infty} \int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Par encadrement, on déduit $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ car $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ donc $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$. Pour $x > 0$ par exemple, par le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$, il existe $c_x \in]0;x[$ tel que $\frac{f(x)}{x} = f'(c_x)$ donc, comme $\lim_{x \to 0^+} c_x = 0^+$, on a $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en

0, ni à gauche ni à droite car toutes les f_n étant impaires, la fonction f est aussi impaire.

Pour $x > 0$, comme $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ pour $a > 0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0, par continuité de f en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Comme $f'(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$, on a $f'(t) + \ln(t) \underset{0}{=} o(\ln(t))$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0; \alpha[, |f'(t) + \ln(t)| \leqslant \varepsilon |\ln(t)|$. Ainsi, $\left| \int_0^x (f'(t) + \ln(t))dt \right| \leqslant \varepsilon \int_0^x (-\ln(t))dt$. Il vient donc $\left|f(x) + x\ln(x) - x\right| \leqslant \varepsilon \left|x\ln(x) - x\right|$, ce qui garantit que $f(x) + x\ln(x) - x \underset{0}{=} o(x\ln(x) - x)$, ou encore que $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x) + x$. Mais comme $-x\ln(x) + x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

d. Comme toutes les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$ comme Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f et l'expression de sa dérivée (vue en **b.**) positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

e. On a vu en **b.** que $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Or les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}$. Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

f. La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$. Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm\frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.

$\boxed{\textbf{6.147}}$ Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$.

a. Si $x = 0$, on a $\forall n \geqslant 2$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n \geqslant 2} u_n(0)$ converge.

Si $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx})$ car $\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et, comme la série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$, par comparaison, $\sum_{n \geqslant 2} u_n(x)$ converge absolument.

Si $x < 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = -\infty$ par croissances comparées donc $\sum_{n \geqslant 2} u_n(x)$ diverge.

Ainsi, $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble de définition de f : on a convergence simple de $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $n \geqslant 2$, u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0$, $u_n'(x) = \frac{1}{\ln(n)}(1 - nx)e^{-nx}$ avec $u_n(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$. Ainsi, u_n est positive et atteint son maximum (même en valeur absolue) en $x_n = \frac{1}{n}$ et il vaut $||u_n||_{\infty, \mathbb{R}_+} = u_n(x_n) = \frac{1}{en\ln(n)}$. Comme la fonction $f : x \to \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue, décroissante sur $[2; +\infty[$ et admet comme primitive la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$, f n'est pas intégrable ce qui prouve, par comparaison série-intégrale, que $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge (les séries de BERTRAND sont hors programme): ainsi $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin, comme le défaut de convergence normale est au voisinage de 0, si on prend $a > 0$, alors dès que $n > \frac{1}{a}$, on a $\frac{1}{n} < a$ donc l'étude précédente de la fonction u_n montre que u_n est décroissante et positive sur $[a; +\infty[$ (on s'éloigne de 0) donc $||u_n||_{\infty, [a; +\infty[} = u_n(a)$ et, cette fois-ci, $\sum_{n \geqslant 2} u_n(a)$ converge ce qui montre la convergence normale de $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ sur $[a; +\infty[$.

c. Soit $x>0$, $n\geqslant 2$, $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{xe^{-kx}}{\ln k}\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)}$ car les deux séries convergent et que $\forall k\geqslant n+1,\ \ln(k)\geqslant\ln(n+1)$. Ainsi : $R_n(x)\leqslant\dfrac{x}{\ln(n+1)}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}e^{-kx}=\dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}e^{-(k-n-1)x}$. On reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x}<1$ donc, comme tous les termes sont strictement positifs dans $R_n(x)$: $0<R_n(x)\leqslant\dfrac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ et ainsi $0<R_n(x)\leqslant\dfrac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ car $e^{-(n+1)x}\leqslant e^{-x}$. Par conséquent, en posant $\varphi:x\mapsto\dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{x}{e^x-1}$, on a $\forall x>0,\ 0<R_n(x)\leqslant\dfrac{\varphi(x)}{\ln(n+1)}$. Or φ se prolonge par continuité en 0 avec $\varphi(0)=1$ car $e^x\underset{0}{=}1+x+o(x)$ donc $e^x-1\underset{0}{\sim}x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ par croissances comparées. Ainsi, par continuité de φ, elle est bornée (par M) sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x\geqslant 0,\ 0<R_n(x)\leqslant\dfrac{M}{\ln(n+1)}$ (ça marche aussi pour $x=0$ car $R_n(0)=0$). Plus précisément, on a même $M=1$ car on connaît l'inégalité de convexité $\forall x>0,\ e^x\geqslant 1+x$ qui équivaut à $e^x-1\geqslant x>0$ donc $\varphi(x)\leqslant 1$ pour $x>0$. On en déduit que $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}\leqslant\dfrac{M}{\ln(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M}{\ln(n+1)}=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
Pour aller plus loin, comme toutes les u_n tendent vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées, en appliquant le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x))=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}0=0$. Et si on cherche un équivalent de S en $+\infty$, on peut constater que $u_{n+1}(x)\underset{+\infty}{=}o(u_n(x))$ pour tout entier $n\geqslant 2$ donc on peut conjecturer que $S(x)\underset{+\infty}{\sim}u_2(x)$. Or $\dfrac{S(x)}{u_2(x)}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}e^{-(n-2)x}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}v_n(x)$ en posant $v_n(x)=\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}e^{-(n-2)x}$. Or v_n est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ (par exemple) donc $||v_n||_{\infty,[1;+\infty[}=v_n(1)=\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}e^{-(n-2)}\underset{+\infty}{=}o((e^{-1})^n)$ donc, comme $\sum\limits_{n\geqslant 2}(e^{-1})^n$ converge, on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 2}v_n$ sur $[1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}v_2(x)=1$ et que $\forall n\geqslant 3,\ \lim\limits_{x\to+\infty}v_n(x)=0$, on a à nouveau par théorème de la double limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{u_2(x)}=1+\sum\limits_{n=3}^{+\infty}0=1$ ce qui prouve que $S(x)\underset{+\infty}{\sim}u_2(x)=\dfrac{xe^{-2x}}{\ln(2)}$. De la même manière, on montre que $S(x)-\sum\limits_{k=2}^{n}u_k(x)\underset{+\infty}{\sim}u_{n+1}(x)$.
Il fallait utiliser la CVNTS et la CVU pour le premier exo, mais la consigne était donnée telle qu'elle (pas comme dans l'exercice Bardinet)

6.148 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n:]0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x^{-1/n}\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{-n}$ est positive et continue sur $]0;1]$ et $f_n(x)\underset{0}{\sim}x^{-1/n}$. Par comparaison avec Riemann, $\displaystyle\int_0^1 f_n$ converge si et seulement si $n\geqslant 2$.

(H_1) Pour $x\in]0;1]$, par continuité de l'exponentielle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}x^{-1/n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-\ln(x)/n}=e^0=1$ et $\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{-n}=\exp\Big(-n\ln\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)\Big)$ alors que $\ln\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{-n}=e^{-x}$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers la fonction $f:x\mapsto e^{-x}$.

(H_2) On a vu ci-dessus que les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0;1]$ pour $n\geqslant 2$. De plus, la fonction f est aussi continue sur $]0;1]$.

(H_3) Pour $n\geqslant 2$ et $x\in]0;1]$, on a $0\leqslant x^{-1/n}\leqslant x^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ car $\ln(x)\leqslant 0$. De plus, $0\leqslant\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{-n}\leqslant 1$ donc $|f_n(x)|=f_n(x)\leqslant\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or φ est continue et intégrable sur $]0;1]$ par Riemann.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 x^{-1/n}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)=\int_0^1 f(x)dx$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 x^{-1/n}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n}dx=\int_0^1 e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^1=1-e^{-1}\sim 0,63$.

6.149 **a.** • Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

• Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n|x|} = +\infty$ donc, par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

La suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend toujours vers 0 donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

b. • Pour $n = 0$, on a $f_0(x) = x$ donc la fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est impaire, nulle en 0 et positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}-$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall x > 0,\ f_n'(x) = e^{-\sqrt{nx}} + x\Big(-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{x}}\Big)e^{-\sqrt{nx}} = \dfrac{e^{-\sqrt{nx}}}{2}(2-\sqrt{nx})$ donc f_n atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en $x_n = \dfrac{4}{n}$ et $\underset{x\in\mathbb{R}_+}{\mathrm{Max}}\, f_n(x) = f_n(x_n) = \dfrac{4e^{-2}}{n}$. Par imparité de la fonction f_n, $\underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Max}}\, |f_n(x)| = ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{4e^{-2}}{n}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - 0||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$ donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

c. • Si $x = 0$, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge.

• Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n|x|}} = 0$ donc $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Le domaine de définition D de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ vaut $D = \mathbb{R}$ et on a convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ pour tout réel x.

d. On a vu en question que $\forall n \geqslant 1,\ ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{4e^{-2}}{n}$ donc, par RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ car la série harmonique diverge, et encore moins $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ car f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

e. Soit $a > 0$, d'après l'étude de f_n faite en **b.**, dès que $\dfrac{4}{n} \leqslant a$ et toujours par imparité de f_n, on a $||f_n||_{\infty,I_a} = f_n(a)$. Or on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(a)$ converge d'après **c.**. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I_a, à fortiori uniformément. Si on rajoute f_0 qui n'est pas bornée sur I_a, on n'a plus convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur I_a ; par contre on conserve la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur I_a car ceci concerne les restes.

6.150 **a.** Soit un réel $x \in \mathbb{R}_+$. Traitons deux cas :

• Si $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(0) = 0$ donc $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

• Si $x > 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-nx} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha (e^{-x})^n = 0$ car $|e^{-x}| < 1$. Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : x \to x$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $n \geqslant 1$, la fonction $g_n = f_n - f : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n'(x) = n^\alpha(1-nx)e^{-nx}$ donc g_n est croissante sur $\Big[0;\dfrac{1}{n}\Big]$ et décroissante sur $\Big[\dfrac{1}{n};+\infty\Big[$ avec $g_n(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}_+} = g_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = 0$ si et seulement si $\alpha < 1$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha < 1$.

c. Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f, elle converge aussi uniformément vers f sur le segment $[0;1]$. Comme toutes les f_n sont continues sur $[0;1]$, par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x dx = \dfrac{1}{2}$.

On pouvait aussi calculer directement $I_n = \displaystyle\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$ car, par linéarité de l'intégrale, on obtient $I_n = \displaystyle\int_0^1 x dx + \sqrt{n}\int_0^1 x e^{-nx} dx = \dfrac{1}{2} + \sqrt{n}\Big(\Big[-\dfrac{xe^{-nx}}{n}\Big]_0^1 + \dfrac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx\Big) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1-e^{-n}}{n\sqrt{n}}$ en posant

$u(x) = x$ et $v(x) = -\dfrac{e^{-nx}}{n}$, u et v étant de classe C^1 sur $[0;1]$. Par croissances comparées, on a à nouveau la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx = \frac{1}{2}$.

d. Comme à la question précédente, on peut calculer cette intégrale $J_n = \int_0^1 x(1 + n\sqrt{n}e^{-nx})dx$ qui existe car f_n (pour $\alpha = \frac{3}{2}$) est continue sur le segment $[0;1]$. Puisque $u : x \mapsto$ et $v : x \mapsto$ sont de classe C^1 sur $[0;1]$, par intégration par parties, on a $J_n = \frac{1}{2} + n\sqrt{n}\Big(\Big[-\frac{xe^{-nx}}{n}\Big]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx\Big) = \frac{1}{2} - \sqrt{n}e^{-n} + \frac{1 - e^{-n}}{\sqrt{n}}$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 (\lim\limits_{n \to +\infty} f_n) = \frac{1}{2}$ même en l'absence de convergence uniforme.

6.151 **a.** Avec la condition de l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $\left|\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{c|x|}{2^n}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{c|x|}{2^n}$ converge donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge absolument donc converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n : x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$, avec la même majoration, comme $|x| \leqslant a$ pour $x \in I$, on a $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \frac{ca}{2^n}$ et la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{ca}{2^n}$ converge comme avant donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement sur I. Or les u_n sont continues sur I par hypothèse donc, d'après le cours, S est continue sur I.
b. D'après l'hypothèse, comme $0 \in I$, on a $|\varphi(0)| \leqslant c|0| = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $S(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi(0) = 0$. De plus, d'après **a.**, S est continue sur I. Enfin, pour $x \in I$, $S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \varphi(x)$ après simplification. Par conséquent, S est solution de (P).
c. Méthode 1 : soit f une fonction vérifiant (P) et $x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{2^k} \in I$ donc $f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$.
En sommant pour $k \in [\![0;n]\!]$, on obtient, après télescopage, $f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$ (R). Comme f est continue en 0, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(0) = 0$ donc, en passant à la limite dans (R), on a finalement $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = S(x)$ ce qui assure l'unicité.

Méthode 2 : soit S_1 et S_2 deux solutions de (P). Posons $d = S_1 - S_2$, alors d est continue sur I par opérations, $d(0) = S_1(0) - S_2(0) = 0$ et $\forall x \in I$, $d(x) - d\left(\frac{x}{2}\right) = S_1(x) - S_1\left(\frac{x}{2}\right) - S_2(x) + S_2\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$. Soit $x \in I$, en itérant la relation $d(x) = d\left(\frac{x}{2}\right)$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x) = d\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
Comme d est continue en 0, en passant à la limite dans cette relation, on a donc $d(x) = d(0)$ donc d est constante. Mais comme on a vu que $d(0) = 0$, la fonction d est nulle sur I.
Ainsi, la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle ce qui assure l'unicité.

d. Comme S est solution de (P) avec la question **b.** et que deux solutions de (P) sont égales d'après la question **c.**, on en déduit que S est la seule solution de (P).

e. Supposons φ de classe C^1 sur I. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- D'après **a.**, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement (même normalement) sur I.
- Toutes les u_n sont de classe C^1 sur I car φ l'est.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $u_n'(x) = \frac{1}{2^n}\varphi'\left(\frac{x}{2^n}\right)$ or φ' est continue sur le segment I donc elle y est

bornée et on peut définir $M = ||\varphi'||_{\infty,I}$. On a donc $\forall x \in I,\ |u_n'(x)| \leqslant \frac{M}{2^n}$ donc u_n' est bornée sur I, $||u_n'||_{\infty,I} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{M}{2^n}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur I.

Si on suppose φ de classe C^1 sur I, alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est aussi de classe C^1 sur I.

6.152 **a.** La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\text{sh}\,(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\text{sh}\,(x) \underset{0}{\sim} x$ et on a $\text{sh}\,(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées ce qui montre que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, I existe.

b. Si $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{\text{sh}\,(x)} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} = 2xe^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-2x})^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}$ car $0 < e^{-2x} < 1$ (série géométrique). Soit, pour $n \geqslant 0$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 2xe^{-(2n+1)x}$.

- (H_1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on en vient).
- (H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) Pour $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto 2x$ et $v : x \mapsto -\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = u(0)v(0) = 0$, comme f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \Big[-2\frac{e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2}$ converge par Riemann.

Par théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et on a la valeur de I car $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}$.

c. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Or $S_{2n+1} = \sum\limits_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{2n+1}\frac{1}{k^2} + \sum\limits_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{2n+1}\frac{1}{k^2} = \frac{S_n}{4} + T_n$. Ainsi, $T_n = S_{2n+1} - \frac{S_n}{4}$ admet une limite finie en $+\infty$ (on le savait déjà) qui vaut $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$. Avec la question précédente, $I = \frac{\pi^2}{4} \sim 2,47$.

6.153 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3+x^2}$ $(n^3 + x^2 > 0)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3+x^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$ car $\cos$ est bornée. Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument donc converge et f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème adéquat :

- (H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (vu en **a.**).
- (H_2) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations et $u_n'(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^3+x^2} - \frac{2x\cos(nx)}{(n^3+x^2)^2}$.
- (H_3) Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [-a;a]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{|\sin(nx)|}{n^3+x^2} + \frac{2x|\cos(nx)|}{(n^3+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{n^3} + \frac{2a}{n^6} = a_n$ donc $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant a_n$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge par comparaison aux séries de Riemann donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $[-a;a]$.

Par un théorème du cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin(nx)}{n^3+x^2} + \frac{2x\cos(nx)}{(n^3+x^2)^2}\right)$.

6.154 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{n^2+t^2}$. Traitons deux cas :

- si $t < 0$, comme $n^2 \underset{+\infty}{=} o(e^{-nt})$ par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} u_n(t) = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$ diverge.
- si $t \geqslant 0$, $e^{-nt} \underset{+\infty}{=} O(1)$ donc $u_n(t) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$ converge par comparaison à RIEMANN.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc u_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on a $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = u_n(0) = \frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, d'après le cours, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Comme $\lim_{t\to+\infty} u_n(t) = \ell_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème de la double limite, on a $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

Comme $u_{n+1}(t) \underset{+\infty}{=} o(u_n(t))$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut conjecturer que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} u_1(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t^2}$.

Posons $g(t) = \frac{f(t)}{u_1(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+t^2}{n^2+t^2}e^{-(n-1)t}$ de sorte que $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = \frac{1+t^2}{n^2+t^2}e^{-(n-1)t}$. La fonction $g_1 : t \mapsto 1$ est bornée sur $[1;+\infty[$ avec $||g_1||_{\infty,[1;+\infty[} = 1 = e^{-(1-1)}$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $|g_n(t)| = g_n(t) \leqslant e^{-(n-1)t} \leqslant e^{-(n-1)}$ donc g_n est bornée sur $[1;+\infty[$ et $||g_n||_{\infty,[1;+\infty[} \leqslant e^{-(n-1)}$ et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} e^{-(n-1)}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$. De plus, $\lim_{t\to+\infty} g_1(t) = 1 = \ell'_1$ et, pour $n \geqslant 2$, $\lim_{t\to+\infty} g_n(t) = 0 = \ell'_n$. Par le théorème de double limite à nouveau, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ell'_n = 1$. On a donc bien $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{u_1(t)} = 1$ donc $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t^2}$.

6.155 **a.** Soit $x \in [0;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = 0$ donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge.
- Si $x \in]0;1]$, comme $\frac{1}{1+x} \in]0;1[$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+x)^n}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

On a donc montré la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

b. La fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie d'après **a.** et on a $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$. Si $x \in]0;1]$, $f(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n = x \times \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = 1+x$. Ainsi, f n'est pas continue en 0 car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$ alors que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0;1]$. Par la contraposée d'un théorème du cours, on ne peut pas avoir convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = \ell_n$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\ell_n = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, d'après la contraposée du théorème de la double limite, il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $]0;1]$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^1 f_n(x)dx$ existe.

• Pour les petites valeurs de n, on calcule facilement $\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, puis $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = 1 - \ln(2)$ et enfin, pour $n = 2$, on arrive à $\int_0^1 f_2(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

• Pour $n \geqslant 3$, $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1+x-1}{(1+x)^n}\right)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^{n-1}} - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^n}$ et, classiquement, $\int_0^1 f_n(x)dx = \left[-\frac{1}{(n-2)(1+x)^{n-2}}\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{(n-1)(1+x)^{n-1}}\right]_0^1 = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{2^{1-n}}{n-1} - \frac{2^{2-n}}{n-2}$ qui se factorise en $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{n2^{1-n}}{(n-2)(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $[0;1]$.

(H_2) Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0;1]$ car elles y sont continues.

(H_3) La fonction f est continue par morceaux sur $[0;1]$ d'après **a.**.

(H_4) La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n(x)|dx$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car f_n est positive donc $|f_n(x)| = f_n(x)$ et, avec les calculs précédents, $\int_0^1 f_n(x)dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

D'après le fameux théorème, f est intégrable sur $[0;1]$ (on le savait déjà) et $\int_0^1 f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ ce qui donne, puisque $\int_0^1 f(x)dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$, la valeur $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{3}{2}$.

On pouvait le calculer par télescopage (dualité suite-série) car $\int_0^1 f_0(x)dx + \int_0^1 f_1(x)dx + \int_0^1 f_2(x)dx = 1$ car $\frac{1}{2} + 1 - \ln(2) + \ln(2) - \frac{1}{2} = 1$ et $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} - \left(\frac{2^{2-n}}{n-2} - \frac{2^{1-n}}{n-1}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{1-n}}{n-1} = 0$.

Ainsi, on a à nouveau $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f_0(x)dx + \int_0^1 f_1(x)dx + \int_0^1 f_2(x)dx + \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

6.156 **a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Or $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^{3/2}}$ donc f_n est intégrable que $[1;+\infty[$ d'après RIEMANN car $\frac{3}{2} > 1$. De plus, $f_0(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et, pour $n \geqslant 1$, $f_n(x) \underset{0}{\sim} \frac{\mathrm{Arctan}(n)}{n\sqrt{x}}$ donc f_n est intégrable sur $]0;1]$ d'après RIEMANN car $\frac{1}{2} < 1$. Ainsi, la fonction f_n est intégrable sur I et la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est donc bien définie.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) Pour $x > 0$, on a l'inégalité $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2n\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ par encadrement. La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc simplement sur I vers la fonction nulle, notée f.

