TD 13 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 12 décembre 2025**

13.1 **a.** Considérons l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = \big((e_1|x), \cdots, (e_n|x)\big)$. Alors φ est clairement linéaire et $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\forall k \in [\![1;n]\!],\ (e_k|x) = 0$ donc $x \in E^{\perp} = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$. Ainsi φ est injective donc c'est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$ d'après le cours.
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $j \in [\![1;n]\!]$, la colonne C_j de M vérifie $C_j^T = (m_{1,j} \ \cdots \ m_{n,j})$ et, comme φ est bijective, il existe un unique vecteur $f_j \in E$ tel que $\varphi(f_j) = (m_{1,j}, \cdots, m_{n,j}) = \big((e_1|f_j), \cdots, (e_n|f_j)\big)$. Il existe bien une unique famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ telle que $M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Supposons que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ telle que $M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

<u>Méthode 1</u> : Si $(e_1, \cdots, e_n)$ était liée, il existerait $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Alors pour toute famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$, en notant L_i les lignes de $M = \big((e_i|f_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on aurait $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ par bilinéarité du produit scalaire et la matrice M serait donc non inversible. Il suffit donc de prendre M inversible dans la condition imposée pour arriver à une contradiction. Par l'absurde, $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre donc, comme elle est de cardinal n, $(e_1, \cdots, e_n)$ est bien une base de E.

<u>Méthode 2</u> : En prenant $M = I_n$, il existe une famille $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (e_i|f_j) = \delta_{i,j}$. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$ et $j \in [\![1;n]\!]$, on a $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big| f_j\Big) = (0_E|f_j) = 0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i|f_j) = \lambda_j$. Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ (de cardinal n) est libre : c'est donc une base de E.
Quelle que soit la méthode, la réciproque est donc vraie.

13.2 Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ et $x \in F^{\perp}$, alors d'après la relation de l'énoncé appliquée à ce vecteur x, on obtient $||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 = 0$ donc $x = 0_E$. Ainsi, $F^{\perp} = \{0_E\}$ donc $F = (F^{\perp})^{\perp} = E$. Comme $E = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice de E, et comme elle comporte n vecteurs et que $\dim(E) = n$, $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.
Soit $j \in [\![1;n]\!]$, alors $||e_j||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_j|e_k)^2 = ||e_j||^4 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (e_j|e_k)^2 \geqslant ||e_j||^4$ donc $||e_j|| \leqslant 1$. Soit l'hyperplan $H_j = \mathrm{Vect}_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} (e_k)$ de E et n_j l'un des deux vecteurs unitaires dans la droite $H_j^{\perp}$. Si on applique la relation de l'énoncé à n_j, on trouve $||n_j||^2 = 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} (n_j|e_k)^2 = (n_j|e_j)^2$. Or $1 = (n_j|e_j)^2 \leqslant ||n_j||^2 ||e_j||^2 \leqslant 1$ d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, forcément $(n_j|e_j)^2 = ||n_j||^2 ||e_j||^2 = 1$. Ceci assure que $||e_j|| = 1$ et on peut conclure de deux manières à l'aspect orthonormé de $(e_1, \cdots, e_n)$.

- L'égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ $|(n_j|e_j)| = ||n_j|| ||e_j|| = 1$ garantit que e_j et n_j sont colinéaires donc que e_j est orthogonal à tous les autres vecteurs de $(e_1, \cdots, e_n)$. Ceci est vrai pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $(e_1, \cdots, e_n)$ est bien une base orthonormée de E.
- On revient à $||e_j||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_j|e_k)^2 = ||e_j||^4 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (e_j|e_k)^2$ qui devient $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (e_j|e_k)^2 = 0$ et on a donc $\forall (k,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ k \neq j \Longrightarrow (e_j|e_k) = 0$. À nouveau, $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

