

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 7

ALGÈBRE BILINÉAIRE

7.1 Espaces préhilbertiens

7.1 Centrale PSI 2011 d'après RMS Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

- a. Si $\dim E = n$, montrer que $(\mathcal{B} \text{ est une base orthonormale de } E) \iff (\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2)$.
- b. Est-ce encore vrai si on ne suppose plus E de dimension n ?

7.2 Soit E un espace préhilbertien réel et $f : E \rightarrow E$ surjective telle que : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)$.
Montrer que f est un endomorphisme de E .

7.2 Espaces euclidiens et hermitiens

7.3 Polynômes orthogonaux : Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $w \in C^0(I, \mathbb{R}_+^*)$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, t \mapsto t^n w(t)$ est intégrable sur I . Ainsi, en notant E l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $t \mapsto f^2(t)w(t)$ est intégrable sur I , E est un espace préhilbertien réel (qui contient les fonctions polynomiales) en le munissant du produit scalaire $(f|g) = \int_I fgw$. En appliquant le procédé de GRAM-SCHMIDT à $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on identifie les polynômes aux fonctions polynomiales), on a l'existence et l'unicité de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n, P_n$ est un polynôme unitaire et $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m \implies (P_n|P_m) = 0$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\|^2 = (P_n|XP_{n-1})$.
- b. Établir que P_n est scindé à racines (les $\alpha_{n,k}$) simples $\inf(I) < \alpha_{n,1} < \dots < \alpha_{n,n} < \sup(I)$.
- c. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, P_{n+2} = (X + a_n)P_{n+1} + b_n P_n$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(L_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ les polynômes d'interpolation de LAGRANGE associés aux n racines simples de P_n et les réels $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \Delta_{n,k} = \int_I L_{n,k} w = (L_{n,k}|1)$.

d. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_I Pw = \sum_{k=1}^n P(\alpha_{n,k}) \Delta_{n,k}$.

On prend dorénavant $I = [-1; 1]$ et $w(t) = 1$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle la suite des polynômes de LEGENDRE et on note toujours $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,n}$ ses racines simples dans $] -1; 1[$. On pose $U_n = \frac{n!}{(2n)!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

e. Déterminer le degré et le coefficient dominant de U_n .

f. Vérifier que si $n \neq m$, on a $(U_n|U_m) = 0$. Qu'en déduire ?

Soit maintenant une fonction $f \in C^{2n}([-1; 1], \mathbb{R})$.

g. Justifier que : $\exists! H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, H(\alpha_{n,k}) = f(\alpha_{n,k})$ et $H'(\alpha_{n,k}) = f'(\alpha_{n,k})$.

h. Soit $x_0 \in [-1; 1] \setminus \{\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,n}\}$ et $\Phi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = f(x) - H(x) - K \prod_{k=1}^n (x - \alpha_{n,k})^2$

où K est choisi pour que $\Phi(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\eta \in [-1; 1]$ tel que $K = \frac{n!f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}$.

i. Justifier l'existence de $M_{2n} = \sup_{x \in [-1; 1]} |f^{(2n)}(x)|$. Montrer que $\forall x \in [-1; 1], |f(x) - H(x)| \leq \frac{n!M_{2n}P_n^2(x)}{(2n)!}$.

j. Montrer que : $\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{k=1}^n \Delta_{n,k} f(\alpha_{n,k}) \right| \leq \frac{n!M_{2n}\|P_n\|^2}{(2n)!}$.