(H_2) Toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur I.

(H_3) Puisque $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x$ (par le théorème des accroissements finis par exemple car $\exists c \in]0;x[,\ \mathrm{Arctan}(x) = \frac{1}{1+c^2}x$ ou par une petite étude de fonctions), on a $\forall x \in]0;1],\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$. Mais $\mathrm{Arctan}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $n + x \geqslant x$ donc $\forall x > 1,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2x\sqrt{x}}$. Ainsi, en posant $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$

définie par $\forall x \in]0;1]$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\forall x > 1$, $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2x\sqrt{x}}$, alors φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme avant) et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$, $g_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$ et $g_n(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$ existe. En effectuant le changement de variable $x = u^2 = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on trouve $v_n = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{n+u^2} = 2\Big[\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

d. <u>Méthode 1</u> : par croissance de Arctan sur $[n;+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Arctan}(n) \leqslant \mathrm{Arctan}(n+x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $\mathrm{Arctan}(n)v_n \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi v_n}{2}$. Comme $\mathrm{Arctan}(n)v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi v_n}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$, par encadrement, on a $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

<u>Méthode 2</u> : La relation $\forall x > 0$, $\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + \mathrm{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ se montre avec $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + \mathrm{Arctan}(x)$, en constatant que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\psi'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{1+x^2} = 0$, ce qui prouve que φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et vaut $\varphi(1) = 2\,\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{n+x}\Big)\Big)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} - \int_0^{+\infty}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{n+x}\Big)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$.

Par croissance de la fonction Arctan, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{n+x}\Big)\frac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} \leqslant \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{n}\Big)v_n$. Ainsi, $I_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi v_n}{2} + o(v_n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = 0$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi v_n}{2} = \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

6.157 **a.** Si $x = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, le terme $\dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ n'est pas défini donc $D \subset \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, en posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ et la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}$ converge donc par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge absolument donc converge. Ainsi, $D = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$.

b. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions pour $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n$ sur $[-n_0;+\infty[$:

- (H_1) On a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n$ sur $[-n_0;+\infty[$ car toutes les fonctions f_n pour $n \geqslant n_0+1$ sont définies sur cet intervalle, la convergence ayant été vue en **a.**.
- (H_2) Toutes les fonctions f_n pour $n \geqslant n_0+1$ sont C^∞ sur $[-n_0;+\infty[$ car ce sont des fonctions rationnelles et, par récurrence simple, $\forall n \geqslant n_0+1$, $\forall x \geqslant -n_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} \times \dfrac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$.
- (H_3) $\forall n \geqslant n_0+1$, $\forall x \in [-n_0;+\infty[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_n^{(k)}(x)| = \dfrac{k!}{n!(n+x)^{k+1}} \leqslant \dfrac{k!}{n!}$ donc $f_n^{(k)}$ est bornée sur $[-n_0;+\infty[$ et $||f_n^{(k)}||_{\infty,[-n_0;+\infty[} \leqslant \dfrac{k!}{n!}$. Or la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1}\dfrac{1}{n!}$ converge ($k!$ est une constante) donc $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[-n_0;+\infty[$.

Par un théorème du cours, la fonction $R_{n_0} : x \mapsto \sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n(x)$ est de classe C^∞ sur $[-n_0;+\infty[$. Or $f = R_{n_0} + \sum\limits_{n=0}^{n_0} f_n$ et toutes les fonctions f_n pour $n \leqslant n_0$ sont de classe C^∞ sur D car rationnelles donc, par somme, f est de classe C^∞ sur $[-n_0;+\infty[\cap D$.

Puisque ceci est vrai pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}$, la fonction f est bien de classe C^∞ sur D.

c. Pour $x \in D$, on a $x+1 \in D$ et, en posant $p = n+1$ dans l'expression de $f(x+1)$, on obtient la relation $xf(x) - f(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x}{n!(n+x)} - \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!(p+x)}$ donc $xf(x) - f(x+1) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = \dfrac{1}{e}$.

d. <u>En 0^+</u> : comme f est continue en 1 d'après **b.**, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1) = f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{e}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = \dfrac{1}{e} + 1 - \dfrac{1}{e} = 1$. Par conséquent, $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

<u>En $+\infty$</u> : comme $|f_n|$ est décroissante et positive sur $[1;+\infty[$, on a $||f_n||_{\infty,[1;+\infty[} = |f_n(1)| = \dfrac{1}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$. Ainsi, par le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = 0$. Avec **c.**, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \dfrac{1}{e}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{ex}$.

e. Soit $g_x :]0;1] \to \mathbb{R}$ défini par $g_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$. La fonction g_x est continue sur $]0;1]$ et $g_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc g_x est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $1-x<1$. On connaît le développement en série entière de $\exp$, à savoir $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{n!}$ donc $g_x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $h_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(t) = \dfrac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$.

- (H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} h_n$ converge simplement vers g_x sur $]0;1]$ (on en vient).
- (H_2) Les h_n sont continues et intégrables par Riemann sur $]0;1]$ car $h_n(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x-n}}$ et $1-x-n<1$.
- (H_3) La fonction g_x est continue sur $]0;1]$.
- (H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |h_n(t)|dt = \int_0^1 \frac{t^{n+x-1}}{n!}dt = \frac{1}{n!}\Big[\frac{t^{n+x}}{n+x}\Big]_0^1 = \frac{1}{n!(n+x)}$ car $n+x>0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!(n+x)}$ converge d'après la question **a.**.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a g_x intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 h_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} = f(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

6.158 **a.** • <u>Si $x \leqslant 0$</u>, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement.

Par contre, <u>si $x > 0$</u>, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge par le critère spécial des séries alternées. Ainsi, le domaine de définition de η est $\mathbb{R}_+^*$.

• <u>Si $x \leqslant 0$</u>, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ diverge grossièrement. Par contre, si on a $x>0$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ étant décroissante et continue sur $[1;+\infty[$, $\forall n \geqslant 2$, $f_x(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f_x(t)dt$ (1) et $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f_x(t)dt \leqslant f_x(n)$ (2). Traitons deux cas :

<u>Si $x > 1$</u> , en sommant les inégalités (1) pour $k \in [\![2;n]\!]$ et par Chasles, on obtient la majoration $S_n = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} f_x(k) \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n f_x(t)dt = 1 + \Big[\frac{t^{1-x}}{1-x}\Big]_1^n = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$ (comparaison série-intégrale). Comme la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ des sommes partielles de cette série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ est bornée, on sait d'après le cours que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ converge.

Si $x \leqslant 1$, en sommant les inégalités (2) pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par Chasles, on obtient la minoration $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{n} f_x(k) \geqslant \int_1^{n+1} f_x(t)dt \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$ car $x \in]0;1]$ donc $S_n \geqslant \ln(n+1)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par minoration, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ diverge.

Ainsi, le domaine de définition de ζ est $]1;+\infty[$.

b. Pour $x > 1$, posons les deux sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} - 2 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^x}$ (séparer termes d'indices pairs et impairs). Ainsi, $S'_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2^{x-1}} S_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette relation, comme les deux séries convergent d'après **a.**, $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ car $\lim_{n\to+\infty} S'_{2n} = \theta(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \zeta(x)$ (suite extraite).

c. Pour $n \geqslant 1$, posons $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ de sorte que $\forall x > 0,\ \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

(H_1) $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement vers η sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **a.**.

(H_2) Toutes les fonctions g_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $g'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^x}$ et $|g'_n|$ est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $a > 0$, on a $||g'_n||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{\ln(n)}{n^a}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ ne converge pas si $a \leqslant 1$ donc la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} g'_n$ n'est pas assurée et on va passer par la convergence uniforme.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n(x)$ est alternée pour $x > 0$, on s'intéresse à la décroissance de la suite $(|g'_n(x)|)_{n\geqslant 1}$, au moins à partir d'un certain rang. Posons $h_x : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'_x(t) = \frac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$. Ainsi, h_x est décroissante sur $[e^{1/x};+\infty[$, donc notamment sur $[e^{1/a};+\infty[$ car $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{x}$. Ainsi, dès que $n \geqslant e^{1/a}$, $h_x(n) = |g'_n(x)| \geqslant |g'_{n+1}(x)| = h_x(n+1)$ donc la suite $(|g'_n(x)|)_{n\geqslant \lfloor e^{1/a}+1\rfloor}$ est décroissante et tend vers 0 par croissances comparées. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n(x)$ converge et on peut donc définir sa fonction reste d'ordre n, $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1} g'_k(x)$. Pour $n \geqslant e^{1/a}$, le critère spécial montre aussi que l'on a $|R_n(x)| \leqslant |g'_{n+1}(x)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Ainsi, la fonction R_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et on a $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$ par croissances comparées toujours, la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, η est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ \eta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^x}$.

d. Pour $n \geqslant 1$, posons $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont la somme vaut $\eta(1)$. Alors $S'_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \Big(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j t^j \Big) dt$ par linéarité de l'intégrale. Comme $\forall t \in [0;1]$, $\sum_{j=0}^{n-1} (-t)^j = \frac{1 - (-t)^n}{1+t}$, on a $\left| S'_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1+t} dt \right| \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ car

$\forall t \in [0;1],\ \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$. Par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \eta(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Or $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln(2)} \underset{1}{=} 1 - (1 + (1-x)\ln(2) + o(1-x)) \underset{1}{\sim} (x-1)\ln(2)$ donc, par continuité de η en 1, $\zeta(x) = \dfrac{\eta(x)}{1-2^{1-x}} \underset{1^+}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{(1-x)\ln(2)} = \dfrac{1}{1-x}$ et on a déjà $\zeta(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$ donc $a = 1$.

Pour avoir b, il nous faudrait le développement limité de η en 1 à l'ordre 1 et pas seulement 0 donc la valeur de $\eta'(1)$. Pour $n \geqslant 1$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$ de sorte que $\eta'(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ d'après **c.**. Or, en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans $T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$, on obtient $T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$ donc, comme $\ln(2k) = \ln(2) + \ln(k)$, on a $T_{2n} = \ln(2)H_n + U_n - U_{2n}$ en posant $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$. Or la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est dérivable et décroissante sur $[e;+\infty[$ car $\forall t > 1,\ f'(t) = \dfrac{1-\ln(t)}{t^2}$. Ainsi, par comparaison série-intégrale, on a $\forall k \geqslant 4,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)dt \geqslant f(k)$ (1) et $\forall k \geqslant 3,\ \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$ (2). Pour $n \geqslant 4$, on somme (1) pour $k \in [\![4;n]\!]$ et, par CHASLES, $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}dt \geqslant U_n - f(2) - f(3)$ et on somme (2) pour $k \in [\![3;n]\!]$ pour avoir $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant U_n - f(2)$. Ainsi, $\dfrac{\ln(2)}{2} + \left[\dfrac{\ln^2(t)}{2}\right]_3^{n+1} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{2} + \dfrac{\ln(3)}{3} + \left[\dfrac{\ln^2(t)}{2}\right]_4^{n}$. Comme on a $\dfrac{\ln^2(n+1)}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2}$, par encadrement, on a donc $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2}$.

De plus, en posant $a_n = U_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$ pour $n \geqslant 1$, on a $\forall n \geqslant 2,\ a_n - a_{n-1} = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln^2(n)}{2} + \dfrac{\ln^2(n-1)}{2}$ donc $a_n - a_{n-1} = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln^2(n)}{2} + \dfrac{\left(\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2}{2} = \dfrac{\ln(n)}{n} + \ln(n)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et on arrive à $a_n - a_{n-1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{\ln(n)}{n} + \ln(n)\left(-\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ ce qui montre par comparaison aux séries de RIEMANN que $\sum\limits_{n\geqslant 2} (a_n - a_{n-1})$ converge donc que, par dualité suite-série, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge, notons $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ de sorte que $U_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{\ln^2(n)}{2} + \alpha + o(1)$.

Par conséquent, $T_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)\big(\ln(n) + \gamma + o(1)\big) + \dfrac{\ln^2(n)}{2} + \alpha + o(1) - \dfrac{\ln^2(2n)}{2} - \alpha + o(1)$ dont on déduit que $T_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)\ln(n) + \gamma\ln(2) - \dfrac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(n) + o(1)$ car $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$ et on a enfin la valeur $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{2n} = \gamma\ln(2) - \dfrac{\ln^2(2)}{2} = \eta'(1)$.

Comme $\forall x > 1,\ \zeta(x) = \dfrac{\eta(x)}{1 - 2^{1-x}}$, la connaissance locale du numérateur et du dénominateur au voisinage de 1^+ va nous donner les valeurs de a et b. En effet, $\eta(x) = \eta(1) + \eta'(1)(x-1) + o\big((x-1)\big)$ par le théorème de TAYLOR-YOUNG car η est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln(2)}$ donc $1 - 2^{1-x} \underset{1}{=} 1 - \left(1 + \ln(2)(1-x) + \dfrac{\ln^2(2)}{2}(1-x)^2 + o\big((1-x)^2\big)\right) \underset{1}{=} \ln(2)(x-1) - \dfrac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$

puis $\zeta(x) \underset{1^+}{=} \dfrac{\ln(2)+\left(\gamma\ln(2)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}\right)(x-1)+o(x-1)}{\ln(2)(x-1)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)} \underset{1^+}{=} \dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1+\left(\gamma-\dfrac{\ln(2)}{2}\right)(x-1)+o(x-1)}{1-\dfrac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)}$. Or

il vient $\dfrac{1+\left(\gamma-\dfrac{\ln(2)}{2}\right)(x-1)+o(x-1)}{1-\dfrac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)} \underset{1^+}{=} \left(1+\left(\gamma-\dfrac{\ln(2)}{2}\right)(x-1)+o(x-1)\right)\times\left(1+\dfrac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)\right)$

et on a enfin $\zeta(x) \underset{1^+}{=} \dfrac{1}{x-1}\big(1+\gamma(x-1)+o(x-1)\big) \underset{1^+}{=} \dfrac{1}{x-1}+\gamma+o(1)$ donc $a=1$ (on le savait) et $b=\gamma$.

6.159 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ donc f est intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, f est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$ car $f(x) \underset{1^-}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ car $\ln(x) \underset{1}{\sim} x-1$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=0$. Comme on a le développement en série entière $\forall x \in]0;1[$, $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$, il vient, avec $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par avec $f_n(x) = -\dfrac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$, la relation $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Le fonctions f_n sont continues sur $]0;1]$ et, comme $f_1(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ par croissances comparées donc que f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ en posant $f_n(0)=0$ si $n \geqslant 2$, les fonctions f_n sont intégrables sur $]0;1]$.

D'abord, en posant $u(x)=x^n$ et $v(x)=\ln(x)$, les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geqslant 1$ donc, par intégration par parties, on obtient la relation $\displaystyle\int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^n\ln x}{n^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n^2}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n^3}$ si $n \geqslant 1$.

<u>Méthode 1</u> : par linéarité de l'intégrale, comme la fonction $f_1 : x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0;1]$, et donc $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = f - f_1$ aussi d'après ce qui précède, on a $I = \displaystyle\int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Pour $n \geqslant 2$, f_n est continue sur $[0;1]$ en posant $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=0$. De plus, f_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $f_n'(x) = -\dfrac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x)+x^{n-2}\Big)$ donc, avec le tableau de variations de f_n, on trouve $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\left(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\right) = \dfrac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n^2}$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ par RIEMANN. Par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ sur le segment $[0;1]$, d'après le cours, $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3)-1$. Comme $\displaystyle\int_0^1 f_1 = 1$, on obtient la valeur $I = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

<u>Méthode 2</u> : utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

- (H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ (on en vient).
- (H_2) Les f_n sont continues et intégrables (déjà vu).
- (H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.
- (H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^3}$ converge.

Par le fameux théorème, on conclut que f est intégrable sur $]0;1]$[(on le savait déjà) et surtout la relation $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1,202$.

6.160 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$: f est définie sur $\mathbb{R}$. La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2n^2}$) et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\pi}{2n^2}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par théorème, la fonction somme f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- (H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).
- (H_2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
- (H_3) Soit $a > 0$, posons $J_a =]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$, on a $\forall x \in J_a$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n'(x)| \leqslant f_n'(a)$ donc $||f_n'||_{\infty,J_a} = f_n'(a) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n'||_{\infty,J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur J_a.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

c. On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = f_n'(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(t)dt$. On somme pour n allant de 1 à p pour l'inégalité de gauche et pour n allant de 2 à p pour celle de droite et on obtient par CHASLES $\displaystyle\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{p} f_n'(x) \leqslant f_1'(x) + \int_1^p g_x(t)dt$. Or, pour $y \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \Big(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\Big)dt = \Big[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\Big]_1^y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\Big)$ donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Par encadrement, on en déduit l'équivalent $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Pour $x > 0$ par exemple, par le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$, il existe $c_x \in]0;x[$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} = f'(c_x)$ donc, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0^+$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0, ni à gauche ni à droite car toutes les f_n étant impaires, la fonction f est aussi impaire.

Pour $x > 0$, comme $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$ pour $a > 0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0, par continuité de f en 0, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$. Comme $f'(t) \underset{0}{\sim} -\ln((t)$, on a $f'(t) + \ln(t) \underset{0}{=} o(\ln(t))$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha[, |f'(t) + \ln(t)| \leqslant \varepsilon|\ln(t)|$. Ainsi, $\Big|\displaystyle\int_0^x (f'(t)+\ln(t))dt\Big| \leqslant \varepsilon \int_0^x (-\ln(t))dt$. Il vient donc $\big|f(x)+x\ln(x)-x\big| \leqslant \varepsilon\big|x\ln(x)-x\big|$, ce qui garantit que $f(x) + x\ln(x) - x \underset{0}{=} o(x\ln(x) - x)$, ou encore que $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x) + x$. Mais comme $-x\ln(x) + x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

d. Comme toutes les f_n sont croissantes comme la fonction Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée positive vue en **b.**.

e. On a vu en **b.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Or les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}$. Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

f. La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$. Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm\frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.

6.161 **a.** Pour $n \geqslant 2$, la fonction $g_n : x \mapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)^n$ est continue sur le segment $[2,n]$ donc v_n existe. Dans l'intégrale v_n, on pose $x = nt = \varphi_n(t)$ avec $\varphi_n : [2/n;1] \to [2;n]$ de classe C^1 donc, par changement de variable et par linéarité de l'intégrale, on a $v_n = n\int_{2/n}^1 \left(1-\frac{1}{nt}\right)^n dt$. Ainsi, $v_n = n\int_0^1 f_n(t)dt$ avec $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = 0$ si $t \in \left]0;\frac{2}{n}\right[$ et $f_n(t) = \left(1-\frac{1}{nt}\right)^n$ pour $t \in \left[\frac{2}{n};1\right]$.

(H_1) Pour $t \in]0;1]$, comme $\forall n \geqslant \frac{2}{t}$, $f_n(t) = \left(1-\frac{1}{nt}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{nt}\right)\right)$, et puisque l'on a $\ln\left(1-\frac{1}{nt}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{nt}$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-1/t} = f(t)$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers f sur $]0;1]$.

(H_2) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0;1]$ et f est continue sur $]0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 2$, $\forall t \in]0;1]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f(t)$ car $\ln$ est concave donc si $t \geqslant \frac{2}{n}$, $\ln\left(1-\frac{1}{nt}\right) \geqslant -\frac{1}{nt}$. De plus, f est continue et intégrable sur $]0;1]$ car f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{t}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$. Ainsi, comme $v_n = n\int_0^1 f_n(t)dt$, il vient $v_n \underset{+\infty}{\sim} n\int_0^1 e^{-1/t}dt$ car $\int_0^1 f(t)dt > 0$ puisque f est positive, continue et non nulle sur $]0;1]$.

b. Pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} g_n(k+1)$. Or, la fonction dérivable g_n est croissante sur $[1;n+1]$ car $g_n'(x) = \frac{n}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n-1} > 0$ donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\int_k^{k+1} g_n(t)dt \leqslant g_n(k+1)$ (1). On somme les inégalités (1) pour $k \in [\![2;n-1]\!]$ pour avoir $\int_2^n g_n(t)dt = v_n \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n-1} g_n(k+1) = u_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. De même, on a $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $g_n(k+1) \leqslant \int_{k+1}^{k+2} g_n(t)dt$ (2) et, en sommant (2) pour $k \in [\![1;n-2]\!]$, on obtient l'inégalité $\sum\limits_{k=1}^{n-2} g_n(k+1) = u_n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant v_n = \int_2^n g_n(t)dt$.

Par conséquent, on a l'encadrement $v_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant u_n \leqslant v_n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ et, comme $v_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{+\infty}{=} v_n + O(1) \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{+\infty}{=} v_n + O(1) \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \underset{+\infty}{\sim} n \int_0^1 e^{-1/t} dt$.

6.162 **a.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \varphi(x+n) + \varphi(x-n)$.

(H_1) Toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par somme et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ puisque φ est supposée continue sur $\mathbb{R}$ dans l'énoncé.

