

# PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 12

PSI 1 2025-2026

du lundi 15/12 au vendredi 19/12

- 1** Suites et séries de fonctions : voir programme précédent
- 2** Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions : voir programme précédent
- 3** Convergence uniforme et régularité : voir programme précédent
- 4** Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions : voir programme précédent
- 5** Espaces préhilbertiens réels :
  - définition d'une forme bilinéaire symétrique définie positive ;
  - forme quadratique associée, identités de polarisation, du parallélogramme ;
  - inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, de MINKOWSKI, cas d'égalité ;
  - produit scalaire et norme associée dans un espace préhilbertien réel ;
  - angle non orienté entre deux vecteurs non nuls ;
- 6** Orthogonalité :
  - vecteurs unitaires et orthogonaux dans un espace préhilbertien réel ;
  - famille libre de vecteurs orthogonaux non nuls, relation de PYTHAGORE ;
  - sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace (en somme directe) ;
  - relation entre les orthogonaux et la somme, l'intersection ;
- 7** En dimension finie :
  - espaces euclidiens, bases orthonormales ;
  - procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT, existence de bases orthonormales ;
  - relations entre les coordonnées et le produit scalaire, la norme dans une B.O.N. ;
  - supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien ;

## QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir la convergence normale d'une série de fonctions sur une partie (déf. 6.6)
- 2 énoncer le théorème d'intégration terme à terme par convergence uniforme sur un segment (th. 6.9)
- 3 énoncer le théorème d'interversion série/dérivée pour les séries de fonctions (th. 6.13)
- 4 définir ce qu'est un produit scalaire et la norme euclidienne associée dans un espace réel (déf. 7.3)
- 5 énoncer le théorème sur l'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT (th. 7.8)
- 6 énoncer les relations entre les coordonnées des vecteurs et le produit scalaire, la norme (th. 7.10)
- 7 énoncer le résultat sur la projection orthogonale sur  $F$  de dimension finie dans  $E$  préhilb. (prop. 7.14)
- 8 prouver l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans un espace préhilbertien réel (prop. 7.1 et th. 7.4)
- 9 prouver l'inégalité de MINKOWSKI (triangulaire) dans un espace préhilbertien (prop. 7.2 et th. 7.3)
- 10 prouver que si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases orthonormées,  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^T$  (rem. 7.16)

**Prévision pour la prochaine semaine :** tout sur les espaces préhilbertiens et intégrales à paramètre