- 7.4** Centrale PSI 2012 Soit E euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E .
- Si \mathcal{F} est une base orthonormale, pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, justifier qu'il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(v|v_k) = a_k$; vous en donnerez une expression.
 - Donner une **CNS** sur \mathcal{F} pour qu'elle vérifie : $\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $\exists v \in E$, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(v|v_k) = a_k$.
 - Donner une **CNS** sur \mathcal{F} pour qu'elle vérifie : $\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $\exists! v \in E$, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(v|v_k) = a_k$.
- 7.5** Mines PSI 2010 d'après RMS Soit E un espace euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E et une famille $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ tel que $\|v_1\| + \dots + \|v_n\| < 1$. On pose : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $w_i = e_i + v_i$. Montrer que (w_1, \dots, w_n) est une base de E .
- 7.6** Mines PSI 2011 d'après RMS Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, x_1, \dots, x_p des éléments de E , \mathcal{H} l'ensemble des hyperplans de E . Montrer : $\exists H_0 \in \mathcal{H}$, $\forall H \in \mathcal{H}$, $\sum_{k=1}^p d(x_k, H_0)^2 \leq \sum_{k=1}^p d(x_k, H)^2$.

7.3 Projections et distance à un sous-espace

- 7.7** Matrices de HOUSEHOLDER Soit U un vecteur unitaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (que l'on identifie à \mathbb{R}^n ce qui donne un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n tel que $\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1$) et $A = I_n - 2U^t U$. Déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à A . Faire de même avec $B = I_n - U^t U$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan $P = \text{Vect}(v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 0, 1))$.
- 7.8** Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } p$ et $(\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \cap \text{Im } q$ sont orthogonaux.
- 7.9** Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base orthonormée (x_1, \dots, x_p) .
- Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F)$ où p_F est projection orthogonale p_F sur F est $A = \sum_{k=1}^p X_k^t X_k$ où $X_k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_k)$.
 - Donner la projection orthogonale sur le plan $P : x + y + z - t = x - y - z - t = 0$ dans \mathbb{R}^4 .
- 7.10** Centrale PSI 2007 d'après RMS Soit p, q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien. Montrer : $p \circ q = 0 \implies q \circ p = 0$. Qu'en est-il si les projecteurs ne sont pas orthogonaux ?
- 7.11** CCP PSI 2008 d'après RMS Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E .
- Montrer que $\|p(x)\|^2 = (p(x)|x)$ pour tout x de E .
 - Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E , $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rang}(p)$.
- 7.12** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$; on note $F = X \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Montrer que $\exists! Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k \in F$, $m = \inf_{P \in F} \int_0^{+\infty} (1 - P(t))^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (1 - Q(t))^2 e^{-t} dt$.
 - Posons $R = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X + j)$, en utilisant $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$, établir que $\forall q \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $R(q) = 0$.
 - Comparer alors m et $R(0)$. Calculer $R(-1)$ et en déduire la valeur exacte de m .

7.4 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

7.13 Mines PSI 2015 Oriana Peltzer

Soit A et B deux espaces vectoriels d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que A et B sont supplémentaires dans E si et seulement s'il existe un produit scalaire sur E tel qu'avec ce produit scalaire, B soit l'orthogonal de A .

7.14 Centrale Maths1 PSI 2016 Arthur Robbe

Soit E un espace euclidien de dimension n , $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux familles de vecteurs de E telles que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $(x_i | x_j) = (y_i | y_j)$.

a. Si $n = 2$ et (x_1, x_2) est libre, montrer que (y_1, y_2) est libre.

b. On revient au cas général, montrer que si X et Y sont libres, alors si on définit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ par les conditions $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\varphi(x_i) = y_i$, alors $\forall x \in E$, $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.

c. Si X n'est pas libre, montrer qu'il existe encore $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\varphi(x_i) = y_i$ et qui vérifie $\forall x \in E$, $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. Montrer qu'on peut même imposer que cette isométrie soit directe.

7.15 CCP PSI 2016 Rogelio Escalona II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, $E = \mathbb{R}^n$ canonique et f canoniquement associé à A .

a. Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x) | y) = -(f(y) | x)$.

b. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(A)$. Qu'en déduit-on ?

c. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

d. Justifier que f induit sur $\text{Im}(f)$ un endomorphisme antisymétrique injectif.

e. Si $n = 3$, justifier qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B} telle que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une base \mathcal{B}' de E formée de vecteurs propres de f ?