(H_2) Soit $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions u_n étant continues sur le segment $[-a;a]$, elles y sont bornées. Dès que $n \geqslant a$, d'après l'hypothèse, $n+x \geqslant n-a \geqslant 0$ et $x-n \leqslant -(n-a) \leqslant 0$ pour $x \in [-a;a]$, alors $|\varphi(x+n)| \leqslant \dfrac{C}{1+(x+n)^2} \leqslant \dfrac{C}{1+(n-a)^2}$ et $|\varphi(x-n)| \leqslant \dfrac{C}{1+(x-n)^2} \leqslant \dfrac{C}{1+(n-a)^2}$ donc, par inégalité triangulaire, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{2C}{1+(n-a)^2}$ ce qui prouve que $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{2C}{1+(n-a)^2}$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2C}{1+(n-a)^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\dfrac{2C}{1+(n-a)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2C}{n^2}$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-a;a]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x) - \varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par somme car φ est elle-même continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x+1 \in \mathbb{R}$ et $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\varphi(x+n+1) + \varphi(x-(n-1))\big)$ donc, puisque les deux séries convergent d'après la question précédente, on a $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+n+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi(x-(n-1)$ d'où, en posant $m = n+1$ et $p = n-1$, $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum\limits_{m=2}^{+\infty} \varphi(x+m) + \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \varphi(x-p)$. On obtient donc $f(x+1) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \varphi(x+m) + \varphi(x) + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \varphi(x-p) = \varphi(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+n) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi(x-n) = f(x)$ donc la fonction f est bien 1-périodique sur $\mathbb{R}$ comme attendu.

c. Comme g est continue sur le segment $[-1;1]$, d'après le théorème des bornes atteintes, g est bornée sur $[-1;1]$ et on peut poser $||g||_{\infty,[-1;1]} = M$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(x - \lfloor x \rfloor)$ car $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et que g est 1-périodique donc $|g(x)| \leqslant M$. La fonction g est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et $||g||_{\infty,\mathbb{R}} = M$.

Par conséquent, $\varphi \times g$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit et $|\varphi \times g| \leqslant M|\varphi|$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)g(x)| \leqslant \dfrac{CM}{1+x^2}$. Comme la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{CM}{1+x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\psi(x) \underset{\pm\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$, par comparaison, la fonction $\varphi \times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

La fonction fg est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^1 fg$ existe et, par linéarité de l'intégrale, on obtient la relation $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)g(x)dx + \int_0^1 \Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)g(x)\Big)dx$. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0;1]$, $|u_n(x)g(x)| \leqslant \big(|\varphi(x+n)| + |\varphi(x-n)|\big)\,|g(x)| \leqslant \Big(\dfrac{C}{1+(x+n)^2} + \dfrac{C}{1+(x-n)^2}\Big)\,|g(x)|$ par inégalité triangulaire. Ainsi, $|u_n(x)g(x)| \leqslant \Big(\dfrac{CM}{1+n^2} + \dfrac{CM}{1+(n-1)^2}\Big)$ donc $||u_n g||_{\infty,[0;1]} \leqslant \Big(\dfrac{CM}{1+n^2} + \dfrac{CM}{1+(n-1)^2}\Big)$ ce qui prouve une nouvelle fois par comparaison aux séries de RIEMANN que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n g$ converge normalement sur $[0;1]$. Par le théorème d'intégration terme à terme sur segment, on a donc $\int_0^1 \Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)g(x)\Big)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)g(x)dx$.

Mais $\int_0^1 u_n(x)g(x)dx = \int_0^1 \big(\varphi(x+n)+\varphi(x-n)\big)g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x+n)g(x)dx + \int_0^1 \varphi(x-n)g(x)dx$ par linéarité de l'intégrale puis, en posant les changements de variable $u = x+n$ et $v = x-n$ on arrive à $\int_0^1 u_n(x)g(x)dx = \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u-n)du + \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(v+n)du = \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u)du + \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(v)du$ car g est 1-périodique et $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)g(x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_n^{n+1} \varphi(u)g(u)du + \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(v)du\Big)$.

Enfin, on a $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1} \varphi(u)g(u)du$ et, par CHASLES, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

6.163 **a.** Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $f_{n,p} : x \mapsto x^p \ln^n(x)$ est continue sur $]0;1]$ et $f_{n,0}(x) = (\ln(x))^p \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ et $\lim_{x\to 0^+} f_{n,p}(x) = 0$ si $n \geqslant 1$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, $f_{n,p}$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $I_{n,p}$ est bien définie.

b. Pour $n \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u : x \mapsto (\ln x)^n$ et $v : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ et $u(1)v(1) = 0$. Ainsi, on obtient la formule de récurrence $I_{n,p} = \int_0^1 f_{n,p}(x)dx = -\dfrac{n}{p+1}\int_0^1 (\ln x)^{p-1}x^n dx = -\dfrac{n}{p+1} I_{n-1,p}$.

c. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^x} = x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ est continue sur $]0;1]$, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ car $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$. Ainsi, $\int_0^1 f(x)dx$ existe car f se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.

d. Si $p = 0$, alors $I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$. Alors, pour $p \in \mathbb{N}$, en reportant successivement, on a $I_{n,p} = -\dfrac{nI_{n-1,p}}{p+1} = \dfrac{n}{p+1} \times \dfrac{(n-1)I_{n-2,p}}{p+1} = \cdots = \dfrac{(-1)^n n!}{(p+1)^n} I_{n,0} = \dfrac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}$.

Comme $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}$ en développant l'exponentielle en série entière, on peut écrire $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n,n}(x)dx$.

- (H_1) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n f_{n,n}}{n!}$ converge simplement vers la fonction f sur $]0;1]$.
- (H_2) Toutes les fonctions $f_{n,n}$ sont continues et intégrables sur $]0;1]$ (on vient de le voir) et la fonction f est continue sur $]0;1]$.
- (H_3) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}| = \dfrac{|I_{n,n}|}{n!} = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}|$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ dès que $n \geqslant 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et il vient $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$ après changement d'indice.

6.164 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, traitons deux cas selon le signe de x :

Si $x \leqslant 0$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries de RIEMANN.

Ainsi, le domaine de définition D_f de la fonction f vaut $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

b. Si $a > 0$, comme f_n est décroissante positive sur $[a;+\infty[$, on a $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a) = e^{-a\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge car $a \in D_f$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

c. Toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a;+\infty[$ et par convergence normale (donc uniforme) de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[a;+\infty[$, on a la continuité de f sur $[a;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque c'est vrai pour tout $a > 0$).

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \delta_{n,0}$ et qu'on a convergence normale donc uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[1;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

d. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a décroissance de $g_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$, on intègre l'inégalité $g_x(n) = f_n(x) \leqslant g_x(t)$ sur $[n-1;n]$ et l'inégalité $g_x(t) \leqslant g_x(n) = f_n(x)$ sur $[n;n+1]$ pour avoir, par croissance de l'intégrale, l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}}dt$ (1).

La fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $e^{-x\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} (\sqrt{t})^4 e^{-x\sqrt{t}} = 0$. L'inégalité de gauche dans (1) est aussi vraie pour $n = 0$, on somme toutes ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}$ (la série et l'intégrale convergent) et on a par relation de CHASLES la minoration $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x)$ de $f(x)$.

De même à droite dans (1) en sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on obtient la majoration $f(x) - 1 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$.

Ainsi, on arrive à l'encadrement $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ de $f(x)$.

On effectue dans cette dernière intégrale le changement de variable $t = \varphi(u) = u^2$ avec φ qui est bien bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante, de classe C^1, et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 2\int_0^{+\infty} ue^{-xu}du$. On effectue une intégration par parties en posant $a(u) = u$ et $b(u) = -\dfrac{e^{-xu}}{x}$ avec a et b qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$ et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 2\Big[-\dfrac{ue^{-xu}}{x}\Big]_0^{+\infty} + \dfrac{2}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu}du = \dfrac{2}{x}\Big[-\dfrac{e^{-xu}}{x}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{x^2}$.

Ainsi, $\dfrac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{x^2}$ et, comme $1 + \dfrac{2}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$, par encadrement, on a l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

e. Comme f_n est décroissante positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = f(0) = 1$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ diverge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si on avait convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur D_f, comme 0 est adhérent à D_f et que toutes les fonctions f_n admettent des limites finies $\ell_n = \lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 1$, on aurait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ell_n$ d'après le théorème de la double limite. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ diverge, on n'a pas non plus convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

6.165 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ par croissances comparées donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b. $f_0 : x \mapsto e^{-x}$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $||f_0||_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_0(0) = 1$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{e^{-x}x^n}{n!} + \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x)$ donc f_n est positive, croissante sur $[0;n]$ et décroissante sur $[n;+\infty[$ donc $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_n(n) = \dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$.

D'après la formule de STIRLING, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n!}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$, ce qui montre la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on sait que la série entière exponentielle converge sur $\mathbb{R}$ et qu'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$ donc, en multipliant par e^{-x}, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-x}x^n}{n!} = f(x) = 1$. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa fonction somme est constante égale à 1.

d. Soit $a > 0$, d'après l'étude de fonction de la question **b.**, dès que $n \geqslant a$, la fonction f_n est croissante et positive sur $[0;a]$ donc $||f_n||_{\infty,[0;a]} = f_n(a) = \dfrac{e^{-a}a^n}{n!}$ et, d'après **c.**, la série $\sum\limits_{n\geqslant a} \dfrac{e^{-a}a^n}{n!}$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;a]$. Par contre, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en $+\infty$ par croissances comparées, il s'agit de $\ell_n = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$. Si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0$ ce qui est absurde puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 1$. Il ne saurait y avoir convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\textbf{6.166}}$ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+e^t}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(e^{-t}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car $t \mapsto e^{-t}$ l'est ce qui montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$ converge.

Si on prend $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ donc $\dfrac{1}{1+e^t} = e^{-t}\dfrac{1}{1+e^{-t}} = e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(e^{-t})^n$ (série géométrique) ce qui donne $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$. Posons $f_n(t) = (-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(i-n-1)t}dt\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^n e^{(i-n-1)t}}{i-n-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$. On n'a pas la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$, on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

<u>Méthode 1</u> : Si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, alors $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty} f_k(t)dt\right|$. Par linéarité de l'intégrale, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(t)dt\right| = \left|\int_0^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(t)dt\right|$ (somme finie). Par inégalité triangulaire, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| \leqslant \int_0^{+\infty}|\cos(t)|\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k e^{-kt}\right|dt$ puis, comme $(e^{-kt})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 (on voit l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$), par le critère spécial des séries alternées, on a $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt - S_n\right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}dt = \frac{1}{n+1} \to 0$. Ainsi, la suite numérique $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$, qui s'écrit aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

<u>Méthode 2</u> : soit $S_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$:

- (H_1) Ce qui précède montre que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f.
- (H_2) Les fonctions f_k, donc aussi les fonctions S_n par linéarité, sont intégrables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_k(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ comme avant et f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on l'a déjà vu).

(H3) Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n(t)| = \Big|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\Big| = |\cos(t)e^{-t}|\Big|\sum_{k=0}^{n}(-e^{-t})^k\Big| \leqslant e^{-t} \times \dfrac{1-(-e^{-t})^{n+1}}{1+e^{-t}}$

donc $|S_n(t)| \leqslant \dfrac{2e^{-t}}{1+e^{-t}} \leqslant \varphi(t) = 2e^{-t}$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On conclut avec le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Comme, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(k+1)}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, on a bien la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$ et à nouveau la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

6.167 **a.** Soit $x \in [-1;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0 = \ell$ car $x^2 > 0$ donc, par continuité de la fonction $\sin$ en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(\ell) = 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $F : x \to 0$ sur $[-1;1]$.

b. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a;1]$, alors $0 \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na^2} = 0$ par croissances comparées, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $ne^{-na^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Par croissance de $\sin$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sin(ne^{-na^2})$ donc $||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = ||f_n||_{\infty,[a;1]} \leqslant \sin(ne^{-na^2})$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(ne^{-na^2}) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = 0$ d'où, par définition, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction F sur tout $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(e^{-1/n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ car $\sin$ est croissante sur $[e^{-1};1[$ donc, comme $||f_n||_{\infty,[-1;1]} \geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ puisque $\frac{1}{n} \in [-1;1]$, la suite $\left(||f_n||_{\infty,[-1;1]}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction F sur $[-1;1]$.

6.168 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;1]$ et $f_n(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_n est intégrable sur $]0;1]$ donc u_n existe bien.

b. <u>Méthode 1</u> : pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme f_n est positive sur $]0;1]$, on a $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^{1/3}\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx$. Or on a $\forall x \in \left]0;\frac{1}{3}\right]$, $1-x \geqslant \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{x}$, ce qui donne la minoration $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^{1/3}(1-x)^{n-1}dx$. Alors, $u_n \geqslant \left[-\dfrac{(1-x)^n}{n}\right]_0^{1/3} = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{2^n}{3^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

<u>Méthode 2</u> : raisonnons par l'absurde, si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ convergeait :

(H1) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $f :]0;1[\to \dfrac{1}{x^{3/2}}$ sur $]0;1[$ car, avec les séries géométriques,

$\forall x \in]0;1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{(1-(1-x))\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} = f(x)$ car $|1-x| < 1$.

(H2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ d'après **a.**.

(H3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.

(H4) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge par hypothèse.

Par le théorème d'intégration terme à terme, f serait intégrable sur $]0;1[$ ce qui est faux car l'intégrale de

RIEMANN $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et ici $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ avec $\frac{3}{2} \geqslant 1$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

c. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) Comme $\forall x \in]0;1[$, $\lim_{n\to+\infty} (1-x)^n = 0$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle $g : x \mapsto 0$ sur $]0;1[$.

(H_2) Les fonctions f_n et la fonction g sont continues sur $]0;1[$.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0;1[$, $|f_n(x)| = \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = \varphi(x)$ et φ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après RIEMANN.

Par le théorème évoqué, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 g(x)dx = 0$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans $u_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}dx$, on pose $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$ de sorte que $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec u et v de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, il vient $u_{n+1} = [2(1-x)^{n+1}\sqrt{x}]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n\sqrt{x}dx$ donc $u_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n \frac{1-(1-x)}{\sqrt{x}}dx$. Par linéarité de l'intégrale, comme les deux intégrales convergent, $u_{n+1} = 2(n+1)\Big[\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}dx\Big] = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$ donc $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}u_n$.

e. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{2n+1}u_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3}u_0$ d'après la question **d.** qui se simplifie en $u_n = \frac{((2n)(2n-2)\cdots 2)^2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}u_0 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}u_0$. Or $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $u_n = \frac{2}{2n+1}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$. D'après STIRLING, on a donc $u_n \sim \frac{2}{2n} \times \frac{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{2n}}{e^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}$ qui s'abrège en $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ comme attendu. On retrouve bien, avec RIEMANN, la divergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

6.169 **a.** Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \ln\Big(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\Big) = \alpha\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) + \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big)$ donc, avec l'hypothèse de l'énoncé, $a_n \underset{+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + \ln\Big(1 - \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge ce qui donne l'existence d'un réel k tel que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n^\alpha u_n) = k$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \lambda = e^k > 0$ donc que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Soit $x \in]-1;0[$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1-(1-t)^x}{t}$ est continue sur $]0;1[$.

<u>En 1^-</u> Comme $x < 0$, $\lim_{t\to 1^-} (1-t)^x = +\infty$ donc $g_x(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{-x}}$ et, comme $-x < 1$, g_x est intégrable sur $\Big[\frac{1}{2};1\Big[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

<u>En 0^+</u> On sait que $(1-t)^x \underset{0}{=} 1 - xt + o(t)$ donc $g_x(t) \underset{0}{=} \frac{xt + o(t)}{t} \underset{0}{=} x + o(1)$ donc g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$. Ainsi, g_x est intégrable sur $\Big]0;\frac{1}{2}\Big]$.

Par conséquent, g_x est intégrable sur $]0;1[$ (même $[0;1[$) donc f est bien définie sur $]-1;0[$.

Pour $t \in [0;1[$, on a $(1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}(-t)^n$ d'après le cours sur les séries entières donc $g_x(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^n$ pour $t \in]0;1[$, ce qui se simplifie en (relation vraie pour $t = 0$

car on a posé $g_x(0)=x$) $g_x(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

Posons donc, pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction $u_n : t\mapsto (-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$.

(H_1) La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers g_x sur $[0;1[$ (on vient de le voir).

(H_2) Les u_n sont continues et intégrables sur $[0;1[$ si $n\in\mathbb{N}$ car elles sont polynomiales sur le segment $[0;1]$.

(H_3) La fonction g_x est continue sur $[0;1[$.

(H_4) Posons $I_n=\int_0^1|u_n|=\dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n!}\left[\dfrac{t^n}{n}\right]_0^1=\dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)}{n.n!}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

On calcule $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\dfrac{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n-x)n.n!}{(-x)(1-x)\cdots(n-1-x)(n+1).(n+1)!}=\dfrac{n(n-x)}{(n+1)^2}=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2}$ ce qui donne, par développements limités, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\underset{+\infty}{=}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ et il vient donc $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\underset{+\infty}{=}1-\dfrac{x+2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit d'après la question précédente qu'il existe $\lambda>0$ tel que $I_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\lambda}{n^{x+2}}$ donc, toujours par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n\geqslant 1} I_n$ converge car $x+2>1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a l'intégrabilité de g_x (on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 g_x(t)dt=\int_0^1\dfrac{1-(1-t)^x}{t}dt=f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n.n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n$.

6.170 **a.** Pour $n\geqslant 2$, soit $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^n}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison à une intégrale de RIEMANN car $n>1$. Ainsi, $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^n}$ converge pour $n\geqslant 2$ et la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est bien définie.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=1$ si $x\in[0;1[$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et $f(x)=0$ si $x\in]1;+\infty[$.

(H_2) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour tout $n\geqslant 2$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$ avec $\varphi(x)=1$ si $x\in[0;1[$ et $\varphi(x)=f_2(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ si $x\in[1;+\infty[$ avec φ qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$.

D'après le théorème évoqué, $\lim_{n\to+\infty} I_n=\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 dx=1=\ell$.

c. Pour $n\geqslant 2$, $I_n-\ell=I_n-1=\int_0^1(f_n(x)-1)dx+\int_1^{+\infty}f_n(x)dx=-\int_0^1\dfrac{x^n dx}{1+x^n}+\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^n}$ avec la relation de CHASLES. On pose $x=u^{1/n}=\varphi_n(u)$ dans les deux intégrales car $u\mapsto u^{1/n}$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$ mais aussi de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$, ce qui donne la relation $I_n-1=\dfrac{1}{n}\int_0^1\dfrac{u^{1/n}du}{1+u}+\dfrac{1}{n}\int_1^{+\infty}\dfrac{u^{1/n}du}{u(1+u)}$ donc $n(I_n-1)=\int_0^1 g_n(u)du+\int_1^{+\infty}h_n(u)du$ en posant $g_n(u)=\dfrac{u^{1/n}}{1+u}$ et $h_n(u)=\dfrac{u^{1/n}}{u(1+u)}$.

(H_1) $(g_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $g:]0;1]\to\mathbb{R}$ telle que $g(u)=\dfrac{1}{1+u}$ et $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers $h:[1;+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que $h(u)=\dfrac{1}{u(1+u)}$.

(H_2) Les fonctions g_n et g sont continues sur $]0;1]$ et les h_n et h sont continues sur $[1;+\infty[$.

(H_3) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall u \in]0;1]$, $|g_n(u)| \leqslant \alpha(u) = 1$ et $\forall u \in [1;+\infty[$, $|h_n(u)| \leqslant \beta(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}(1+u)}$ avec α continue et intégrable sur $]0;1]$ et β continue et intégrable sur $[1;+\infty[$ car $\beta(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$.

D'après le théorème de convergence dominée appliqué deux fois, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(u)du = \ln(2)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} h_n(u)du = \int_1^{+\infty} h(u)du = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)du = \left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(2)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(I_n - 1) = -\ln(2) + \ln(2) = 0$ d'où $I_n - 1 \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ne donne pas d'équivalent de $I_n - 1$: damned !

Changeons de stratégie. Dans $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, on pose $x = \dfrac{1}{u} = \psi(u)$ avec ψ une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0;1]$ dans $[1;+\infty[$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \int_1^0 \frac{1}{1+(1/u)^n}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{1+u^n}du$.

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, $I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-2} - x^n}{1+x^n}dx$ et on pose $x = u^{1/n} = \varphi_n(u)$ car φ_n est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$ pour avoir $I_n - 1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\frac{n-2}{n}} - u}{1+u} \times u^{(1/n)-1}du$ et on obtient $I_n - 1 = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u}\left(u^{2/n} - 1\right)du$. Comme $\forall u \in]0;1]$, $u^{2/n} - 1 = \exp\left(\dfrac{2\ln(u)}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(u)}{n}$ car $e^t \underset{0}{=} 1 + t + o(t)$, on écrit plutôt $I_n - 1 = -\dfrac{2}{n^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-(1/n)}}{1+u} \times \frac{u^{2/n} - 1}{\frac{2\ln(u)}{n}} \times \ln(u)du$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons $h_n : u \mapsto \dfrac{u^{-(1/n)}}{1+u} \times \dfrac{u^{2/n} - 1}{\frac{2\ln(u)}{n}} \times \ln(u)$:

(H_1) $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers la fonction $h :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \dfrac{\ln(u)}{1+u}$.

(H_2) Les fonctions h_n et h sont continues sur $]0;1]$.

(H_3) Pour tout $n \geqslant 2$, $\forall u \in]0;1]$, $|h_n(u)| \leqslant \theta(u)$ avec $\theta(u) = \dfrac{u^{-1/2}\ln(u)}{1+u}$ si $u \in]0;1]$ car $n \geqslant 2$ et qu'il est classique que $\forall t \in \mathbb{R}_-^*$, $e^t - 1 \geqslant t$ donc $\forall u \in]0;1[$, $\dfrac{u^{2/n} - 1}{\frac{2\ln(u)}{n}} \leqslant 1$ en prenant $t = \dfrac{2\ln(u)}{n} < 0$. De plus, θ est continue et intégrable sur $]0;1]$ par comparaison à une intégrale de Riemann $\left(\dfrac{3}{4} < 1\right)$ car on a $\theta(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln(u)}{\sqrt{u}} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{u^{3/4}}\right)$ par croissances comparées.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2}(1 - I_n) = \displaystyle\int_0^1 h(u)du = J$.

Or $\forall u \in]0;1[$, $h(u) = \ln(u)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n \ln(u)$. Si $a_n : u \to (-1)^n u^n \ln(u)$ pour $n \in \mathbb{N}$:

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge simplement vers h sur $]0;1]$ car $h(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(1) = 0$.

(H_2) Les fonctions a_n sont continues et intégrables sur $]0;1]$ pour $n \in \mathbb{N}$ car elles se prolongent par continuité en 0 avec $a_n(0) = 0$ dès que $n \geqslant 1$ et $a_0(u) = \ln(u) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ par croissances comparées.

(H_3) La fonction h est continue sur $]0;1]$.

(H_4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : u \mapsto \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ et $v : u \mapsto -\ln(u)$ sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{u\mapsto 0} u_n(u)v(u) = 0$ par croissances comparées donc $J_n = \displaystyle\int_0^1 |a_n| = \int_0^1 u_n'(u)v(u)du = [u_n(u)v(u)]_0^1 - \int_0^1 u_n(u)v'(u)du$ donc $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{n+1}du = \frac{1}{(n+1)^2}$. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge car $2 > 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $J = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$. En séparant termes d'indices pairs et impairs, $J = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)^2}$ et il vient $J = -\zeta(2) + \frac{\zeta(2)}{2} = -\frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2}(I_n - 1) = -J = \frac{\pi^2}{12}$ donc $I_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n^2}$.

d. Par comparaison à une série de RIEMANN convergente car $2 > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 2} (I_n - 1)$ converge.

6.171 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive car $f_0(x) = x > 0$ et, si $f_n(x) > 0$ est bien défini pour un entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\Big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\Big)$ est aussi bien défini et strictement positif. Si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell_x \in \mathbb{R}_+$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation de récurrence $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\Big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\Big)$, $\ell_x = \frac{1}{2}\Big(\ell_x + \frac{x}{\ell_x}\Big) \iff \ell_x^2 = x \iff \ell_x = \sqrt{x}$ car $\ell_x \geqslant 0$.

<u>Convergence simple</u> : soit $x > 0$, $f_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\Big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} - 2\sqrt{x}\Big) = \frac{(f_n(x) - \sqrt{x})^2}{2f_n(x)} \geqslant 0$ donc on a la minoration $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) \geqslant \sqrt{x}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{f_n(x)} - f_n(x)\Big)$ qui se transforme en $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(\sqrt{x} - f_n(x))(\sqrt{x} + f_n(x))}{2f_n(x)} \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$ donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minore par $\sqrt{x}$ donc elle converge et on a vu précédemment que sa limite est forcément $\sqrt{x}$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

<u>Convergence uniforme</u> : la fonction $f_0 - f : x \mapsto x - \sqrt{x}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim_{x\to+\infty} (f_0(x) - f(x)) = +\infty$. De même, $f_1 - f : x \mapsto \frac{x+1}{2} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car on a $\lim_{x\to+\infty} (f_1(x) - f(x)) = +\infty$. Si on suppose que $f_n(x) - f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f_n(x) = (f_n(x) - f(x)) + \sqrt{x}$ et $\sqrt{x} \underset{+\infty}{=} o(x)$ donc, par somme, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$ et la relation $f_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{(f_n(x) - \sqrt{x})^2}{2f_n(x)}$ montre, par quotient, que $f_{n+1}(x) - f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2^{2n}}}{2\frac{x}{2^n}} = \frac{x}{2^{n+1}}$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) - f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$ donc $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim_{x\to+\infty} (f_n(x) - f(x)) = +\infty$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

6.172 **a.** Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = (H_n - H_{n-1}) - (\ln(n) - \ln(n-1))$ donc $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge absolument donc converge et, par dualité suite-série, $(u_n)_{n\geqslant 1} = \big(H_n - \ln(n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers un réel $\gamma \sim 0,577$ appelé constante d'EULER.

b. $f : t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} e^{-t/2}$ par croissances comparées donc, par comparaison à des intégrales de référence, f est intégrable en 0^+ et $+\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$ est donc absolument convergente donc convergente, ainsi I existe.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^{n-1} \ln(t)$ est continue sur $]0;n]$ et $f_n(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ donc, comme avant, f_n est intégrable sur $]0;n]$ donc I_n existe.

Dans l'intégrale I_n, on effectue le changement de variable $t = nu = \varphi_n(u)$ avec φ_n qui est bijective et de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;n]$, et on obtient $I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{nu}{n}\right)^{n-1} \ln(nu)(ndu)$ donc, par linéarité de l'intégrale, comme tout converge, $I_n = n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^{n-1}du + n\int_0^1 (1-u)^{n-1}\ln(u)du$. Or il vient $\int_0^1 (1-u)^{n-1}du = \left[-\frac{(1-u)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$ et, en posant $a : u \mapsto \frac{1-(1-u)^n}{n}$ et $b : u \mapsto \ln(u)$ qui sont de classe C^1 sur $]0;1]$, comme $\lim\limits_{u\to 0^+} a(u)b(u) = 0$ par croissances comparées car $1-(1-u)^n \underset{0}{\sim} nu$, on obtient $I_n = \ln(n) + \left[\frac{(1-(1-u)^n)\ln(u)}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}du = \ln(n) + \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{1-(1-u)}du$. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $1-u \neq 1$ et on a donc la relation $I_n = \ln(n) - \int_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1-u)^k\right)du = \ln(n) - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \ln(n) - H_n = -u_n$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = f_n(t)$ si $t \leqslant n$ et $g_n(t) = 0$ si $t > n$. Alors g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^n f_n = I_n$ d'après la question précédente.

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, dès que $n \geqslant t$, on a $g_n(t) = f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t) = \ln(t)\exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = f(t) = \ln(t)e^{-t}$ par continuité de l'exponentielle car $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$. Ainsi, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et y sont intégrables d'après ce qui précède et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Par concavité de $\ln$, $\forall n \geqslant 2$, $|g_n(t)| = |f_n(t)| \leqslant |\ln(t)|e^{(n-1)(-t/n)} = |\ln(t)|e^{-t}e^{t/n}$ donc $|g_n(t)| \leqslant |\ln(t)|e^{-t}e^{t/2} = |\ln(t)|e^{-t/2} = \varphi(t)$ si $t \leqslant n$ et $|g_n(t)| = 0 \leqslant \varphi(t)$ sinon. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(t)| \leqslant \varphi(t) + |f_1(t)| = \psi(t)$ et la fonction ψ est continue et intégrable (comme somme de fonctions intégrables) sur $\mathbb{R}_+^*$ avec les mêmes arguments qu'avant.

Par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ donc, avec la question **a.**, on a donc $I = -\gamma$.

6.173 La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ donc f est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ par comparaison aux intégrales de Riemann. De plus, f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ car $f(x) \underset{1^-}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ car $\ln(x) \underset{1}{\sim} x-1$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$ par croissances comparées. Comme on sait que $\forall x \in]0;1[$, $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, il vient, avec $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par avec $f_n(x) = -\frac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$, la relation $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Le fonctions f_n sont continues sur $]0;1]$ et, comme $f_1(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ par croissances comparées donc que f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ si $n \geqslant 2$, les fonctions f_n sont intégrables sur $]0;1]$.

D'abord, en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geqslant 1$ donc, par intégration par parties, on obtient la relation $\int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^n\ln x}{n^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n^2}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n^3}$ si $n \geqslant 1$.

Méthode 1 : par linéarité de l'intégrale, comme la fonction $f_1 : x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0;1]$, et donc $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = f - f_1$ aussi d'après ce qui précède, on a $I = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Pour $n \geqslant 2$, f_n est continue sur $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. De plus, f_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $f_n'(x) = -\frac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}\Big)$ donc, avec le tableau de variations de f_n, on trouve $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\Big) = \frac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n^2}$. Ainsi, $\sum_{n \geqslant 2} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ par RIEMANN. Par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 2} f_n$ sur le segment $[0;1]$, d'après le cours, $\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) - 1$. Comme $\int_0^1 f_1 = 1$, on obtient la valeur $I = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

Méthode 2 : utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

(H_1) La série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ (on en vient).

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ (déjà vu).

(H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.

(H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n^3}$ converge.

Par le fameux théorème, on conclut que f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1,202$.

6.174 **a.** • Pour $x = 0$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n(0)$ converge et $S(0) = 0$.

• Si $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Par conséquent, la fonction somme S est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, comme toutes les fonctions u_n sont impaires, on en déduit (par convergence simple) que S est aussi impaire.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, après calculs, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$ donc u_n est décroissante sur $]-\infty;n]$ et $[n;+\infty[$ et croissante sur $[-n;n]$. Comme $\lim_{x \to \pm\infty} u_n(x) = 0$, le tableau de variations de u_n montre que $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |u_n(-n)| = u_n(n) = \frac{1}{2n}$. Ainsi, la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} ||u_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge et il n'y a pas converge normale de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

c. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(H_2) La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après **a.**.

(H_3) Soit $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a;a]$, $|u_n'(x)| = \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2} \leqslant \frac{n^2+x^2}{(x^2+n^2)^2} = \frac{1}{(x^2+n^2)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ par inégalité triangulaire donc $||u_n'||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geqslant 1} ||u_n'||_{\infty,[-a;a]}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par le théorème évoqué ci-dessus, S est de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$.

d. Comme $S(0) = 0$ et $S'(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$ d'après la question précédente, puisque S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a $S(x) \underset{0}{=} S(0) + xS'(0) + o(x)$ par le théorème de TAYLOR-YOUNG. On a donc $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2 x}{6}$.

Pour être plus précis, pour $x \in \mathbb{R}$, $\left|S(x) - \dfrac{\pi^2 x}{6}\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+n^2} - \dfrac{x}{n^2}\right)\right| = \left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^3}{n^2(x^2+n^2)}\right|$ donc on a $|S(x)| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|^3}{n^2(x^2+n^2)} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|^3}{n^4} = \zeta(4)|x|^3 = \dfrac{\pi^4|x|^3}{90}$ ce qui prouve que $S(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi^2 x}{6} + O(x^3)$ ce qui montre que $S(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi^2 x}{6} + o(x)$ et, à nouveau, $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2 x}{6}$.

e. On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $x > 0$ fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k) = u_k(x) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi_x(t)dt$. On somme ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)dt$ donc $\left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} = \left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

f. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après la question précédente, on n'a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ vers f sur $\mathbb{R}$ (ni sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$ pour la même raison).

6.175 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, pour que $S(x)$ existe, on doit au moins avoir $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + x \neq 0$, c'est-à-dire $x \notin (-\mathbb{N})$. Soit donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{a^n}{n+x}$. Traitons alors quatre cas :

- Si $|a| < 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n$ converge car $|a| < 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries géométriques.
- Si $|a| > 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $a = 1$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge par comparaison à la série harmonique.
- Si $a = -1$, alors $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n} \times \dfrac{1}{1+(x/n)} \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $\dfrac{1}{1+(x/n)} \underset{+\infty}{=} 1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(f_n(x) - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, par somme, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge (mais pas absolument).

Le domaine de définition de S vaut donc $D_S = \emptyset$ si $|a| > 1$ ou $a = 1$, $D_S = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ si $|a| < 1$ ou $a = -1$.

b. Tout d'abord, les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n \in \mathbb{N}$.

<u>Méthode 1</u> : soit $0 < \alpha < \beta$, alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\alpha; \beta]$, comme $|f_n| : x \mapsto \dfrac{|a|^n}{n+x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $|f_n(x)| \leqslant |f_n(\alpha)|$ donc f_n est bornée sur $[\alpha; \beta]$ et $||f_n||_{\infty,[\alpha;\beta]} = |f_n(\alpha)| \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a|^n$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement vers S sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On sait d'après le cours que ceci implique la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Méthode 2</u> : f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, pour $n \geqslant 1$, comme $|f_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on

a $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \lim\limits_{x\to 0^+} |f_n(x)| = \dfrac{|a|^n}{n} \underset{+\infty}{=} o(|a|^n)$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a|^n$ converge car $|a| < 1$ par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $T : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le cours. Comme $S = T + f_0$ et que f_0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $x > 0$, $a\,S(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} af_n(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1}}{n+x+1} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{a^p}{p+x}$ en effectuant le changement d'indice $p = n+1$. Ainsi, $aS(x+1) = S(x) - f_0(x) = S(x) - \dfrac{1}{x}$.

d. $\forall x > 0$, $S(x) = \dfrac{1}{x} + a\,S(x+1)$ or S est continue en 1 d'après **b.** donc $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x+1) = S(1)$. Ainsi, S est bornée au voisinage de 1 et $S(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O(1) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ ce qui montre bien que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

e. Méthode 1 : la borne β n'est pas intervenue dans les calculs de la question **b.** donc $||f_n||_{\infty,[\alpha;+\infty[} = |f_n(\alpha)|$ à nouveau et on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[\alpha;+\infty[$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, par théorème de la double limite, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Méthode 2 : Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **b.** et que $\forall n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$, par double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0 + 0 = 0$.

f. Comme $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^n}{x}$, si on admet pouvoir sommer les équivalents, on aurait $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{x} = \dfrac{1}{(1-a)x}$. Pour le montrer rigoureusement, on écrit $x\,S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ avec $g_n(x) = \dfrac{a^n x}{n+x} = a^n - \dfrac{na^n}{n+x}$, la fonction $|g_n| : x \mapsto |a|^n - \dfrac{n|a|^n}{n+x}$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} |g_n(x)| = |a|^n$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = |a|^n$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a|^n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la double limite, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$. Par conséquent, $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(1-a)x}$.

Pour être plus précis, pour $x > 0$, $\left|S(x) - \dfrac{1}{(1-a)x}\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\dfrac{a^n}{n+x} - \dfrac{a^n}{x}\Big)\right|$ car $\dfrac{1}{1-a} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ donc, par inégalité triangulaire, on a $\left|S(x) - \dfrac{1}{(1-a)x}\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{na^n}{x(n+x)}\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n|a|^n}{x^2} = \dfrac{A}{x^2}$ en posant $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n|a|^n$. Ainsi, $S(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ ce qui est plus précis que ce qu'on a obtenu avant.

6.176 **a.** Soit $x \in [-1;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0 = \ell$ car $x^2 > 0$ donc, par continuité de la fonction $\sin$ en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(\ell) = 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $F : x \mapsto 0$ sur $[-1;1]$.

b. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a;1]$, alors $0 \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na^2} = 0$ par croissances comparées, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $ne^{-na^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Par croissance de $\sin$ sur $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sin(ne^{-na^2})$ donc $||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = ||f_n||_{\infty,[a;1]} \leqslant \sin(ne^{-na^2})$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(ne^{-na^2}) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = 0$ d'où, par définition, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction F sur tout $[a;1]$ avec $a\in]0;1[$.

c. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big)=\sin\big(e^{-1/n}\big)\geqslant \sin(e^{-1})$ car $\sin$ est croissante sur $[e^{-1};1[$ donc, comme $||f_n||_{\infty,[-1;1]}\geqslant f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\geqslant \sin(e^{-1})$ puisque $\dfrac{1}{n}\in[-1;1]$, la suite $\big(||f_n||_{\infty,[-1;1]}\big)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction F sur $[-1;1]$.

6.177 **a.** Soit $x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)$ est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et, comme $\ln(1+nx^2)=\ln(n)+\ln\Big(x^2+\dfrac{1}{n}\Big)\underset{+\infty}{=}O(1)$, on a $u_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(n)}{n^2}\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ donc, par comparaison à une série de RIEMANN convergente car $\dfrac{3}{2}>1$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(x)$ converge absolument donc converge. Ainsi, S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par opérations. De plus, pour $a>0$, comme u_n est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\forall x\in[-a;a]$, $0\leqslant u_n(x)\leqslant u_n(a)$ donc $||u_n||_{\infty,[-a;a]}=u_n(a)$ et on vient de voir en **a.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(a)$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, ce qui assure, d'après le cours, la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

c. Les fonctions u_n tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ donc ne sont même pas bornées sur $\mathbb{R}$. On n'a donc pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ sur $\mathbb{R}$.

d. Toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations. De plus, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $u_n'(x)=\dfrac{2x}{n(1+nx^2)}$ et on se rappelle que $2ab\leqslant a^2+b^2$ pour $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$ donc $1+nx^2\geqslant 2\sqrt{n}|x|$. Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $0\leqslant |u_n'(x)|\leqslant \dfrac{2|x|}{2n\sqrt{n}|x|}=\dfrac{1}{n^{3/2}}$ donc $||u_n'||_{\infty,[-a;a]}\leqslant\dfrac{1}{n^{3/2}}$ et, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On pouvait bien sûr dériver u_n' pour en faire son tableau de variations. Ainsi, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

e. $S(0)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}0=0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, $u_n(x)\geqslant\dfrac{\ln(nx^2)}{n^2}=\dfrac{2\ln(x)}{n^2}+\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ (1). Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge car $\dfrac{\ln(n)}{n^2}\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$, en notant $A=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n^2}$, on obtient en sommant les inégalités (1) pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S(x)\geqslant\dfrac{\pi^2\ln(x)}{3}+A$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=+\infty$.

f. On vient de voir que $\forall x\in\mathbb{R}$, $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2x}{n(1+nx^2)}=2x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(1+nx^2)}$. Soit $x>0$, on définit $g_x:[1;+\infty[\to\mathbb{R}$ par $g_x(t)=\dfrac{1}{t(1+tx^2)}$. Alors g_x est continue sur $[1;+\infty[$ et y est décroissante donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $g_x(n+1)\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}g_x(t)dt\leqslant g_x(n)$ (2). Comme $g_x(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^3x^2}\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{t^3}\Big)$, par comparaison à une intégrale de RIEMANN convergente, g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$. En sommant (1) pour $n\in\mathbb{N}^*$, on obtient $2x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}g_x(n+1)=S'(x)-2xg_x(1)=S'(x)-\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant 2x\displaystyle\int_1^{+\infty}g_x(t)dt\leqslant S'(x)=2x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}g_x(n)$ (tout converge). Comme $g_x(t)=\dfrac{1+tx^2-tx^2}{t(1+tx^2)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{x^2}{1+tx^2}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}g_x(t)dt=\Big[\ln(t)-\ln(1+tx^2)\Big]_1^{+\infty}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}g_x(t)dt=\Big[\ln\Big(\dfrac{t}{1+tx^2}\Big)\Big]_1^{+\infty}=\ln(1+x^2)-2\ln(x)$. En réorganisant les termes, on arrive à l'encadrement $2x\ln(1+x^2)-4x\ln(x)\leqslant S'(x)\leqslant 2x\ln(1+x^2)-4x\ln(x)+\dfrac{2x}{1+x^2}$. Or on a les équivalents

$2x\ln(1+x^2)-4x\ln(x)\underset{0^+}{\sim}-4x\ln(x)$ et $2x\ln(1+x^2)-4x\ln(x)+\dfrac{2x}{1+x^2}\underset{0^+}{\sim}-4x\ln(x)$ donc, par encadrement, on obtient $S'(x)\underset{0^+}{\sim}-4x\ln(x)$. Ceci montre, par exemple, que S n'est pas deux fois dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{S'(x)-S'(0)}{x-0}=+\infty$ car $\dfrac{S'(x)-S'(0)}{x-0}\underset{0^+}{\sim}-4\ln(x)$ puisque $S'(0)=0$.

6.178 **a.** Le domaine de définition D de S vaut $D=\mathbb{R}_+$ car :

Si $x=0$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(0)=\dfrac{(-1)^n}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n(0)$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant1}$ est décroissante et tend vers 0.

Si $x>0$, on a $u_n(x)\underset{+\infty}{=}o(e^{-nx})\underset{+\infty}{=}o((e^{-x})^n)\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc la série $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n(x)$ converge absolument par le critère de RIEMANN car $2>1$ ou par comparaison aux séries géométriques.