7.16 CCP PSI 2016 Samy Essabar I

Soit $\Phi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$.

a. Montrer que Φ est un produit scalaire.

b. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^2 - at - b)^2 dt$.

7.17 ENS Cachan PSI 2017 Vincent Meslier I

Soit un entier $n \geq 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

a. Prouver que E est un espace vectoriel. Quelle est la dimension de E ?

b. Soit $u_k = \frac{1}{k!} (X-1)^k$ avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .

c. Quels sont les coefficients de P dans la base \mathcal{B} ?

En déduire un produit scalaire pour lequel \mathcal{B} est une base orthonormale.

d. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(P) = (X-1)P'$. φ est-il un endomorphisme ? Que vaut $\varphi(u_k)$?

En déduire que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

e. Montrer que φ est inversible et donner son inverse.

7.18 ENS Cachan PSI 2017 Sam Pérochon I

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de sa norme euclidienne associée $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$. Soit $n \geq 1$, une famille (v_1, \dots, v_n) de vecteurs unitaires de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

a. On suppose les v_k deux à deux orthogonaux. Montrer que $\left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k \right\| = \sqrt{n}$.

b. On ne suppose plus les v_k deux à deux orthogonaux. Soit (X_1, \dots, X_n) une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes avec $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$.

On pose $U = \left\| \sum_{k=1}^n X_k v_k \right\|^2$. Que vaut $E(U)$?

c. En déduire qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ telle que $\left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k \right\| \leq \sqrt{n}$.

d. Montrer : (v_1, \dots, v_n) est une famille orthonormale $\iff \forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k \right\| = \sqrt{n}$.

e. On suppose que (v_1, \dots, v_n) n'est pas une famille orthonormale.

Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ telle que $\left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k \right\| > \sqrt{n}$.

7.19 Centrale Maths1 PSI 2017 Agathe Maldonado

Soit E euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur de E .

a. Questions de cours : qu'est-ce qu'un espace euclidien ? quelles sont les particularités d'un projecteur ? qu'est-ce qu'une base orthonormée ?

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique (c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | p(y) \rangle = \langle p(x) | y \rangle$).

c. Si p est orthogonal, que vaut $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2$?

Soit p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} vaut tA si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

d. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p^*(y) \rangle$.

e. Montrer que $\text{Ker}(p^* \circ p) = \text{Ker}(p)$.

7.20 Mines PSI 2017 Romain Delon I

E désigne un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = (\mathcal{L}(E))^*$ (ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{L}(E)$) définie par $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{L}(E), \varphi(u)(v) = \text{Tr}(u \circ v)$.

Montrer que φ est un isomorphisme.

7.21 Mines PSI 2017 Maxime Lacourcelle II

Soit E un espace euclidien de dimension n .

a. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (f_1, \dots, f_n) \in E^n, M = ((e_i | f_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

b. La réciproque est-elle vraie ?

7.22 Mines PSI 2017 Claire Meunier I

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)^2 dt$.

Montrer que cette fonction admet un minimum absolu, le calculer en dimension quand $n = 2$.

7.23 CCP PSI 2017 Tom Huix II

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

a. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Si $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - u_1t - u_2t^2 - \dots - u_nt^n)^2dt$.

b. Montrer que f admet un minimum absolu sur \mathbb{R}^n .

On note ce minimum ρ_n atteint en $a = (a_1, \dots, a_n)$ et on pose $P = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $Q = 1 - \sum_{j=1}^n a_j \prod_{i=1}^j (X + i)$.

c. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Calculer $(X^k|1 - P)$ pour en déduire que $Q(k) = 0$.

d. Comparer alors ρ_n et $Q(0)$. Calculer $Q(-1)$ et en déduire la valeur exacte de ρ_n .

7.24 Petites Mines PSI 2017 Pauline Lamagnère II

Soit E un \mathbb{R} -espace euclidien et u un vecteur de E .

Soit p le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)$ et s la réflexion d'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

a. Pour tout vecteur x de E , expliciter $p(x)$ et $s(x)$.

Soit E un espace normé et a et b deux vecteurs différents de E de même norme.

b. Montrer qu'il existe un unique hyperplan de E tel que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.

7.25 Mines PSI 2018 Jean Boudou II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

On suppose que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2$. Montrer que \mathcal{B} est une base orthonormale de E .

7.26 Mines PSI 2018 Amélie Guyot I

a. Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit L_k par $L_k(t) = e^t \frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^k)$.

c. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer son degré et son coefficient dominant.

d. Si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $(L_k|X^p)$ pour $p \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$. Calculer aussi $(L_k|X^k)$.

e. En déduire que (L_0, \dots, L_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\|L_k\|$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

On pose, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P_k = \frac{L_k}{\|L_k\|}$.

f. Calculer $P_k(0)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

g. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F , de F^\perp .

h. Calculer $\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 - a_1t - \dots - a_nt^n)^2 e^{-t} dt$.

7.27 Mines PSI 2018 Lucie Jandet II

a. Montrer que $\theta : (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{Tr}(^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner $\dim(H)$.

c. Calculer $d(J, H)$ si $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7.28 Mines PSI 2018 Julien Langlais I

Soit $]a; b[\subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement positive et intégrable sur $]a; b[$.

a. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère (P_0, \dots, P_n) l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT de la base canonique $(1, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans toute la suite de l'exercice k désigne un entier dans $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

b. Montrer qu'il existe $(a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$ tel que $XP_k = a_k P_{k+1} + b_k P_k + c_k P_{k-1}$.

c. Si $k \geq 2$, montrer que $c_k = a_{k-1}$.

d. Avec $\langle P_k, 1 \rangle$, montrer que P_k possède une racine réelle de multiplicité impaire dans $]a; b[$.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in]a; b[$ les racines de multiplicités impaires de P_k dans l'intervalle $]a; b[$.

e. En considérant $Q_k = \prod_{i=1}^p (X - x_i)$ et $\langle P_k, Q_k \rangle$, montrer que $p = k$.

f. En déduire que les racines complexes de P_k sont toutes réelles, toutes dans $]a; b[$ et toutes simples.

7.29 Mines PSI 2018 Charlotte Nivellet II

Soit E un espace euclidien, un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq \dim(E)$ et $(v_k)_{1 \leq k \leq p}$ une famille de vecteurs de E .

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p (x|v_k)^2$$

$$(ii) \quad \forall x \in E, x = \sum_{k=1}^p (x|v_k)v_k$$

(iii) (v_1, \dots, v_p) est une base orthonormée de E .

7.30 CCP PSI 2018 Martin Gros I

Soit $\Phi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

a. Φ est-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$?

b. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Trouver $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$.

7.31 CCP PSI 2018 Pauline Lamaignère I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(M, N) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} n_{i,j}$ si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$N = (n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $H = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} = 0\}$.

b. Calculer $\inf_{M \in H} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$.

7.32 CCP PSI 2018 Benoit Souillard I

On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

b. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

7.33 Petites Mines PSI 2018 Marie-Jeanne Paul I

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dans lequel on considère $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - z - t = x - y + z - t = 0\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F .

7.34 ENS Cachan PSI 2019 (OdIT 2019/2020 X-ENS PSI planche 44) Pierre Fabre

Sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E , on appelle pseudo produit scalaire une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique positive (mais pas forcément définie positive).

a. Soit $c > 0$, montrer que : $\forall s \in]1; 2[, I(c) = \int_0^{+\infty} t^{1-s} e^{-ct} dt$ existe.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $F_t(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j e^{-(a_i + a_j)t}$ et $G(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j (a_i + a_j)^{s-2}$.

b. Montrer que F_t et G sont des pseudo produits scalaires. Indication : montrer $I(c) = c^{s-2} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

On pose $K(a, b) = (a + b)^{s-2}$. On admet l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour un pseudo produit scalaire.