Si $x<0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n(x)|=+\infty$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant0}u_n(x)$ diverge grossièrement.

b. Pour $x\geqslant0$, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et tend vers 0 donc, d'après le critère spécial des séries alternées, en posant les restes $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$, on a $|R_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. La convergence de $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n$ est donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit d'après le cours que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Les fonctions u_n sont toutes dérivables sur D et on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in D,\ u_n'(x)=(-1)^{n+1}e^{-nx}$ donc $||u_n'||_{\infty,D}=|u_n'(0)|=1$ et, comme $\sum\limits_{n\geqslant1}1$ diverge, on n'a pas convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n'$ sur D. On n'a même pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n'$ sur D car la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant1}u_un'(0)$ diverge grossièrement.

On ne peut donc pas conclure facilement que S est de classe C^1 sur D.

d. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$:

(H_1) On a vu en **a.** la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n$ sur $D=\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et, pour $n\geqslant1$ et $x>0$, $u_n'(x)=(-1)^{n+1}e^{-nx}$.

(H_3) Soit $a>0$ et $n\geqslant1$, comme $|u_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $||u_n'||_{\infty,[a;+\infty[}=|u_n'(a)|=e^{-na}$ et $\sum\limits_{n\geqslant1}e^{-na}$ converge (série géométrique avec $0<e^{-a}<1$) donc on a convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n'$ sur $[a;+\infty[$ donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le fameux théorème, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-nx}=e^{-x}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(-e^{-x})^p$ donc $S'(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\big(-\ln(1+e^{-x})\big)'$.

e. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe donc $k\in\mathbb{R}$ telle que $\forall x>0,\ S(x)=k-\ln(1+e^{-x})$. Pour déterminer la valeur de k, plutôt que d'évaluer en une valeur particulière de x, on va faire tendre x vers $+\infty$:

(H_1) D'après la question **b.**, on a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=0=\ell_n$.

Par théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ell_n=0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(1+e^{-x})=0$, on en déduit que $k=0$ donc que $\forall x>0,\ S(x)=-\ln(1+e^{-x})$.

Comme S est continue en 0 d'après **b.**, on a $S(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln(1+e^{-x}))=-\ln(2)=-\ln(1+e^{-0})$ donc on peut conclure que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ S(x)=-\ln(-e^{-x})$.

On pouvait constater, ce qui rend ces dernières questions inutiles, que si $x>0$, on a $-e^{-x}\in]-1;1[$ donc, comme on reconnaît le développement en série entière de $x\mapsto \ln(1+x)$ qui est de rayon de convergence 1, on a directement $\ln(1+e^{-x})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(e^{-x})^n}{n}=-S(x)$.

6.179 **a.** • S'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x=-\dfrac{1}{n}$, f_n n'est pas définie en x donc f ne peut pas l'être non plus.

• Si $x=0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n}$ et la série harmonique diverge donc f n'est pas définie en 0.

• Pour $x\in D=\mathbb{R}^*\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\Big\{-\dfrac{1}{n}\Big\}$, $f_n(x)$ est bien défini pour tout entier n et $f_n(x)=\dfrac{1}{n+n^2x}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2x}>0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de Riemann $(2>1)$.

Par conséquent, le domaine de définition de f est exactement $D=\mathbb{R}^*\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\Big\{-\dfrac{1}{n}\Big\}$.

b. Les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f aussi (la convergence simple suffit). En effet, si $0<x\leqslant y$, comme $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f_k(x)\geqslant f_k(y)$, en sommant, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(y)=S_n(y)$.

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ (les limites existent), on a donc $f(x)\geqslant f(y)$.

Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- (H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*\subset D$.
- (H_2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonctions f_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall x>0,\ f_n'(x)=-\dfrac{1}{(1+nx)^2}$.
- (H_2) Soit $a>0$, comme $|f_n'|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[}=\dfrac{1}{(1+na)^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2a^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[}$ converge par comparaison aux séries de Riemann, ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le cours, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ f'(x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(1+nx)^2}<0$ et on retrouve le fait que f est décroissante (et même strictement) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $x>0$, $\Big|f(x)-\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\Big|=\Big|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2x+n}-\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\Big|=\Big|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{1}{n^2x+n}-\dfrac{1}{n^2x}\Big)\Big|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n^2x+n)n^2x}$ et, comme $n^2x\geqslant 0$, $\Big|f(x)-\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\Big|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(nx+1)n^2x}\leqslant\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3x^2}=\dfrac{\zeta(3)}{x^2}=\dfrac{a}{x^2}$ en posant $a=\zeta(3)\sim 1,2$.

d. On vient de voir que $f(x)-\dfrac{\zeta(2)}{x}=f(x)-\dfrac{\pi^2}{6x}\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)\underset{+\infty}{\sim}o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ ce qui montre que $S(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{6x}$.

e. Pour $x>0$, la fonction $\varphi_x : t\mapsto\dfrac{1}{t(1+tx)}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\varphi_x(k+1)\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\varphi_x(t)dt\leqslant\varphi_x(k)$ par comparaison série-intégrale. On somme ces inégalités pour $k\in\mathbb{N}^*$ ($f(x)$ existe et φ_x est continue sur $[1;+\infty[$ et $\varphi_x(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{xt^2}$ donc φ_x est intégrable sur $[1;+\infty[$) et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi_x(k+1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)-\varphi_x(1)\leqslant\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t(1+tx)}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi_x(k)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ donc on a l'encadrement $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+tx)}$. Or $\dfrac{1}{t(1+tx)} = \dfrac{1+tx-tx}{t(1+tx)} = \dfrac{1}{t}-\dfrac{x}{1+tx}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+tx)} = \Big[\ln(t)-\ln(1+tx)\Big]_1^{+\infty} = \ln(1+x)-\ln(x)$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\ln\Big(\frac{t}{1+tx}\Big) = -\ln(x)$ donc on a l'encadrement $\ln(1+x)-\ln(x) \leqslant f(x) \leqslant \ln(1+x)-\ln(x)+\dfrac{1}{1+x}$ qui donne $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ par le théorème des gendarmes car $\ln(1+x)-\ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(1+x)-\ln(x)+\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

6.180 **a.** Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n!(x+n)}$ qui est bien défini car $x+n>0$. Pour $x>0$, comme $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ et que la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}$ converge, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 1 : pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, $0\leqslant f_n(x) \leqslant \lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = \dfrac{1}{n.n!}$ car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n.n!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n.n!}$ converge car $\dfrac{1}{n.n!} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci assure, par théorème de continuité des séries de fonctions, puisque toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, que la fonction $f-f_0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais $f_0 : x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est elle-même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par somme, $f = f_0+(f-f_0) = f_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : soit $a>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme f_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a)$ et on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a)$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème de continuité des séries de fonctions, puisque toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $x>0$, $g(x) = xf(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x}{n!(x+n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ avec $g_n(x) = \dfrac{x}{n!(x+n)}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, g_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $||g_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \dfrac{1}{n!} = \ell_n$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème de la double limite, comme g_n admet une limite finie $\ell_n = \dfrac{1}{n!}$ en $+\infty$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!} = e$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{x}$.

On écrit, pour $x>0$, $h(x) = x^2\Big(f(x)-\dfrac{e}{x}\Big) = x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\dfrac{1}{n!(x+n)}-\dfrac{1}{n!x}\Big)$ donc $h(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx^2}{n!(x+n)x}$. Posons $h_n(x) = \dfrac{nx^2}{n!(x+n)x}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, comme $0\leqslant h_n(x) = \dfrac{nx}{n!(x+n)} = \dfrac{n}{n!(1+(n/x))} \leqslant \dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$, on a $||h_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{(n-1)!}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} = \ell'_n$, par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ell'_n = -\dfrac{1}{e}$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\Big(f(x)-\dfrac{e}{x}\Big) = -\dfrac{1}{e}$ donc $x^2\Big(f(x)-\dfrac{e}{x}\Big) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{e}+o(1)$ ou encore $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{ex}-\dfrac{1}{ex^2}+o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$.

On pouvait, mais c'est plus simple a posteriori, majorer la quantité $\Big|f(x)-\dfrac{1}{ex}+\dfrac{1}{ex^2}\Big|$ en l'écrivant sous la forme $\Big|f(x)-\dfrac{1}{ex}+\dfrac{1}{ex^2}\Big| = \Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!(x+n)}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!x}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n}{n!x^2}\Big| = \Big|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^2-x(x+n)+n(x+n)}{n!(x+n)x^2}\Big|$ et on a donc $\Big|f(x)-\dfrac{1}{ex}+\dfrac{1}{ex^2}\Big| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2}{n!(x+n)x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}$ donc on a mieux qu'avec la méthode précédente puisqu'on peut conclure que $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{ex} - \dfrac{1}{ex^2} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

6.6 Officiel de la Taupe

6.181 En notant $f_n : t \mapsto t^n \big|\ln(1-t)\big|^\alpha$, la fonction f_n est continue et positive sur $]0;1[$.

$f_n(t) \underset{0}{\sim} t^{n+\alpha}$ donc f_n est intégrable sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ si et seulement si $n+\alpha > -1$. Si on veut que ceci se fasse pour toutes les valeurs de n, on doit avoir $\alpha > -1$. Quelle que soit la valeur de α, on a $f_n(t) \underset{1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ par croissance comparée donc, toujours avec le critère de Riemann : f_n est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$.

Au final : f_n est intégrable pour tout n sur $]0;1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.
On applique le théorème de convergence dominée car $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0;1[,\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_0(t) = \big|\ln(1-t)\big|^\alpha$ et f_0 est intégrable. Comme $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0;1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^1 0 = 0$.

• Calculons les sommes partielles : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right)\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt = \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt$. Mais on sait que l'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt$ diverge (une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha$ est $t \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}\big|\ln(1-t)\big|^{\alpha+1}$ - car $\ln(1-t) < 0$ - et cette fonction possède une limite infinie en 1^-). On peut subodorer que la série proposée diverge mais on ne peut pas utiliser le théorème de convergence dominée.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$, comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt$ diverge, $\exists a \in]0;1[$, $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt = M+1$. Mais par théorème de convergence dominée (sur $]0;a[$ par contre il y a intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha$), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt = \int_0^a \frac{1}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt = M+1$.
Ainsi : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \displaystyle\int_0^a \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt \geqslant M$. Par conséquent, comme on intègre des quantités positives : $\forall n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha dt \geqslant M$; les sommes partielles n'étant pas majorées et formant une suite croissante, on a bien la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n$.

• Autre méthode (proposée par Tanguy) : posons la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}\big|\ln(1-t)\big|^\alpha$ qui est définie sur $]0;1[$. Comme avant, la fonction g est positive et continue sur $]0;1[$ mais n'y est pas intégrable.
Raisonnons par l'absurde, si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n$ était convergente, on aurait toutes les hypothèses du TITT :

- les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers g sur $]0;1[$ d'après le calcul précédent.
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n| = \sum_{n\geqslant 0} I_n$ converge.

On pourrait alors en déduire que g est intégrable sur $]0;1[$ et que $\displaystyle\int_0^1 g = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n$ ce qui est bien sûr faux ici !
En conclusion : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n$ diverge.

6.182 On note, pour $n \geqslant 1$, $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$. Les fonctions u_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
• Si $x < 0$, le terme général $u_n(x)$ de cette série ne tend pas vers 0 donc la série est divergente.
• Si $x = 0$, la série converge par le CSSA et on connaît sa somme $S(0) = -\ln(2)$ (classique).

• Si $x > 0$, comme $\lim_{n\to+\infty} ne^{-nx} = 0$ par croissance comparée, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge par le critère de Riemann car $2 > 1$.
Au final, le domaine de définition de S est $\mathbb{R}_+$.
Pour $x \geqslant 0$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et tend vers 0 donc, d'après le CSSA, la série converge (on le savait déjà) et on a la majoration du reste $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{1}{n+1}$ et la convergence de la série de fonctions est uniforme. Comme toutes les u_n sont continues, on en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, on a $u'_n(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx}$ et $\sum_{n\geqslant 1} u'_n(0)$ diverge. Soit donc $a > 0$, comme $||u'_n||_{\infty,[a;+\infty[} = e^{-na}$ et que $\sum_{n\geqslant 1} e^{-na}$ converge (série géométrique), on a convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ sur $[a;+\infty[$ sachant que toutes les u_n sont de classe C^1 et qu'on a convergence simple (même uniforme et même normale) de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[a;+\infty[$. Par théorème, S est C^1 sur $[a;+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x > 0,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}e^{-nx} = e^{-x}\sum_{p=0}^{+\infty}(-e^{-x})^p = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \big(-\ln(1+e^{-x})\big)'$.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe une constante k telle que : $\forall x > 0,\ S(x) = k - \ln(1+e^{-x})$ or S est continue en 0 et $S(0) = -\ln(2)$ donc $k = 0$. Ainsi : $\forall x \geqslant 0,\ S(x) = -\ln(1+e^{-x})$.

6.183 La fonction $f : t \to \ln(1+e^{-t})$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$. De plus $f(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par le critère de Riemann car $2 > 1$.
De plus, comme $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{-t} \in [0;1[$ et que $\forall x \in]-1;1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ (de rayon de convergence 1) , on a $\forall t > 0,\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{-nt}}{n}$ (on peut même prendre $t = 0$ et $x = 1$).
Posons $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^{n+1}e^{-nt}}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
• Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
• La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f qui est continue.
• Comme $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{n^2}$ (calcul simple), la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ converge.
D'après le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et que $\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ (hyper classique en séparant termes pairs et impairs dans $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

6.184 Soit $f : [0;2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(\theta) = e^{e^{i\theta}-i\theta} = e^{-i\theta}e^{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i(n-1)\theta}}{n!}$. La fonction f est continue sur le segment $[0;2\pi]$ donc l'intégrale existe. De plus, en posant $f_n(\theta) = e^{i(n-1)\theta}$, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ qui converge normalement (donc uniformément) vers f sur $[0;2\pi]$ car $||f_n||_\infty = \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ converge.

Alors, par un théorème du cours (CVU + segment), on a $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta$.

Or si $n \neq 1$, $\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta = \left[\frac{e^{i(n-1)\theta}}{i(n-1)n!}\right]_0^{2\pi} = 0$. De plus $\int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = 2\pi$ donc $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 2\pi$.

6.185 Si, pour $t \in [0;1]$ fixé, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \pm\sqrt{t}$.

Or, par récurrence, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \sqrt{t}$.

On en déduit que la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc elle converge car elle est majorée par $\sqrt{t}$. D'après ce qui précède, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \sqrt{t} = f(t)$.

On a donc convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction f.

De plus $\Big|f_{n+1}(t) - f(t)\Big| = \Big|f_n(t) - f(t) + \dfrac{1}{2}(f(t)^2 - f_n(t)^2)\Big| = \Big|f_n(t) - f(t)\Big|\Big(1 - \dfrac{f_n(t)+f(t)}{2}\Big)$.

Donc, comme $|f_0(t) - f(t)| = \sqrt{t}$, on a $|f_1(t) - f(t)| \leqslant \sqrt{t}\Big(1 - \dfrac{\sqrt{t}}{2}\Big)$ car $f_0(t) \geqslant 0$.

On en déduit donc que $|f_1(t) - f(t)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{2+\sqrt{t}}\Big(1 - \dfrac{t}{4}\Big) \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{2+\sqrt{t}}$.

On va montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}$. On vient de voir que c'était vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et si c'est vrai pour un entier $n \geqslant 1$, alors $\Big|f_{n+1}(t) - f(t)\Big| \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}\Big(1 - \dfrac{\sqrt{t}}{2}\Big)$. Reste à vérifier que $\dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}\Big(1 - \dfrac{\sqrt{t}}{2}\Big) \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}}$ qui est équivalent à $\Big(1 - \dfrac{\sqrt{t}}{2}\Big)\big(2 + (n+1)\sqrt{t}\big) \leqslant 2 + n\sqrt{t}$ qui se vérifie sans problème. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{2}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ par encadrement et on a la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

6.186 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, si $u_n = \ln\Big(1 + \dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\Big)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Ainsi, par le CSSA $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. De plus, on sait d'après le CSSA toujours que si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \ln\Big(1 + \dfrac{x^2}{k(1+x^2)}\Big)\Big| \leqslant \ln\Big(1 + \dfrac{x^2}{(n+1)(1+x^2)}\Big) \leqslant \ln\Big(1 + \dfrac{1}{(n+1)}\Big)$. Alors $||R_n||_\infty \leqslant \ln\Big(1 + \dfrac{1}{(n+1)}\Big)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_\infty = 0$ ce qui prouve la CVU de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

b. Par convergence uniforme et théorème de la double limite, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = (-1)^n \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par des calculs classiques de factorielles, on a $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\Big(1 + \dfrac{1}{k}\Big) = \ln\Big(\dfrac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4}\Big)$. En utilisant l'équivalent de Stirling, on en déduit après de multiples simplifications que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) = \ln\Big(\dfrac{2}{\pi}\Big)$.

6.187 **a.** Soit $(f, g) \in E^2$, alors il existe $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ tels que $f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\Big)$ et $g(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{|x|^\beta}\Big)$. Alors par produit $f(x)g(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{|x|^{\alpha+\beta}}\Big)$ et $\alpha + \beta > 1$ donc $fg \in E$ car fg est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f l'est sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$. Or si $f \in E$, il existe $\alpha > 1$ tel que $f(x) \underset{\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^\alpha}\Big)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec Riemann (car f continue sur $\mathbb{R}_+$). On conclut de même que f est intégrable sur $\mathbb{R}_-$ donc que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Puisque $h \in E$, on a aussi $h_n \in E$ pour tout entier $n \geqslant 1$ car si $h(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\Big)$ alors $h_n(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\Big)$ aussi car n est fixé. Ainsi, $fh_n \in E$ et fh_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question **a.** : u_n existe. On effectue dans u_n le changement de variable $u = nx$ pour avoir $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(\frac{u}{n}\Big)h(u)du$. Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$, il est alors classique de montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, en notant $g_n : u \mapsto f\left(\frac{u}{n}\right)h(u)$, on a :

- les fonctions g_n sont toutes continues et intégrables sur $\mathbb{R}$.
- la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction continue $g : u \mapsto f(0)h(u)$ par continuité de f en 0.
- Pour $n \geqslant 1$, pour $u \in \mathbb{R}$, on a $|g_n(u)| \leqslant ||f||_{\infty,\mathbb{R}}|h(u)| = \varphi(u)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car h l'est.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi = f(0)$.

6.188 **a.** Pour $x = 0$, la série diverge (série harmonique). Dès que $x \neq 0$, on a $\frac{1}{n+n^2x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après RIEMANN donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b. Soit $a > 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ CVS sur $[a;+\infty[$ et $f_n'(x) = \frac{-n^2}{(n+n^2x)^2}$ donc $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{n^2}{(n+n^2a)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2a^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Ainsi, par théorème, on a f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, par comparaison série-intégrale, classiquement en sommant les inégalités $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t(1+tx)}$ si $n \geqslant 2$, on a l'inégalité : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \ln(1+x)-\ln(x)$: $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

c. Comme les fonctions f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, si $a > 0$, on a $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{1}{n+n^2a}$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[1;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ avec le théorème de la double limite. Pour $x > 0$, $xS(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n+n^2x}$ et $||g_n||_{\infty,[0;+\infty[} = \frac{1}{n^2}$ en posant $g_n(x) = \frac{x}{n+n^2x}$.

Par le théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6.189 **a.** On sait que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\text{sh}\,(t) = 1$.

Posons $x = e^t > 1$, alors $\text{sh}\,(t) = 1 \iff e^t - e^{-t} = 2 \iff x - \frac{1}{x} = 2 \iff x^2 - 2x - 1 = 0$ qu'on résout pour trouver $x = 1 + \sqrt{2}$. Ainsi $\text{sh}\,(t) = 1 \iff t = \ln(1+\sqrt{2}) = \alpha$.

b. Posons $f_n : t \mapsto \text{sh}^{\,n}(t)$, les fonctions f_n sont toutes intégrables sur $[0;\alpha[$ car continues et bornées et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;\alpha[$ car $\forall t \in [0;\alpha[$, $\text{sh}\,(t) < 1$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;\alpha[$, $f_n(t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ et que φ est intégrable sur $[0;\alpha[$, par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{\alpha} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt = 0$.