c. Soit $(k, \ell, m, p) \in \llbracket 1; n \rrbracket^4$ avec $1 \leq k \leq \ell \leq n$ et $1 \leq m \leq p \leq n$. Montrer que :

$$\sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=m}^p K(a_i, a_j) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=k}^{\ell} \sum_{j=k}^{\ell} K(a_i, a_j) \right) \left(\sum_{i=m}^p \sum_{j=m}^p K(a_i, a_j) \right)}.$$

On pose $g_{A,B}(x) = \int_A^B K(a, x) da$. On admet que $\int_A^B g_{C,D}(x) dx \leq \sqrt{\int_A^B g_{A,B}(x) dx \int_C^D g_{C,D}(x) dx}$.

On pose, pour $s \in]1; 2]$ et $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$: $\rho_s(x, y) = \left[\frac{x^s + y^s}{2} - \left(\frac{x+y}{2} \right)^s \right]^{1/s}$.

d. Montrer que $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\rho_s(x, y) + \rho_s(y, z) \geq \rho_s(x, z)$.

e. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\rho_s(x, y) = 0 \iff x = y$.

7.35 Centrale Maths1 PSI 2019 Mathis Chénet

a. Soit E un espace préhilbertien réel. Rappeler l'inégalité de BESSEL.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, $E = C^0([a; b], \mathbb{R})$ et $K : [a; b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour $f \in E$, on définit $T(f) = g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in [a; b]$, $g(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy$.

b. Montrer que $\varphi : (u, v) \mapsto \int_a^b u(t) v(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .

c. Montrer que T est un endomorphisme de E .

Prenons $\lambda \in \text{Sp}(T)$ et (f_1, \dots, f_p) une famille orthonormée de $E_\lambda(T)$.

d. Montrer que $\forall x \in [a; b]$, $\lambda^2 \sum_{i=1}^p (f_i(x))^2 \leq \int_a^b K(x, y)^2 dy$.

7.36 Mines PSI 2019 Julien Tissot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\theta(M, N) = \text{Tr}({}^t M N)$.

On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ et $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que θ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

c. Calculer la distance de J à H .

7.37 Mines PSI 2019 Quentin Vacher I

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E qui vérifie la relation : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$. Montrer que \mathcal{B} est une base orthonormée de E .

7.38 CCP PSI 2019 Thomas Brémond et Lucas Maisonnave II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M, N) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} n_{i,j}$.

On définit aussi l'ensemble $H = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} = 0\}$.

a. Montrer que φ définit un produit scalaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $D = \inf_{M \in H} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$.

7.39 CCP PSI 2019 Romain Cornuault II

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

a. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

c. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

7.40 CCP PSI 2019 Perrine Hoffmann II

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$.

On pose aussi $\Sigma = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Exhiber une base orthonormale de Σ^\perp .

d. Trouver la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à Σ^\perp . Et celle de M à Σ ?

7.41 Petites Mines PSI 2019 Thibault Maury II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(\cdot|\cdot) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(M|N) = \text{Tr}({}^tMN)$.

On pose $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

c. Montrer que $S_n(\mathbb{R}) = (A_n(\mathbb{R}))^\perp$.

d. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée. Calculer $d = \inf_{S \in S_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (m_{i,j} - s_{i,j})^2 \right)$.

7.42 Centrale Maths1 PSI 2021 Paul Jaïs

Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = e^{-x^2}$ et $(\cdot|\cdot)$ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$.

- a. Montrer que Φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que, pour tout entier n , il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi^{(n)}(x) = P_n(x)\Phi(x)$. Quel est le degré de P_n ?
- b. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- c. Montrer que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.
- d. Montrer que P_n n'admet que des racines réelles simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7.43 Mines PSI 2021 Robin De Truchis I

Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection orthogonale p sur le plan $P : x+y+z = 0$.