De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;\alpha[$, $0 \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

c. Pour $n \geqslant 2$, on effectue une IPP dans I_n en posant $u(t) = \text{sh}^{\,n-1}(t)$ et $v(t) = \text{ch}\,(t)$ (u et v sont de classe C^1 sur $[0;\alpha]$) et on trouve $I_n = \int_0^{\alpha} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} u'(t)v(t)dt = \text{ch}\,(\alpha) - \int_0^{\alpha} (n-1)\text{sh}^{\,n-2}(t)\text{ch}^{\,2}(t)dt$. Or $\text{ch}^{\,2}(t) = 1 + \text{sh}^{\,2}(t)$ et $\text{ch}\,(\alpha) = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2}$ donc $I_n = \sqrt{2} - (n-1)\big(I_{n-2} + I_n\big)$ ce qui équivaut à $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

Pour $n \geqslant 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2} \geqslant nI_n + (n-1)I_n$ et $(n+2)I_{n+2} + (n+1)I_n = \sqrt{2} \leqslant (n+2)I_n + (n+1)I_n$ ce qui donne l'encadrement $\frac{\sqrt{2}}{2n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$. On en déduit donc que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

6.190 **a.** Si $x \leqslant 0$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement. Par contre, si $x > 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument par RIEMANN : $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

b. $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ diverge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, si $a > 0$, on a $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = e^{-a\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

c. Toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a;+\infty[$ et par convergence normale (donc uniforme) de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[a;+\infty[$, on a la continuité de f sur $[a;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque c'est vrai pour tout $a > 0$).
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \delta_{n,0}$ et qu'on a convergence normale donc uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[1;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour affirmer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

d. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a décroissance de $g_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$, on intègre l'inégalité $g_x(n) = f_n(x) \leqslant g_x(t)$ sur $[n-1;n]$ et sur $[n;n+1]$ l'inégalité $g_x(t) \leqslant g_x(n) = f_n(x)$ pour avoir $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$.
La fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ classiquement. L'inégalité de gauche est aussi vraie pour $n = 0$, on somme de $n = 0$ à $+\infty$ (tout converge) pour obtenir $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x)$. De même à droite en sommant pour n allant de 1 à $+\infty$: $f(x)-1 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$. Ainsi : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant 1+\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$.
On effectue dans cette intégrale le changement de variable (sur $\mathbb{R}_+^*$) $t = \varphi(u) = u^2$ avec φ qui est bien bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante, de classe C^1, et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 2\int_0^{+\infty} ue^{-xu}du$. On termine ce calcul par une petite IPP et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = \frac{2}{x^2}$. Ainsi : $\dfrac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{x^2}$ d'où $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

6.191 **a.** La fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{te^{-tx}dt}{e^t - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
f_x est prolongeable par continuité en 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f_x(t) = 1$.
Si $x \leqslant -1$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_x(t) = +\infty$ donc f_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $x > -1$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par critère de RIEMANN car $2 > 1$.
Ainsi, le domaine de définition de f est $]-1;+\infty[$.

b. Il est classique que $\forall t > 0$, $e^t > t+1$ donc $f_x(t) \leqslant e^{-tx}$ ce qui donne en intégrant sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}dt}{e^t - 1} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$. Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pour $x > 0$, on a par linéarité $f(x-1)-f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t(e^{-t(x-1)} - e^{-tx})dt}{e^t - 1} = \int_0^{+\infty} te^{-tx}dt$ (les deux intégrales convergent) après simplification. Il suffit d'intégrer par parties en posant $u(t) = t$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-tx}}{x}$, on a bien u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)$ donc $f(x-1) - f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x^2}$.
De plus, pour un réel $x > -1$, en partant de $f(x) - f(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, par une récurrence simple compte tenu de la relation ci-dessus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x+n) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x+k)^2}$ (1). La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(x+n)^2}$ converge d'après RIEMANN et sait déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n) = 0$. Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation (1), on obtient : $\forall x > -1$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+n)^2}$.

c. L'autre méthode pour transformer une intégrale en série est clairement le TITT ! On sait, série géométrique, que $\forall t > 0$, $\dfrac{1}{e^t - 1} = \dfrac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = e^{-t} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} e^{-pt} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ car $e^{-t} \in]0;1[$.

Ainsi on a, si $x > -1$, $f_x(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ avec $u_n(t) = te^{-(x+n)t}$.

Les fonctions u_n sont toutes continues et intégrales sur $\mathbb{R}_+^*$ car $n + x > 0$ (clair).

La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement vers f_x sur $\mathbb{R}_+^*$ (on en vient) et f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par une nouvelle IPP, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \frac{1}{(x+n)^2}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{(x+n)^2}$ converge par RIEMANN.

Le théorème d'intégration terme à terme permet donc de conclure que f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$.

6.192 **a.** Clairement $u_n = \dfrac{1}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ dès que $n \geqslant 2$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge d'après RIEMANN.

De plus, Φ est continue sur $]0;1]$ et $\Phi(t) = t^t = e^{t\ln(t)}$ tend vers 1 quand t tend vers 0^+ donc Φ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ et I existe bien.

b. De même, $f_{n,p}$ est continue sur $]0;1]$ et $f_{n,p}(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissance comparée, on a même un prolongement par continuité avec $f_{n,p}(0) = 0$ dès que $n \geqslant 1$. Par RIEMANN, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_{n,p}(t)dt$ converge bien car $f_{n,p}$ est intégrable sur $]0;1]$.

Si $p = 0$, alors $I_{n,0} = \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Maintenant $p \geqslant 1$ et :

On effectue une IPP en posant $u(t) = (\ln t)^p$ et $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t)v(t) = 0$ et $u(1)v(1) = \delta_{p,0}$. $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 f_{n,p}(t)dt = -\frac{p}{n+1}\int_0^1 (\ln t)^{p-1}t^n dt = -\frac{p}{n+1}I_{n,p-1}$.

Par une récurrence facile, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{n,p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} I_{n,0} = \dfrac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$.

c. $I = \displaystyle\int_0^1 \Phi(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n(\ln t)^n}{n!}dt$ par la série exponentielle.

- La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{f_{n,n}}{n!}$ converge simplement vers la fonction continue Φ sur $]0;1]$.
- Toutes les fonctions $f_{n,n}$ sont intégrables sur $]0;1]$ et $\displaystyle\int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}| = \pm \int_0^1 \frac{f_{n,n}}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.
- La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}|$ converge d'après la question **a.**.

D'après le TITT, Φ est intégrable sur $]0;1]$ et $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{k}\right)^k$ en posant $k = n+1$.

6.193 **a.** Soit $M_0 = ||f_0||_{\infty,[a;b]}$ (f_0 est continue sur un segment donc bornée). Par inégalité de la moyenne, pour $x \in [a;b]$, $f_1(x) = \displaystyle\int_a^x f_0(t)dt$ donc $|f_1(x)| \leqslant (x-a)M_0 \leqslant (b-a)M_0$. Ainsi $M_1 = ||f'||_{\infty,[a;b]} \leqslant (b-a)M_0$. De plus, $f_2(x) = \displaystyle\int_a^x f_1(t)dt$ d'où $|f_2(x)| \leqslant \displaystyle\int_a^x (t-a)M_0 dt \leqslant \frac{(x-a)^2}{2}M_0$. Par récurrence, on montre : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a;b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{(x-a)^n}{n!}M_0$ d'où $M_n = ||f_n||_{\infty,[a;b]} \leqslant \dfrac{(b-a)^n}{n!}M_0$. Comme la série exponentielle $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(b-a)^n}{n!}$ converge, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;b]$.

b. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f'_n = f_{n-1}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement (même normalement) et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ converge normalement sur $[a;b]$, on sait qu'alors $G = F - f_0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur $[a;b]$ et qu'on a $G' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n = F = G + f_0$. Ainsi G est solution de l'équation différentielle suivant $(E)\ :\ y' - y = f_0$. Les solutions de l'équation homogène sont les $y = \lambda e^x$ et on résout classiquement (E) par variation de la constante pour trouver, comme $G(a) = 0$: $G(x) = e^x \int_a^x e^{-t} f_0(t)dt$ donc on a bien $\forall x \in [a;b]$, $F(x) = f_0(x) + (x) = f_0(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f_0(t)dt$.

6.194 D'abord la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x^n}$ est continue sur le segment $\left[1; 1+\frac{1}{n}\right]$. On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = t^{\frac{1}{n}}$ avec φ de classe C^1 sur $\left[1; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$. Par théorème, on a donc la relation $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}dx = \int_1^{1+\frac{1}{n}} g(x)dx = \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ donc $u_n = \frac{1}{n}\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{\sqrt{1+t}}{t} t^{\frac{1}{n}}dt$.
Comme $\forall x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on a $1 \leqslant \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant e$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = e$.
Par conséquent, pour $n \geqslant 1$, on a $u_n = \frac{1}{n}\int_1^e f_n(t)dt$ avec $f_n : [1;e] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{\sqrt{1+t}}{t} t^{\frac{1}{n}}$ si $t \in [1;\alpha_n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t \in [\alpha_n; e]$. Il reste à utiliser le théorème de convergence dominée :
- Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux sur l'intervalle $[1;e]$.
- La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction continue $f : [1;e] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sqrt{1+t}}{t}$ car pour tout réel $t \in [1;e]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^{\frac{1}{n}} = 1$.
- Pour $n \geqslant 1$ et $t \in [1;e]$, on a $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant \psi(t) = \sqrt{1+t}$ car $\forall t \in [1;e]$, $t^{\frac{1}{n}} \leqslant t$. De plus, la fonction ψ est continue sur le segment $[1;e]$ donc y est intégrable.

On en déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^e f_n(t)dt = \int_1^e f(t)dt = \int_1^e \frac{\sqrt{1+t}}{t}dt = I$ qu'on calcule en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{1+t} \iff t = u^2 - 1 = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1 sur $[\sqrt{2}; \sqrt{1+e}]$.
Cela donne $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2u^2du}{u^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \Big[2u + \ln(u-1) - \ln(u+1)\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}}$.
Et enfin $I = \ln(\sqrt{1+e}-1) - \ln(1+\sqrt{1+e}) + 2\sqrt{1+e} - 2\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1) \sim 1.642$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{n}$.

6.195 Le graphe de f_n est un triangle, f_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-1/n}^{1/n} f_n = 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, si $n \geqslant \frac{1}{|x|}$, $f_n(x) = 0$ donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$.
Comme $f_n(0) = n$, on ne peut pas avoir de convergence simple sur une partie incluant 0.
On n'a pas convergence uniforme de cette suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}^*$ car $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}^*} = n$. Par contre, si $a > 0$, on a convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $I_a =]-\infty; a] \cup [a; +\infty[$ car dès que $n \geqslant \frac{1}{a}$, on a f_n nulle sur I_a.

D'abord les intégrales considérées existent car la fonction $f_n\Phi$ est continue sur le segment $\left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ et nulle en dehors : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\Phi(x)dx = \int_{-1/n}^{1/n} f_n(x)\Phi(x)dx$. Soit $\varepsilon > 0$, comme Φ est continue en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [-\alpha; \alpha]$, $|\Phi(x) - \Phi(0)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, dès que $n \geqslant \frac{1}{\alpha}$:

$$|I_n - \Phi(0)| = \left|I_n - \Phi(0)\int_{-1/n}^{1/n} f_n\right| = \left|\int_{-1/n}^{1/n} (\Phi(x) - \Phi(0))f_n(x)dx\right| \leqslant \int_{-1/n}^{1/n} |\Phi(x) - \Phi(0)|f_n(x)dx \leqslant \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} f_n = \varepsilon.$$

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \Phi(0)$.

6.196 Si on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^n}{1+nt}$, pour chaque $t>0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(t)$ converge par le critère spécial des séries alternées donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$: f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $a>0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [a;+\infty[$ et $\left|\sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nt}\right| \leqslant \dfrac{(-1)^n}{1+(p+1)t} \leqslant \dfrac{1}{1+(p+1)a}$ toujours par le CSSA. Il y a donc convergence uniforme (et pas normale) de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f sur $[a;+\infty[$. Comme chaque f_n est continue, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par convergence uniforme $[1\,;+\infty[$ (par exemple) on a par théorème de la double limite : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = 1$.

Comme $f_n'(t) = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}$, si $a>0$, on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [a\,;+\infty[$, $\left|\sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}\right| \leqslant \dfrac{(p+1)}{((p+1)a+1)^2}$ dès que $p(p+1)a^2 \geqslant 1$ (toujours par le CSSA) car alors $\forall t \geqslant a$, $\forall n \geqslant p$, $\dfrac{n}{(1+nt)^2} \geqslant \dfrac{(n+1)}{(1+(n+1)t)^2}$ (petit calcul). On a donc convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ sur $[a;+\infty[$, et par le théorème de dérivation d'une série de fonctions : f est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall t>0$, $f'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}$.

Prolongement : si on cherche un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$, on écrit, pour $t>0$, $t\big(f(t)-1\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t}{1+nt} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\frac{1}{t}}$ et il y a encore convergence uniforme de cette série sur $[1;+\infty[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t\big(f(t)-1\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ (classique) par le théorème de la double limite à nouveau. On peut donc conclure que $f(t) \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{t} + o\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$.

Si on veut un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers 0, on peut regrouper les termes deux par deux. En posant $g_t(u) = \dfrac{t}{\big(2ut+1\big)\big((2u+1)t+1\big)} = \dfrac{1}{2ut+1} - \dfrac{1}{(2u+1)t+1}$, on a g_t qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où : $\forall t>0$, $\dfrac{\ln(1+t)}{2t} = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_t(u)du \leqslant f(t) \leqslant g_t(0) + \int_0^{+\infty} g_t(u)du = \dfrac{t}{t+1} + \dfrac{\ln(1+t)}{2t}$. Par le théorème d'encadrement et comme $\lim\limits_{t\to0+} \dfrac{\ln(1+t)}{2t} = \lim\limits_{t\to0+} \dfrac{t}{t+1} + \dfrac{\ln(1+t)}{2t} = \dfrac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{t\to0+} f(t) = \dfrac{1}{2}$.

6.197 $f_n : s \mapsto \dfrac{1}{n^s}$ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall s>1$, $f_n^{(k)}(s) = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^s}$. On sait que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]1;+\infty[$ par le critère de Riemann. De plus, si $p \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(p)}$ qui converge normalement sur $[a;+\infty[$ (avec $a>1$) car $||f_n^{(p)}||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{(\ln n)^p}{n^a}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge ; en effet, si $1<b<a$, on a $\dfrac{(-\ln n)^k}{n^a} \underset{\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^b}\Big)$.

On applique le théorème pour chaque p et on conclut que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.

$\forall s>1$, $\zeta'(s) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^s} \leqslant 0$ donc ζ est décroissante sur $]1;+\infty[$. On pouvait aussi dire que toutes les fonctions f_n sont décroissantes sur $]1;+\infty[$, ce qui garantit que ζ l'est aussi par convergence simple seulement.

Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[2;+\infty[$ et double limite : $\lim\limits_{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{1}{n^s} = 1$.

Pour $s>1$, la fonction $g_s : t \mapsto \dfrac{1}{t^s} = e^{-s\ln t}$ est continue, intégrable sur $[1;+\infty[$ par Riemann et

décroissante. Ainsi : $\forall k \geqslant 1,\ \int_k^{k+1} g_s(t)dt \leqslant \frac{1}{k^s} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} g_s \leqslant \zeta(s)$ en sommant puisque tout converge ; et $\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} g_s(t)dt \Longrightarrow \zeta(s) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} g_s$. Or $\int_1^{+\infty} g_s = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}$.
On en déduit que $\zeta(s) \underset{1}{\sim} \frac{1}{s-1}$ par théorème d'encadrement.

6.198 Notons $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ la limite simple de cette suite de fonctions sur $[a;b]$. Comme les f_n sont continues et que la convergence de cette suite de fonctions est uniforme, on en déduit que f est continue sur $[a;b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes de sorte qu'on peut poser $\underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}\, f = f(x)$ et $\underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f = f(y)$ avec $(x,y) \in [a;b]^2$.
Comme chacune des f_n est elle aussi continue sur $[a;b]$ on peut poser $\underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}\, f_n = f_n(x_n)$ et $\underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f_n = f_n(y_n)$.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$.
• $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(x_n) \geqslant f(x_n) - \varepsilon \geqslant f(x) - \varepsilon$. Mais on a une autre inégalité $|f_n(x) - f(x)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(x_n) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$. Ainsi : $f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x_n) \leqslant f(x) + \varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $\left|\underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f_n) - \underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f)\right| \leqslant \varepsilon$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f_n) = \underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}(f)$.
• $|f_n(y_n) - f(y_n)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(y_n) \leqslant f(y_n) + \varepsilon \leqslant f(y) + \varepsilon$. Mais on a une autre inégalité $|f_n(y) - f(y)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$ donc $f_n(y_n) \geqslant f_n(y) \geqslant f(y) - \varepsilon$. Ainsi : $f(y) - \varepsilon \leqslant f_n(y_n) \leqslant f(y) + \varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $\left|\underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f_n) - \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f)\right| \leqslant \varepsilon$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f_n) = \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}(f)$.

6.199 Soit, pour $n \geqslant 1$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$. Comme $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |f_n(0)| = \frac{1}{n^2}$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge par RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ CVN sur $\mathbb{R}$: f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ car les f_n le sont.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc $f(x)$ est négative (du signe du premier terme) et $|f(x)| \leqslant |f_1(x)| = \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle y est continue et $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$.
Toutes les f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{n^2+x^2} = \left[\frac{1}{n}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{n}$. On ne peut donc pas espérer utiliser le TITT car $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\pi}{n}$ diverge d'après RIEMANN.
Posons donc $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2+x^2}$. La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f, f et toutes les S_n sont continues (et même intégrables) sur $\mathbb{R}$ par somme. Par le CSSA, $|S_n(x)| \leqslant |f_1(x)| = \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f$. Or, par linéarité de l'intégrale, $\int_{-\infty}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \pi}{k}$ et on a classiquement $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n = -\pi \ln 2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

6.200 Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\, x = 1 \Longleftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \Longleftrightarrow u^2 - 2u - 1 = 0$ en posant $u = e^x > 0$. Or $u^2 - 2u - 1 = 0 \Longleftrightarrow u = 1 \pm \sqrt{2}$. Comme $u > 0$ on a donc $\mathrm{sh}\, x = 1 \Longleftrightarrow e^x = 1 + \sqrt{2} \Longleftrightarrow x = \ln(1+\sqrt{2})$.
Les réels I_n sont bien définis car $f_n : t \mapsto \mathrm{sh}^n t$ est continue sur le segment $[0;\ln(1+\sqrt{2})]$. La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;\ln(1+\sqrt{2})[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;\ln(1+\sqrt{2})[,\ |f_n(t)| \leqslant 1$.
Par théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 0 = 0$.
Soit $n \geqslant 2$, effectuons une IPP en posant $u(t) = \mathrm{sh}^{n-1} t$ et $v(t) = \mathrm{ch}\, t$, u et v sont de classe C^1 donc $I_n = [\mathrm{sh}^{n-1} t\ \mathrm{ch}\, t]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} - \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (n-1)\mathrm{sh}^{n-2} t\ \mathrm{ch}^2 t dt$. Or $\mathrm{ch}^2 t = 1 + \mathrm{sh}^2 t$, donc $\mathrm{ch}\,(\ln(1+\sqrt{2})) = \sqrt{2}$, et on a $I_n = \sqrt{2} - (n-1)I_n - (n-1)I_{n-2} \Longleftrightarrow nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante car $\mathrm{sh}^{n+1} t \leqslant \mathrm{sh}^n t$ pour $t \in [0;\ln(1+\sqrt{2})]$.

Ainsi $I_{n-2} \geqslant I_n \Longrightarrow nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2} \geqslant (2n-1)I_n \Longleftrightarrow I_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2n-1}$.

De même $I_{n+2} \leqslant I_n \Longrightarrow (n+2)I_{n+2} + (n+1)I_n = \sqrt{2} \leqslant (2n+3)I_n \Longleftrightarrow I_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2n+3}$.

On obtient donc l'encadrement $\dfrac{\sqrt{2}}{2n+3} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2n-1}$ qui nous donne l'équivalent $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{2n}$.

6.201 Si $x = 0$, on a $\forall n \geqslant 1,\ u_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n^2x^2)}{n^2\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge ($u_n(x) > 0$) par le critère de Riemann.
Ainsi le domaine de convergence cherché est $D = \mathbb{R}$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers S sur $\mathbb{R}$ (on vient de le voir).
Toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: c'est clair !
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \dfrac{2x}{(1+n^2x^2)\ln(1+n)} = \dfrac{\varphi(nx)}{n\ln(1+n)}$ avec $\varphi : t \to \dfrac{2t}{1+t^2}$. Une identité remarquable montre que $|\varphi(t)| \leqslant 1$ avec $\varphi(1) = 1$. Ainsi $||u_n'||_\infty = \dfrac{1}{n\ln(1+n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et on sait (série de Bertrand) que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$.
Fatigué !

6.202 Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur le segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc u_n existe.

Comme $\forall t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$, la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et elle tend vers 0 car la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction f qui est nulle sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et qui vaut 1 en 0. Comme les f_n et f sont continues par morceaux et que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant 1$, le théorème de convergence dominée montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n = \int_0^{\pi/2} g = 0$. Par le CSSA, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \Big(\sum_{k=0}^{n} (-\cos t)^k\Big)dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t}dt$. Si $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos t}$, on a $|S_n - I| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t dt = |u_{n+1}|$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = I$. Or on connaît la formule de trigonométrie classique $\cos t = \dfrac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}$ donc $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos t} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \left[\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

6.203 La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -2\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc f est intégrable sur $\left]0; \dfrac{1}{2}\right]$. De plus, f est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right[$ car $f(x) \underset{1}{\sim} (x-1)\ln(1-x)$ donc se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$. Comme $\forall x \in]0;1[,\ \ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$, on a :
$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx$ avec $f_n(x) = -\dfrac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$.
Or, pour $n \geqslant 2$, $f_n'(x) = -\dfrac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}\Big)$ donc $||f_n||_\infty = f_n\left(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\right) = \dfrac{1}{en(n-1)}$ ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement par Riemann. De plus, en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et, par IPP : $\displaystyle\int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^n \ln x}{n^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n^3}$ si $n \geqslant 2$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 f_1 = -\int_0^1 \ln(x)dx = 1$, et par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions

$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $]0;1]$ qui est un intervalle borné, on a $I = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$. On pouvait utiliser le TITT.