7.44 CCINP PSI 2021 Margot Reungoat II

Soit E un espace préhilbertien et p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

7.45 Mines-Télécom PSI 2021 Margot Reungoat I (sur 6 points)

- a. Soit E un espace euclidien, x un vecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E . Rappeler la définition de la distance de x à F et exprimer sa valeur avec une projection orthogonale.

Dans la suite de cet exercice, on prend $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$ et $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

- b. Donner une base orthonormale de F .
- c. On prend $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $d(M, F)$.

7.46 Centrale Maths1 PSI 2022 Louis Lacarrieu

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

On note, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $B_k = \frac{X^k}{k!}$ et $L_k : t \mapsto \frac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$ où $f_k : t \mapsto e^{-t} t^k$.

- a. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- b. La famille $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ est-elle une base orthonormale de E ?
- c. Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E .

Donner le degré et le coefficient dominant de L_k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

- d. La famille \mathcal{L} est-elle une base orthonormale de E ?
- e. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F , de F^\perp .
- f. Calculer $\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \dots - a_n t^n)^2 e^{-t} dt$.

7.47 Centrale Maths1 PSI 2022 Margaux Millaret

Soit $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $E = C^0(I, \mathbb{R})$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)dt$ et $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

On définit sur E les fonctions A et B par $A(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $B(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f(t)dt$ pour $f \in E$ et $x \in I$.

- Montrer que A et B sont deux endomorphismes de E .
- Montrer que $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle A(f), g \rangle = \langle f, B(g) \rangle$.
- En déduire que les valeurs propres de $B \circ A$ sont positives.
- Pour $f \in E$ et $x \in I$, montrer que $A(f)(x)^2 \leq x \int_0^x f(t)^2 dt$.
- En déduire qu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que $\forall f \in E$, $\|A(f)\| \leq K\|f\|$.
- Montrer que les valeurs propres de $B \circ A$ sont les $\frac{1}{(2n+1)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

7.48 CCINP PSI 2022 Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lequel on définit, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $\langle X, Y \rangle = X^T Y \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E . On note $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne associée.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in E$ fixés, on définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(X) = \|AX - Y\|$.

- Montrer que $f(X) = \inf_{Z \in E} (f(Z))$ si et seulement si $A^T(AX - Y) = 0$.

7.49 CCINP PSI 2022 Matis Viozelange II

On note $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et, pour $(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$. On pose F le sous-espace de E composé des fonctions affines de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , c'est-à-dire $F = \{f \in E \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0; 1], f(x) = ax + b\}$.

- Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^1 t^n \ln(t)dt$ et calculer sa valeur.
- Déterminer le projeté orthogonal de $f : x \mapsto x \ln(x)$ sur F .
- Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|g_{a,b}\|$ où $g_{a,b} : x \mapsto ax + b - x \ln(x)$.

7.50 Centrale Maths1 PSI 2023 Maxence Prieur

Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $((X-1)^k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

7.51 Centrale Maths1 PSI 2023 Marie-Lys Ruzic

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le vecteur

$b = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ associé à B . Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on lui associe canoniquement le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \|u(x) - b\|^2$.

- L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet-elle une solution ?
- Montrer que f admet un minimum global sur \mathbb{R}^3 .
- Ce minimum est-il atteint en un unique point de \mathbb{R}^3 ?
- Montrer l'équivalence entre (i) : $u(x) - b \in (\text{Im}(u))^\perp$ et (ii) : $A^\top AX = A^\top B$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette son minimum en $x \in \mathbb{R}^3$.

7.52 CCINP PSI 2023 Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B)$.

On pose aussi $\Sigma = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Exhiber une base orthonormale de Σ^\perp .
- Trouver la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à Σ^\perp . Et celle de M à Σ ?

7.53 CCINP PSI 2023 Rémi Darrieumerle II On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ en distinguant selon la parité de n .
- Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

7.54 CCINP PSI 2023 Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(P|Q) = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$.

- Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Calculer $d(1, H)$ où $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

7.55 Mines PSI 2024 Lucie Girard II

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E .

- Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

On prend, pour les deux prochaines questions, $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

- Déterminer F^\perp et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par $(P|Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.
- Déterminer F^\perp et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
- Donner une condition suffisante pour que $F = (F^\perp)^\perp$.
- La condition suffisante de la question précédente est-elle nécessaire ?

Question supplémentaire :

- si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E , est-ce que F est un ouvert ou un fermé ?

7.56 Mines PSI 2024 Mathis Laruelle I

On considère \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\}$ et p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F .

- a. Trouver une base orthonormale de F et la compléter en une base orthonormale \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 .
- b. Déterminer les matrices de p et s dans la base \mathcal{B}' .
- c. Déterminer les matrices de p et s dans la base \mathcal{B} .

7.57 Mines PSI 2024 Jasmine Meyer II

Soit E un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et p un projecteur de E .

Montrer que p est orthogonal si et seulement si p est 1-lipschitzien.

7.58 CCINP PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur orthogonal de E tel que $\text{rang}(p) = r$.

- a. Montrer que $\forall x \in E, (p(x)|p(x)) = (x|p(x))$.
- b. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(v_i)\|^2 = r$.

7.59 CCINP PSI 2024 Clément Lacoste II

a. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\exists! u_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_{-1}^1 P(t)u_n(t)dt$.

c. Déterminer u_2 .

7.60 Mines-Télécom PSI 2024 Émile Gauvrit I

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dans lequel on considère $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - z - t = x - y + z - t = 0\}$.

- a. Déterminer la matrice A dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F .
- b. Que constate-t-on sur cette matrice ? Était-ce prévisible ?

7.5 Officiel de la Taupe

7.61 OdIT 2013/2014 Centrale PSI planche 120II

Soit U_1, \dots, U_p des parties non vides et 2 à 2 distinctes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ telles que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, \text{card}(U_i \cap U_j) = a$. On définit $\alpha_k = \text{card}(U_k)$ pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ par $a_{i,j} = 1$ si $j \in U_i$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

- a. Calculer $A^t A$ en fonction de a et α_k .
- b. Que peut-on dire du cardinal de $E = \{k \in \llbracket 1; p \rrbracket \mid a = \alpha_k\}$?
- c. En déduire que $A^t A$ est inversible. Montrer que $p \leq n$.

7.62 *OdIT 2013/2014 CCP PSI planche 246II*

Soit $n \geq 2$, à quelle condition sur les réels a_0, \dots, a_n l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit-elle un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$? En supposant cette condition réalisée, trouver une base orthonormale de E . On pose $F = \{P \in E \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$. Quelle est la distance de X^n à F ?

7.63 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 162II*

Montrer que $\Phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_{-1}^1 f'(t)g'(t)dt$ définit un produit scalaire sur l'espace E des fonctions de classe C^1 sur $[-1; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Trouver une base orthonormale de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$.

7.64 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 241II*

- Montrer que $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire et de monôme de plus haut degré X^n .
- Montrer que si n est pair (resp. impair), P_n est pair (resp. impair).
- Montrer que P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

7.65 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 291II* Soit a_0, \dots, a_n des réels.

- À quelle condition $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
- Sous cette condition, donner une base orthonormale pour ce produit scalaire.
- Trouver l'orthogonal de $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$ et déterminer la distance de X^n à F .

7.66 *OdIT 2014/2015 ENSAM PSI planche 321II*

- Montrer que si A et B sont deux matrices réelles symétriques et positives, on a $\text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.
- On pose $\|M\| = \text{Tr}({}^tMM)$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$.

7.67 *OdIT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 323II*

- Montrer que l'ensemble S des matrices symétriques et l'ensemble A des matrices antisymétriques sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire $(M|N) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}n_{i,j}$.
- Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée. Calculer $d = \inf_{M \in S} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (c_{i,j} - m_{i,j})^2$.

7.68 *OdIT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 325II*

- Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E euclidien de dimension n vérifiant $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2$. Montrer que c'est une base orthonormale de E .
- On ne suppose plus que E est de dimension finie mais on suppose la famille libre, montrer que c'est encore une base orthonormale.