6.204 Posons $\Delta = \mathbb{R}^* \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ -\frac{1}{n} \right\}$. Pour $x \in \Delta$, $u_n(x)$ est défini et $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur Δ d'après RIEMANN. Si $x=0$, $u_n(0) = \frac{1}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(0)$ diverge.

Soit $a > 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[a;+\infty[$ vers S et $u_n'(x) = \frac{-n^2}{(n+n^2x)^2} = -\frac{1}{(1+nx)^2}$ donc $||u_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{1}{(1+na)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2a^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Ainsi, par théorème, on a S de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, si $m \in \mathbb{N}^*$, en notant $I_m = \left] -\frac{1}{m}; -\frac{1}{m+1} \right[$, on a pour $n \geqslant m+2$, $||u_n'||_{\infty,I_m} = \frac{(m+1)^2}{(n-m-1)^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur I_m. S est C^1 sur Δ.

Les u_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, si $a>0$, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{1}{n+n^2a}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ CVN sur $[a;+\infty[$.

Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[1;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ avec le théorème de la double limite. Pour $x>0$, $xS(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n+n^2x}$ et $||g_n||_{\infty,[0;+\infty[} = \frac{1}{n^2}$ en posant $g_n(x) = \frac{x}{n+n^2x}$; par le théorème de la double limite à nouveau : $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

Prolongement : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc, par comparaison série-intégrale, classiquement en sommant les inégalités $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t(1+tx)} \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t(1+tx)}$ pour $n \geqslant 2$, on obtient : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \ln(1+x) - \ln(x)$. Ainsi $S(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

6.205 Clairement $u_n = \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$ dès que $n \geqslant 2$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge d'après RIEMANN.

De plus, $\Phi : t \mapsto t^t = e^{t\ln(t)}$ est continue sur $]0;1]$ tend vers 1 quand t tend vers 0^+ donc Φ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ et I existe bien. De même, $f_{n,p}$ est continue sur $]0;1]$ et $f_{n,p}(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissance comparée, on a même un prolongement par continuité avec $f_{n,p}(0) = 0$ dès que $n \geqslant 1$. Par RIEMANN, l'intégrale $\int_0^1 f_{n,p}(t)dt$ converge bien car $f_{n,p}$ est intégrable sur $]0;1]$.

Si $p = 0$, alors $I_{n,0} = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Maintenant $p \geqslant 1$ et :

On effectue une IPP en posant $u(t) = (\ln t)^p$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$, $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ et $u(1)v(1) = \delta_{p,0} = 0$. $I_{n,p} = \int_0^1 f_{n,p}(t)dt = -\frac{p}{n+1}\int_0^1 (\ln t)^{p-1} t^n dt = -\frac{pI_{n,p-1}}{n+1}$.

Par une récurrence facile, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$.

$I = \int_0^1 \Phi(t)dt = \int_0^1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n(\ln t)^n}{n!} dt$ par la série exponentielle.

- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{f_{n,n}}{n!}$ converge simplement vers la fonction continue Φ sur $]0;1]$.
- Toutes les fonctions $f_{n,n}$ sont intégrables sur $]0;1]$ et $\int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}| = \pm \int_0^1 \frac{f_{n,n}}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}|$ converge d'après ce qui précède.

D'après le TITT, Φ est intégrable sur $]0;1]$ (on le savait) et $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

6.206 Les I_n existent car $t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur le segment $[0;1]$. On pose le changement de variable $t = e^x - 1 = \varphi(x)$ avec φ qui est de classe C^1, bijective de $[1;\ln(2)]$ dans $[0;1]$ et on a $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x x^n dx$.
On effectue une IPP pour $n \geqslant 1$ en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = e^x$, u et v sont bien de classe C^1 sur $[0;\ln 2]$ donc $I_n = [e^x x^n]_0^{\ln 2} - \displaystyle\int_0^{\ln 2} nx^{n-1}e^x dx = 2(\ln 2)^n - nI_{n-1}$. Comme $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant 1$ pour $t \in [0;1]$, la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante donc $I_n + nI_{n-1} = 2(\ln 2)^n \geqslant I_n + nI_n \iff I_n \leqslant \dfrac{2(\ln 2)^n}{n+1}$. De même, $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2(\ln 2)^{n+1} \leqslant I_n + (n+1)I_n \iff I_n \geqslant \dfrac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+2}$. Mais ce n'est qu'un encadrement.
Posons $x = u\ln 2$ dans $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x x^n dx$ pour avoir $I_n = (\ln 2)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 e^{u\ln 2}u^n du$, puis le changement de variable $u = v^{\frac{1}{n}} = \psi(v)$ avec ψ qui est bijective de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$, on a donc la relation $I_n = \dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{n}\displaystyle\int_0^1 v^{\frac{1}{n}}e^{(\ln 2)v^{\frac{1}{n}}}dv$. Soit $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}_+$ définies par $f_n(v) = v^{\frac{1}{n}}e^{(\ln 2)v^{\frac{1}{n}}}$:

- la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : v \mapsto 2$,
- les fonctions f_n et la fonction f sont continues et positives sur $]0;1]$,
- comme $v^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$, on a $0 \leqslant f_n(v) \leqslant 2$.

Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n = \int_0^1 2 = 2$. Ainsi $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$.

6.207 D'abord, $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, clairement prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \alpha$ et on a $f(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}dx$ existe.

Pout $x > 0$, on a $\dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ et $0 < e^{-x} < 1$ donc $\dfrac{1}{e^x - 1} = e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x}$. On a donc $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big)dx$ en posant $f_n(x) = e^{-(n+1)x}\sin(\alpha x)$.

- $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f (on vient de le faire).
- f_n est clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$. Comme $|\sin x| \leqslant |x|$, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n| \leqslant \int_0^{+\infty}|\alpha|xe^{-(n+1)x}dx = \dfrac{|\alpha|}{(n+1)^2}$ (par IPP) et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge par Riemann.

Par le TITT, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\sin(\alpha x)dx = \mathrm{Im}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x+i\alpha x}dx\Big)$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \mathrm{Im}\Big(\dfrac{1}{n+1-i\alpha}\Big) = \dfrac{\alpha}{(n+1)^2+\alpha^2}$. Alors $I(\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha}{(n+1)^2+\alpha^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha}{n^2+\alpha^2}$.

Si $\alpha > 0$, $g : t \mapsto \dfrac{\alpha}{t^2+\alpha^2}$ est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$: $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant g(n) \leqslant \int_{n-1}^n g(t)dt$.
$\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big) = \Big[\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{t}{\alpha}\Big)\Big]_1^{+\infty} = \displaystyle\int_1^{+\infty} g \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha}{n^2+\alpha^2} \leqslant \int_0^{+\infty} g = \Big[\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{t}{\alpha}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$ en sommant ces inégalités. On en déduit que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} \neq 0$ donc $I(\alpha) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi}{2}$.

Et pour l'équivalent de $I(\alpha)$ en 0 ? Comme $\dfrac{I(\alpha)}{\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+\alpha^2}$, en posant $f_n(\alpha) = \dfrac{1}{n^2+\alpha^2}$, $||f_n||_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les f_n sont continues, la fonction $h : \alpha \to \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+\alpha^2}$ aussi donc $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{I(\alpha)}{\alpha} = h(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et on conclut que $I(\alpha) \underset{0}{\sim} \dfrac{\alpha\pi^2}{6}$.

6.208 D'abord, $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, clairement prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$ et on a $f(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{e^x-1}dx$ existe.

Pout $x>0$, on a $\dfrac{1}{e^x-1} = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ et $0 < e^{-x} < 1$ donc $\dfrac{1}{e^x-1} = e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x}$. On a donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big)dx$ en posant $f_n(x) = e^{-(n+1)x}\sin x$.

- $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f (on vient de le faire).
- f_n est clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$. Comme $|\sin x| \leqslant |x|$, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| \leqslant \int_0^{+\infty} xe^{-(n+1)x}dx = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ (par IPP) et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge par RIEMANN.

Par le TITT, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\sin x dx = \mathrm{Im}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x+ix}dx\Big)$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \mathrm{Im}\Big(\dfrac{1}{n+1-i}\Big) = \dfrac{1}{(n+1)^2+1}$. Alors $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$.

6.209 Pour $n \geqslant 0$, les $f_n : x \to \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x>0$, comme la suite $\Big(\dfrac{1}{n+x}\Big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge d'après le CSSA. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|R_n(x)| = \Big|\sum\limits_{k=n+1} \dfrac{(-1)^k}{k+x}\Big| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ par le CSSA donc $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ qui tend vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prolongement : Pour $n \geqslant 0$, les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. D'après ce qui précède, il y a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f. De plus, pour tout réel $a>0$, on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+a)^2}$ converge d'après RIEMANN donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a;+\infty[$. Ainsi, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, f est de classe C^1 sur $[a;+\infty[$, ce qui est vrai pour tout $a>0$ donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x>0,\ f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Par le CSSA, le signe de $f'(x)$ est celui du premier terme de cette série $(-\dfrac{1}{x^2})$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a pour $x>0$: $f(x+1)+f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1+x} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \dfrac{1}{x}$. Alors, comme f est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1) = f(1)$ donc, comme $f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$, cela donne $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
f est décroissante, pour $x>1$: $\dfrac{1}{x} = f(x)+f(x+1) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x)+f(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

6.210 Pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur $]0;1]$ (et même sur $[0;1]$ si $n \geqslant 1$) et $g_n(x) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ donc g_n est intégrable sur $]0;1]$. Par une IPP facile : $\displaystyle\int_{]0;1]} g_n = \Big[\dfrac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{t^n}{n+1}dt = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

De plus, on sait que $\forall t \in]0;1[,\ \ln(1-t)\ln(t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n \ln(t)}{n}$ en développant en série entière $\ln(1-t)$. Si on

note $f_n(t) = \dfrac{t^n \ln(t)}{n}$, on a bien les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ continues et intégrables sur $]0;1]$ car $f_n = \dfrac{g_n}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0;1]$ vers une fonction continue et $\displaystyle\int_{]0;1]} f_n = -\dfrac{1}{n(n+1)^2}$ d'après ce qui précède. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}\displaystyle\int_0^1 |f_n|$ converge : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n\ln(t)}{n}dt = -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \dfrac{t^n\ln(t)}{n}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)^2}$ par le TITT . Ainsi, en décomposant en éléments simples :
$\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)^2}\right) = 2-\dfrac{\pi^2}{6}$.

6.211 L'application $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t}$ est continue sur le segment $[0;1]$ pour tout réel $x \in]-\infty;1[$ car $1-x\sin^2(t)$ ne s'annule jamais avec ces conditions. Ainsi, f est bien définie sur $I =]-\infty;1[$.
Pour $x \in]-1;1[$, on a $\forall t \in [0;1]$, $|x\sin^2(t)| < 1$ donc $\dfrac{e^{-t}}{1-x\sin^2(t)} = e^{-t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin^{2n}(t)$ et, en posant $f_n : t \mapsto e^{-t}x^n\sin^{2n}(t)$, il vient $f(x) = \displaystyle\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt$.
La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ car $\sum\limits_{n\geqslant 0}|x|^n$ converge et car $||f_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant |x|^n$ en majorant e^{-t} et $|\sin(t)|$ par 1. Ainsi $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$. En posant $a_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-t}\sin^{2n}(t)dt$, on a le développement de f en série entière sur $]-1;1[$: $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

6.212 La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0;1]$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ et l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-t}\ln(t)dt$ est donc bien définie. On sait que $f(t) = \ln(t)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en notant $f_n : t \mapsto (-1)^n\dfrac{t^n\ln(t)}{n!}$. En posant $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, on a u et v de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0 = u(1)v(1)$, d'où $\displaystyle\int_0^1 f_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^1 t^n dt = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\times(n+1)!}$.
En mettant à part $f_0 = \ln$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement vers $f-\ln$ sur l'intervalle borné $]0;1]$ car $\forall n \geqslant 1$, $||f_n||_{\infty,]0;1]} = \left|f\left(e^{-1/n}\right)\right| = \dfrac{1}{nen!}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{nen!}$ converge clairement. Ainsi :
$\displaystyle\int_0^1(f-\ln) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\times(n+1)!}$ or $\displaystyle\int_0^1 \ln = -1$ donc $\displaystyle\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\times(n+1)!}$.
Comme $I = \displaystyle\int_0^1 f = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\times n!}$ et que la suite $\left(\dfrac{1}{n\times n!}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, on se sert du CSSA pour approcher I. Si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k\times k!}$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k\times k!}$, $|S_n - I| = |R_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)\times(n+1)!}$. Il suffit donc de choisir n tel que $\dfrac{1}{(n+1)\times(n+1)!} \leqslant 10^{-3}$ ce qui revient à prendre $n \geqslant 5$ car $6\times 6! = 6\times 720 \geqslant 1000$.
Ainsi $|I - S_5| \leqslant 10^{-3}$ et $S_5 \sim -0,7968$ alors que $I \sim -0,7966$.

6.213 Pour $n \geqslant 1$, posons $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ et impaire.
Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.
Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge d'après Riemann $(2 > 1)$.
Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction impaire f.
Toutes les fonctions f_n sont continues. Comme $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, la fonction $|f_n|$

atteint son maximum en $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ et on a $||f_n||_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers f qui est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1. Comme $f_n''(x) = \frac{2x(nx^2-3)}{(1+nx^2)^3}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n'(x) = 0$, $|f_n'|$ atteint son maximum en $\pm\sqrt{\frac{3}{n}}$ ou en 0 et $||f_n'||_\infty = f_n'(0) = \frac{1}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit $a > 0$, dès que n est assez grand ($n > \frac{3}{a^2}$) on a $||f_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = |f_n'(a)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2a^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ et la fonction f est donc de classe C^1 sur tout intervalle du type $[a;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Par imparité, la fonction f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $A > 0$ et n tel que $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > A+1$; un tel n existe car la série harmonique diverge. Comme la fonction $g_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha[$, $A < H_n - 1 = g(0) - 1 =\leqslant g_n(x) \leqslant g(0)+1$. Alors, pour tout $x \in]0;\alpha[$, on a la minoration $\frac{f(x)-f(0)}{x} = g_n(x) + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(1+kx^2)} > A$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$: f n'est pas dérivable en 0.

Pour $x > 0$ fixé, l'application $\varphi_x : t \mapsto \frac{x}{t(1+tx^2)}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on peut faire une comparaison série/intégrale. Soit $n \geqslant 1$, on intègre $\forall t \in [n;n+1]$, $\varphi_x(n+1) \leqslant \varphi_x(t) \leqslant \varphi_x(n)$ sur $[n;n+1]$ et $\varphi_x(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(n)$. On somme ensuite de 1 à $+\infty$ (tout converge) et $f(x) - \varphi_x(1) = f(x) - \frac{x}{1+x^2} \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant f(x)$ donc $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt + \frac{x}{1+x^2}$.

Or $\varphi_x(t) = \frac{x}{t} - \frac{x^3}{1+tx^2}$ donc $\int_1^a \varphi_x(t)dt = \Big[x\ln(t) - x\ln(1+tx^2)\Big]_1^a = x\ln(1+x^2) - x\ln\left(\frac{1+ax^2}{a}\right)$. En passant à la limite : $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Comme on a aussi $\frac{x}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, on ne peut pas conclure à un équivalent mais on a déjà $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Mais $xf(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ avec $g_n(x) = \frac{x^2}{n(1+nx^2)}$. La fonction g_n est croissante, positive et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2}$ donc $||g_n||_\infty = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et, par le théorème de la double-limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} xf(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

6.214 Les suites géométriques $(e^{-nx})_{n\geqslant 0}$ et $((1-x)^n)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $x \in [0;2[$.
La suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge pour $x \in [0;2[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (distinguer $x = 0$ et $f_n(0) = 0$ et $x \in]0;2[$).
Si $x \geqslant 2$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} -(1-x)^n$ donc $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ diverge.
Si $x < 0$, comme classiquement $e^{-x} > 1-x$, on a $(1-x)^n \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx})$ donc $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.
La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;2[$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $[0;2]$ donc y est bornée. On a $||f_n||_{\infty,[0;2[} \geqslant \lim\limits_{x\to 2^-} |f_n(x)|$ donc $||f_n||_{\infty,[0;2[} \geqslant |f_n(2)| = |e^{-2n} - (-1)^n| \geqslant 1 - e^{-2n}$. Ainsi la suite $(||f_n||_{\infty,[0;2[})_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0 et la convergence de la suite n'est pas uniforme sur $[0;2[$ vers la fonction nulle.
Soit $a \in [1;2[$, montrons que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;a]$.

- Si $x \in [1;a]$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx} + (x-1)^n \leqslant e^{-na} + (a-1)^n$ donc $||f_n||_{\infty,[1;a]} \leqslant e^{-na} + (a-1)^n$.
- Si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}};1\right]$, $|f_n(x)| = f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-\sqrt{n}}$ car $e^{-x} > 1-x$: $||f_n||_{\infty,[1/\sqrt{n};1]} \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.
- Comme $f_n(0) = 0$ et que f_n est positive sur $\left[0;\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, elle y admet son maximum en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ où en un réel c tel

que $f_n'(c)=0$. Or $f_n'(c)=-ne^{-nc}+n(1-c)^{n-1}$ donc $e^{-nc}=(1-c)^{n-1}$ et $f_n(c)=(1-c)^{n-1}-(1-c)^n$ d'où $f_n(c)=c(1-c)^{n-1}\leqslant c\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Comme $f_n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\leqslant e^{-\sqrt{n}}$, on a $||f_n||_{\infty,[0;1\sqrt{n}]}\leqslant \mathrm{Max}\Big(e^{-\sqrt{n}},\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Au final : $||f_n||_{\infty,[0;a]}\leqslant \mathrm{Max}(||f_n||_{\infty,[0;1\sqrt{n}]},||f_n||_{\infty,[1\sqrt{n};1]},||f_n||_{\infty,[1;a]})\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;a]$.

$f_n(0)=0$ et, si $x\in]0;2[$, $f_n(x)=(e^{-x})^n-(1-x)^n$ avec $|e^{-x}|<1$ et $|1-x|<1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n$ converge simplement sur $[0;2[$ et, en posant $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$: $f(0)=0$ et $\forall x\in]0;2[,\ f(x)=\dfrac{1}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{1-(1-x)}=\dfrac{1}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}$.

Par DL, on montre que $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{1}{2}$ alors que $f(0)=0$, comme f n'est pas continue en 0, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n$ n'est pas uniforme sur $[0;2[$ (ni sur un intervalle du type $[0;a]$) car les f_n sont toutes continues.

6.215 Si $x>0$, la fonction $h_x : t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ est continue sur $]-x;x[$ et, puisque car $x^2-t^2=(x-t)(x+t)$, $h_x(t)\underset{x^-}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2x(1+x^2)}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x-t}}\underset{x^-}{=}O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x-t}}\Big)$. De même, $h_x(t)\underset{(-x)^+}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2x(1+x^2)}}\times\dfrac{1}{\sqrt{t+x}}\underset{x^-}{=}O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t+x}}\Big)$. D'après RIEMANN, $f(x)$ existe car h_x est intégrable sur $]-x;x[$. Même chose si $x<0$ et f est impaire.

On effectue le changement de variable $u=xt$ et on trouve $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, alors $f(x_n)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f_n(u)du$ avec $f_n(u)=\dfrac{1}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}$.

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f:]-1;1[\to\mathbb{R}$ telle que $f(u)=0$ si $u\neq 0$ et $f(0)=1$. Les f_n et f sont continues sur $]-1;1[$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n(u)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}=\varphi(u)$ et φ est intégrable sur $]-1;1[$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-1}^{1}f_n(u)du=\int_{-1}^{1}f(u)du=0$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on vient d'établir que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Ou alors $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{-1/\sqrt{x}}\dfrac{du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}+\int_{-1/\sqrt{x}}^{1/\sqrt{x}}\dfrac{du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}+\int_{1/\sqrt{x}}^{1}\dfrac{du}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}$ donc $f(x)\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+x}}+\displaystyle\int_{-1/\sqrt{x}}^{1/\sqrt{x}}\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ car $1+x^2u^2>1+x$ si $|u|>\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ converge, $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{-1/\sqrt{x}}^{1/\sqrt{x}}\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=0$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, alors $f(x_n)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f_n(u)du$ avec $f_n(u)=\dfrac{1}{\sqrt{(1+x_n^2u^2)(1-u^2)}}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f:]-1;1[\to\mathbb{R}$ telle que $f(u)=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Les f_n et f sont continues sur $]-1;1[$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n(u)|\leqslant f(u)$ et f est intégrable sur $]-1;1[$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-1}^{1}f_n(u)du=\int_{-1}^{1}f(u)du=[\mathrm{Arcsin}(u)]_{-1}^{1}=\pi$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on vient de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(0)=\pi$.

On aurait pu aussi le montrer par continuité sous le signe somme.