7.69 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 129II*

- Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de E euclidien, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On appelle matrice de GRAM associée la matrice $G = ((u_i|u_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Exprimer G en fonction de la matrice M dont les colonnes sont les coordonnées de u_i dans \mathcal{B} .
 - Montrer que $\det(G) \geq 0$ et que $\det(G) = 0 \iff (u_1, \dots, u_n)$ est liée.
 - Généraliser ce résultat pour une famille de $p < n$ vecteurs.

7.70 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 191*

Montrer que, si A et B sont deux matrices, $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$.

Soient $a > 0$, $d_1 \geq a$ et $d_i > a$ pour $i \geq 2$; montrer que la matrice A de coefficients $a_{i,i} = d_i$ et $a_{i,j} = a$ pour $i \neq j$, est inversible.

Soit $a > 0$, F_1, \dots, F_m des sous-ensembles de $\llbracket 1; n \rrbracket$ deux à deux distincts tels que $\text{card}(F_i \cap F_j) = a$ si $i \neq j$; montrer que $m \leq n$.

7.71 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 40I*

Montrer que ϕ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\phi(P)(X) = P(-X)$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

7.72 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 212II abordable dès la 1^{ère} année*

On munit $E = C^2([0; 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.

a. Montrer que (ch, sh) est une base de $A = \{y \in E \mid y'' = y\}$.

b. Montrer que $\forall f \in A, \forall g \in E, \langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculer $\langle \text{sh}, \text{ch} \rangle, \|\text{ch}\|^2$ et $\|\text{sh}\|^2$.

c. Montrer que si $f \in A$ et $g \in B = \{y \in E \mid y(1) = y(0) = 0\}$, alors $\langle f, g \rangle = 0$.

d. Pour $f \in H = \{y \in E \mid y(1) = 1, y(0) = \text{ch } 1\}$, calculer $\langle f, \text{sh} \rangle$ et $\langle f, \text{ch} \rangle$.

e. Déterminer les coordonnées dans (sh, ch) du projeté orthogonal de $f \in H$ sur A ?

f. En déduire $M = \inf_{f \in H} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt$.

7.73 *OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 245II abordable dès la 1^{ère} année*

Dans un espace E euclidien de dimension n , soit deux familles (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) de vecteurs de E et $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. On suppose que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (x_i | x_j) = (y_i | y_j)$.

a. Montrer que (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si (y_1, \dots, y_n) est libre.

b. Montrer que F et G sont de même dimension.

7.74 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 207II*

Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa dimension et calculer $d(1, E)$.

7.75 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 216II, abordable dès la première année*

Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$, où les a_k sont des réels deux à deux distincts, munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire. Montrer brièvement que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$ est un espace vectoriel.

Donner sa dimension et son orthogonal. Donner la distance de X^n à F .

7.76 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 220I, abordable dès la première année*

Écrire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection orthogonale sur le plan $P : x - 2y + z = 0$.

7.77 *Compléments OdT 2017/2018 CCP PSI planche 427II*

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

a. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Si $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - u_1t - u_2t^2 - \dots - u_nt^n)^2dt$.

b. Montrer que f admet un minimum absolu m sur \mathbb{R}^n .

On note ce minimum ρ_n atteint en $a = (a_1, \dots, a_n)$ et on pose $P = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $Q = 1 - \sum_{j=1}^n a_j \prod_{i=1}^j (X + i)$.

c. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Calculer $(X^k|1 - P)$ pour en déduire que $Q(k) = 0$.

d. Comparer m et $Q(0)$. Que vaut $Q(-1)$? En déduire la valeur exacte de m .

7.78 *Compléments OdT 2017/2018 CCP PSI planche 447II*

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^n P(a_k)Q(a_k)$ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition sur a_1, \dots, a_n vérifiée, montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^n P(a_k) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera la dimension et l'orthogonal. Calculer la distance de X^n à F .