Comme $\forall t\in]-1;1[,\ (1+t)^{-1/2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n$, on a $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2\sqrt{1-u^2}}x^{2n}u^{2n}\Big)du$ pour $x\in]-1;1[$. Posons $f_n : u\mapsto\dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2\sqrt{1-u^2}}x^{2n}u^{2n}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n$ converge simplement vers

$h : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2u^2)(1-u^2)}}$. Les f_n et f sont continues sur $]-1;1[$. Les f_n sont intégrables sur $]-1;1[$ et, en posant $u = \sin\theta$ et parité de f_n, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f_n(u)|du = \frac{(2n)!|x|^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2(2n)!|x|^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}I_{2n}$ où $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta d\theta$ est la fameuse intégrale de WALLIS. On se rappelle que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f_n(u)|du = \frac{2(2n)!|x|^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{((2n)!)^2|x|^{2n}\pi}{2^{4n}(n!)^4}$. Or avec l'équivalent de STIRLING, on trouve que $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f_n(u)|du \underset{+\infty}{\sim} \frac{|x|^{2n}}{2n\pi\sqrt{\pi}}$. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_{-1}^{1} |f_n(u)|du$ converge. Par le TITT, on peut conclure que $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1} f_n(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n((2n)!)^2x^{2n}\pi}{2^{4n}(n!)^4}$.

6.216 Pour $a > 0$, soit la fonction continue $h_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h_a(t) = \dfrac{t^{a-1}}{t+1}$. Comme $h_a(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-a}}$, la fonction h_a est intégrable sur $]0;x]$ pour $x > 0$ donc I_a est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$; et même sur $\mathbb{R}_+$ en posant $I_a(0) = 0$ (prolongement par continuité - reste d'une intégrale convergente).

Comme h_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0,\ h_a(x) = \displaystyle\int_0^1 h_a + \int_1^x h_a$, le théorème fondamental de l'intégration montre que I_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $I_a'(x) = \dfrac{x^{a-1}}{x+1}$.

Si $a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} I_a'(x) = 0$ donc, par le théorème de prolongement C^1, I_a est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $I_a'(0) = 0$.

Si $a = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} I_a'(x) = 1$ donc, par le théorème de prolongement C^1, I_a est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $I_a'(0) = 1$.

Si $a < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} I_a'(x) = +\infty$ donc I_a n'est C^1 que sur $\mathbb{R}_+^*$ et I_a n'est pas dérivable en 0.

Si $|x| > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^nx^n}{n+a}$ diverge grossièrement. Si $|x| < 1$, comme $\dfrac{(-1)^nx^n}{n+a} \underset{+\infty}{=} o(|x|^n)$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^nx^n}{n+a}$ converge. Si $x = -1$, elle converge aussi par le CSSA et si $x = 1$, elle diverge par comparaison à la série harmonique. Ainsi, le domaine de définition de S est $[-1;1[$.

S est une série entière de rayon 1, on dérive terme à terme sur $]-1;1[$: $\forall x \in]1;1[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nnx^{n-1}}{n+a}$ donc $xS'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nnx^n}{n+a} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+a-a)x^n}{n+a} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n - a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n+a}$ et on arrive à $xS'(x) + aS(x) = \dfrac{1}{1+x}$ avec $S(0) = \dfrac{1}{a}$. Les solutions de $xy' - ay = 0$ sont les $y : x \mapsto \lambda x^{-a}$. On résout classiquement sur $]0;1[$ avec variation de la constante et $S(x) = \lambda x^{-a} + x^{-a}I_a(x)$.

Or $\forall x > 0$, $\dfrac{x^a}{a} - \dfrac{x^{a+1}}{a+1} = \displaystyle\int_0^x (1-t)t^{a-1}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{a-1}}{t+1}dt \leqslant \int_0^x t^{a-1}dt = \frac{x^a}{a}$ donc $\dfrac{1}{a} - \dfrac{x}{a+1} \leqslant x^{-a}I_a(x) \leqslant \dfrac{1}{a}$ et on conclut par encadrement que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{-a}I_a(x) = \frac{1}{a}$. Ainsi $\lambda = 0$ et au final : $\forall x \in]0;1[,\ I_a(x) = x^aS(x)$.

On pouvait montrer cette formule en écrivant $I_a(x) = \displaystyle\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{a+n-1}\Big)dt$ avec le DSE de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$.

On pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kt^{a+k-1}$ la somme partielle de la série de fonctions, alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers h_a sur $[0;x]$ si $x \in]0;1[$. Les S_n sont continues et intégrables car les $f_k : t \mapsto (-1)^kt^{a+k-1}$ le sont. $|S_n(t)| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kt^{a+k-1}\right| = \left|t^{a-1}\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| \leqslant 2t^{a-1} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $[0;x]$.

Par le théorème de convergence dominée : $I_a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+a}}{n+a} = x^aS(x)$.

6.217 Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ pour tout x donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Par croissance comparée encore, la fonction f_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ donc la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, il vient $f'_n(x) = -x^n\dfrac{e^{-x}}{n!} + x^{n-1}\dfrac{e^{-x}}{(n-1)!} = \dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}(1-nx)$ donc f_n est monotone sur $\mathbb{R}_-$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, on a $\underset{\mathbb{R}+}{\mathrm{Max}}\,|f_n| = \left|f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| = \dfrac{e^{-1/n}}{n!n^n}$. Prenons un réel $a < 0$, alors $\underset{[a;+\infty[}{\mathrm{Max}}\,|f_n| = \mathrm{Max}\left(\dfrac{e^{-1/n}}{n!n^n}, |a|^n\dfrac{e^{-a}}{n!}\right)$ qui tend clairement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!} = e^{-x}e^x = 1 = f(x)$. Il y a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne peut pas être uniforme (théorème de la double limite) sur un intervalle du type $[a;+\infty[$. Comme les f_n ne sont pas bornées sur un intervalle du type $]-\infty;b]$, la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne peut pas non plus être uniforme sur un intervalle du type $]-\infty;b]$.

Par contre, soit $a > 0$, alors f_n est bornée (car continue) sur le segment $[-a;a]$ et $||f_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{a^ne^a}{n!}$ en majorant brutalement. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{a^ne^a}{n!}$ converge (sa somme vaut e^{2a}), la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ est normale sur $[-a;a]$ donc normale sur tout segment et donc uniforme sur tout segment.

6.218 Soit $x \in]0;1]$, si $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| = 1 \iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ sauf si $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ x = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ auquel cas $f(x) = x$.

Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0;1]$ (même en 0 grâce au terme x devant le sinus) et que f ne l'est pas (en tous les réels $\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$), on peut conclure que la convergence n'est pas uniforme.

6.219 Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nx}{n+1} = x$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f = \cos$.

Si on fixe $a > 0$, $\forall x \in [-a;a]$, $|f_n(x) - f(x)| = \left|\cos(x) - \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right)\right| \leqslant \left|x - \dfrac{nx}{n+1}\right| = \dfrac{|x|}{n+1} \leqslant \dfrac{a}{n+1}$ car $\cos$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ donc on a convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[-a;a]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $f_n\big((n+1)\pi\big) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ et $f\big((n+1)\pi\big) = (-1)^{n+1}$ donc $||f_n - f||_\infty = 2$ et on n'a donc pas de convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}$.

6.220 Posons, pour $n \geqslant 2$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^n\ln(n)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si $x = 1$, $f_n(1) = 0$ donc $S(1)$ est bien défini et $S(1) = 0$.
- Si $x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $S(x)$ n'est pas défini.
- Si $x > 1$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ donc $S(x)$ existe par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi, S est définie sur $D = [1;+\infty[$. De plus, $f'_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}\ln(n)} - \dfrac{n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)} = \dfrac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)}$, par conséquent $||f_|||_{\infty,D} = f_n\big(e^{1/n}\big) = \dfrac{1}{en\ln(n)}$. On sait que $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{en\ln(n)}$ diverge par comparaison série/intégrale (c'est le cas limite des séries de Bertrand). Ainsi la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ n'est pas normale sur D.

Soit $x \in D$ et $n \geqslant 2$, $|R_n(x)| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^k\ln(k)} \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^k} = \dfrac{\ln(x)}{x^n(x-1)} \times \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ (série géométrique de raison $\dfrac{1}{x}$). On sait que $\ln(x) \leqslant x-1$, or $x^n > 1$, donc $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ d'où l'on

déduit $||R_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)} \to 0$. La convergence de cette série de fonctions toutes continues sur D est donc uniforme et on en conclut que la fonction S est continue sur D.
Les fonctions continues f_n sont intégrables sur $[1;+\infty[$ car $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$ par exemple. On calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n$ par IPP en posant les fonctions $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto -\dfrac{x^{1-n}}{1-n}$ (bien sûr C^1 sur $[1;+\infty[$) car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$. Comme $u(1)v(1) = 0$, on a $\ln(n)\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n = \dfrac{1}{n-1}\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^n} = \dfrac{1}{(n-1)^2}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n = \dfrac{1}{(n-1)^2\ln(n)} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{(n-1)^2\ln(n)}$ converge, le TITT nous apprend que S est intégrable sur $[1;+\infty[$ et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} S = \sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2\ln(n)}$.

6.221 Tout le monde le connaît parfaitement !!!!

- si $(a_n, b_n) = (0,0)$, n'importe quel réel φ_n convient et on aura $0 = 0$.
- si $(a_n, b_n) \neq (0,0)$, $\dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} + i\dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \in \mathbb{U}$ donc $\exists \varphi_n \in \mathbb{R}$, $= e^{i\varphi_n}$ et on a $a_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(\varphi_n)$

et $b_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(\varphi_n)$. Alors, avec la formule de trigonométrie donnant $\cos(a-b)$, on obtient $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}(\cos(\varphi_n)\cos(nx) + \sin(\varphi_n)\sin(nx)) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+\varphi_n)$.
$I_n = \displaystyle\int_c^d (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))^2\,dx = (a_n^2+b_n^2)\int_c^d \cos^2(nx+\varphi_n)dx = (a_n^2+b_n^2)\Big[\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2nx+2\varphi_n)}{4n}\Big]_c^d$ car $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$. Ainsi, $I_n = \dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{2} + (a_n^2+b_n^2)\Big(\dfrac{\sin(2nd+2\varphi_n)}{4n} - \dfrac{\sin(2nc+2\varphi_n)}{4n}\Big)$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\dfrac{\sin(2nd+2\varphi_n)}{4n} - \dfrac{\sin(2nc+2\varphi_n)}{4n}\Big) = 0$ et $\dfrac{d-c}{4} > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on ait $\Big|\dfrac{\sin(2nd+2\varphi_n)}{4n} - \dfrac{\sin(2nc+2\varphi_n)}{4n}\Big| \leqslant \dfrac{d-c}{4}$. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, on a $I_n \geqslant \dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{2} - (a_n^2+b_n^2)\dfrac{d-c}{4} = \dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{4}$.
Les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont supposées bornées donc il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant M$ et $|b_n| \leqslant M$ d'où $(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))^2 \leqslant (|a_n| + |b_n|)^2 \leqslant 4M^2$. Ainsi, en posant les fonctions $f_n : x \mapsto (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))^2$ définies sur $[c;d]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $f = 0$ (qui est continue) par hypothèse, et on a la domination $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [c;d]$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) = 4M^2$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_c^d 0 = 0$. Mais comme on a les inégalités $0 \leqslant a_n^2(\text{ ou } b_n^2) \leqslant a_n^2+b_n^2 \leqslant \dfrac{4}{d-c}I_n$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n^2+b_n^2) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = \lim_{n\to+\infty} b_n^2 = 0$ et on bien établi que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers 0.

6.222 Si $t > 1$, on a divergence grossière de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$ par croissances comparées. Si $t \in]0;1[$, on a $\dfrac{t^n\ln(t)}{H_n} \underset{\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées encore donc la convergence simple de la série se fait sur $]0;1]$ (évident en 1).
Comme $u_n'(t) = \dfrac{1}{H_n}\big(n\ln(t)+1\big)t^{n-1}$, la fonction u_n atteint son maximum sur $]0;1]$ en $e^{-\frac{1}{n}}$ donc il vient $||u_n||_{\infty,]0;1]} = \dfrac{1}{enH_n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{en\ln(n)}$ et la convergence n'est pas normale sur $]0;1]$ par les séries de BERTRAND (on montre la divergence par comparaison série-intégrale car une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ qui admet une limite $+\infty$ en $+\infty$). Si $a \in]0;1[$, on a $||u_n||_{\infty,]0;a]} = |u_n(a)|$ dès que n est assez grand (si $e^{-\frac{1}{n}} < a$) et comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|u_n(a)|$ converge, on a la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $]0;a]$.
De plus, si $t \in]0;1[$ et $n \geqslant 1$, comme les fonctions u_k gardent un signe constant et que la suite $(H_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$

est croissante, on a $|R_n(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(t)| \leqslant \frac{1}{H_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k |\ln t| = \frac{t^n}{H_{n+1}} \times \frac{t|\ln t|}{1-t} \leqslant \frac{C}{H_{n+1}}$ en notant $C = ||g||_{\infty,[0;1]}$ si $g : t \mapsto \frac{t \ln t}{1-t}$ prolongée par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Il y a donc convergence uniforme de cette série de fonctions sur $]0;1]$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $]0;1]$, la fonction S est bien continue sur $]0;1]$ par théorème.

Toutes les u_n sont C^1 sur $]0;1]$ et $u'_n(t) = \frac{1}{H_n}\big(n\ln(t)+1\big)t^{n-1} = \frac{1}{H_n}\big(nt\ln(t)+t\big)t^{n-2}$. Soit $a \in]0;1[$, on a $\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in]0;a],\ |u'_n(t)| \leqslant \frac{(n||h||_{\infty,[0;1]}+1)a^{n-2}}{H_n}$ en notant $h : t \mapsto t\ln(t)$ prolongée par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$). Or $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(n||h||_{\infty,[0;1]}+1)a^{n-2}}{H_n}$ converge car $\frac{(n||h||_{\infty,[0;1]}+1)a^{n-2}}{H_n} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$. Ainsi $\sum_{n\geqslant 2} u'_n$ converge normalement sur $]0;a]$ et $S - u_1$ est donc de classe C^1 sur $]0;1[$. Comme u_1 l'est aussi, S est de classe C^1 sur $]0;1[$. Voyons si S est dérivable en 1.

Soit $t \in]0;1[$, alors $\frac{S(t)-S(1)}{t-1} = \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{H_k}\Big) \times \frac{\ln(t)}{t-1}$. Or $\lim_{t\to 1^-} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$. De plus, $S_n : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{H_k}$ est polynomiale donc continue en 1 et $\lim_{t\to 1^-} S_n(t) = S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{H_k}$. Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{H_n}$ diverge car $\frac{1}{H_n} \geqslant \frac{1}{n}$. Ainsi, si $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ S_n(1) \geqslant A+1$. Mais S_{n_0} est continue en 1 donc $\exists \alpha \in]0;1[$ tel que $\forall t \in [1-\alpha;1[,\ |S_{n_0}(t) - S_{n_0}(1)| \leqslant 1 \Longrightarrow S_{n_0}(t) \geqslant A+1-1 = A$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $t \in [1-\alpha;1[$, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{H_k} \geqslant S_{n_0}(t) \geqslant A$ donc $\lim_{t\to 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{H_k} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{t\to 1^-} \frac{S(t)-S(1)}{t-1} = +\infty$ donc S n'est pas dérivable en 1 ; le graphe de S admet une tangente verticale en 1.

6.223 Si $x < 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge. Si $x = 0$, $u_n(x) = \ln(2)$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge aussi. Si $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ et $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx}$ et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx}$ converge (série géométrique, $0 < e^{-x} < 1$).
Ainsi le domaine de définition D de f vaut $I = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $a > 0$, comme u_n est décroissante et positive, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n(a)$ converge ce qui précède. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[a;+\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^* = I = \bigcup_{a>0} [a;+\infty[$.
Les u_n sont décroissantes donc, par convergence simple, f est aussi décroissante (et même strictement car u_1 est strictement décroissante). D'après le théorème de la limite monotone, on a $f(I) =]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to 0^+} f(x)[$.
De plus, $u_0(x) = \ln(2)$ et $\forall n \geqslant 1,\ \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Par convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $[1;+\infty[$ et théorème de la double limite, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \ln(2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+e^{-kx})$, alors $\lim_{x\to 0^+} S_n(x) = (n+1)\ln(2)$. Comme $f_k \geqslant 0$, $f(x) \geqslant S_n(x)$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) \geqslant (n+1)\ln(2)$ (limite dans $\overline{\mathbb{R}}$). C'est vrai pour tout n, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
Pour $x > 0$, on pose $g_x : t \mapsto \ln(1+e^{-tx})$ de sorte que $u_n(x) = g_x(n)$. Comme g_x est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-tx})dt \leqslant f(x) \leqslant \ln(2) + \int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-tx})dt$ par une classique comparaison série-intégrale. Or, comme $0 < e^{-tx} < 1$ si $t > 0$, on a $\ln(1+e^{-tx}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{-nxt}}{n}$.
Comme les $t \mapsto (-1)^{n+1}\frac{e^{-nxt}}{n}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$, que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nxt}}{n}dt = \frac{1}{n^2x}$ et que

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2 x}$ converge par RIEMANN, on conclut par le TITT que $\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-tx})dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 x} = \frac{\pi^2}{12x}$.
Ainsi, l'encadrement précédent montre que $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2}{12x}$.

6.224 Si $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ et si $x = 0$, $u_n(0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ainsi, dans les deux cas, $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ diverge. De plus, si $x > 0$, par croissances comparées, $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge.
Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction f.
Comme les u_n sont positives et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour un réel $a > 0$, on a $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n(a)$ converge donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ vers f donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car toutes les u_n le sont. Mais comme $u_n(0) = \frac{1}{n+1} = ||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$ la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k+1}$. Comme R_n est décroissante et positive, $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k+1}$ pour tout $N \geqslant n$ donc, comme la série harmonique diverge, R_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas non plus uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
Toutes les u_n sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n'(x) = -\frac{n}{n+1}e^{-nx}$. Si $a > 0$, $\forall x \geqslant a$, $|u_n'(x)| \leqslant e^{-na}$ et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-na}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorème.
Par théorème de la double limite et convergence normale sur $[1;+\infty[$ de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ car $u_0(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ si $n \geqslant 1$. De plus, comme toutes les u_n sont décroissantes, la fonction f l'est aussi sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f admet une limite (finie ou $+\infty$) en 0^+ par théorème de la limite monotone. Mais, $f(x) \geqslant \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ donc en passant à la limite quand x tend vers 0, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = H_{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et que cette minoration est vraie pour tout n, on a donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

6.225 La fonction $f : x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est continue sur $]0;1[$ et $f(1-x) = f(x)$ donc, par symétrie, f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ si et seulement elle l'est sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$. Or $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ donc, par croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et f se prolonge par continuité au segment $[0;1]$ en posant $f(0) = f(1) = 0$.
Ainsi f est intégrable sur $[0;1]$ et $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx$ existe.
On sait que $\forall x \in]0;1[$, $\ln(1-x)\ln(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \ln(x)}{n}$ en développant en série entière $\ln(1-x)$. Si on note $f_n(x) = -\frac{x^n \ln(x)}{n}$, les fonctions f_n sont bien continues et intégrables sur $]0;1[$ car f_n se prolonge par continuité en 0 et en 1 en posant $f_n(0) = f_n(1) = 0$.
La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0;1[$ vers f qui est continue sur $]0;1[$. Par une IPP facile à justifier, $\int_0^1 f_n = -\left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n(n+1)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n(n+1)}dt = \frac{1}{n(n+1)^2}$. De plus, comme les f_n sont positives, $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge par RIEMANN car $\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 f_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. On en déduit par le TITT que $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n}dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{n}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. Ainsi, en décomposant

en éléments simples, on obtient classiquement :
$\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\right) = 2-\frac{\pi^2}{6}.$

6.226 D'abord, $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, clairement prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\alpha$ car $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\sin(\alpha x)}{x}=\alpha$ et $\lim_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et on a $f(x)\underset{+\infty}{=}O(e^{-x})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}dx$ existe.

Pout $x>0$, on a $\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ et $0<e^{-x}<1$ donc $\dfrac{1}{e^x-1}=e^{-x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)x}$. On a donc $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx$ en posant $f_n(x)=e^{-(n+1)x}\sin(\alpha x)$.

- $\sum_{n\geqslant0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f (on vient de le faire).
- f_n est clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x)\underset{+\infty}{=}O(e^{-x})$. Comme $|\sin x|\leqslant|x|$, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n|\leqslant|\alpha|\int_0^{+\infty}xe^{-(n+1)x}dx=\frac{|\alpha|}{(n+1)^2}$ (par IPP) et $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\frac{1}{(n+1)^2}$ converge par Riemann.

Par le TITT, $\displaystyle\int_0^{+\infty}f=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n=\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\sin(\alpha x)dx=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x+i\alpha x}dx\right)$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{n+1-i\alpha}\right)=\frac{\alpha}{(n+1)^2+\alpha^2}$. Alors $I=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha}{(n+1)^2+\alpha^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha}{n^2+\alpha^2}$.