13.3 **a.** Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, alors $f : t \mapsto P(t)Q(t)\omega(t)$ est continue sur $]a;b[$ et, comme PQ est continue sur le segment $[a;b]$, elle y est bornée donc $\exists M \geqslant 0,\ |f(t)| \leqslant M\omega(t)$ donc f est intégrable sur $]a;b[$ par comparaison, le réel $< P,Q >$ est donc bien défini. Par linéarité de l'intégrale, $< .,. >$ est bilinéaire et symétrique car $PQ = QP$. De plus, $(P|P) = \displaystyle\int_a^b P^2(t)\omega(t)dt \geqslant 0$ et, comme $t \mapsto P^2(t)\omega(t)$ est continue et positive sur $]a;b[$, $\displaystyle\int_a^b P^2(t)\omega(t)dt = 0 \iff \forall t \in]a;b[,\ P^2(t)\omega(t) = 0 \iff P$ nulle sur $]a;b[$. Mais si P s'annule sur $]a;b[$, P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $< P,P >= 0 \iff P = 0$. $< .,. >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (plus généralement sur $\mathbb{R}[X]$).

b. On sait que $P_0 = \dfrac{1}{||1||}$ et que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P_k = \dfrac{Q_k}{||Q_k||}$ avec $Q_k = X^k - \sum\limits_{i=0}^{k-1}(X^k|P_i)P_i$ par construction de l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT. Ainsi, $\deg(P_0) = 0$ et, si, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on suppose que $\forall i \in [\![0;k-1]\!],\ \deg(P_i) = i$, on a $\deg\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}(X^k|P_i)P_i\right) \leqslant k-1$ donc $\deg(P_k) = k$. Ainsi, par principe de récurrence, $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \deg(P_k) = k$. Ainsi, $(P_0,\cdots,P_k)$, en tant que famille de polynômes de degrés échelonnés de cardinal $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$, est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.

Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$, $XP_k(X) \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$ se décompose $XP_k = \sum\limits_{i=0}^{k+1}\alpha_i P_i$ dans la base $(P_0,\cdots,P_{k+1})$ de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$. Par construction toujours, on a $\forall i \in [\![1;n-1]\!],\ P_i \in \mathrm{Vect}(P_0,\cdots,P_{i-1})^\perp = \mathrm{Vect}(1,\cdots,X^{i-1})^\perp = \mathbb{R}_{i-1}[X]^\perp$. Ainsi, pour $j \in [\![0;k-2]\!]$, on a $< XP_k,P_j >= \sum\limits_{i=0}^{k+1}\alpha_i < P_i,P_j >= \alpha_j = 0 =< P_k,XP_j >$ car $XP_j \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. En notant $a_k = \alpha_{k+1}$, $b_k = \alpha_k$ et $c_k = \alpha_{k-1}$, on a bien $(a_k,b_k,c_k) \in \mathbb{R}^3$ et $XP_k = a_kP_{k+1} + b_kP_k + c_kP_{k-1}$.

c. On a $XP_k = a_kP_{k+1} + b_kP_k + c_kP_{k-1}$ et $XP_{k-1} = a_{k-1}P_k + b_{k-1}P_{k-1} + c_{k-1}P_{k-2}$ d'après la question **b.**. Or la famille $(P_{k-2},P_{k-1},P_k,P_{k+1})$ est orthonormale donc $c_k =< XP_k,P_{k-1} >$ et $a_{k-1} =< XP_{k-1},P_k >$. Or on a clairement $< XP_k,P_{k-1} >=< XP_{k-1},P_k >$ (en passant par les intégrales) donc $c_k = a_{k-1}$.

d. Comme $k \geqslant 1$ et $P_0 = \dfrac{1}{||1||}$, on a $< P_k,1 >= ||1|| < P_k,P_0 >= 0$. Supposons que P_k ne possède aucune racine réelle de multiplicité impaire dans $]a;b[$, alors en décomposant P_k en produit de polynômes irréductibles réels, on a $P_k = \lambda\prod\limits_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{2m_i}\prod\limits_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{2n_i+1}\prod\limits_{i=1}^{t}(X^2+\gamma_iX+\delta_i)^{o_i}$ où les α_i sont les racines réelles (mais de multiplicité paire) de P_k et β_i les racines réelles de multiplicité impaires de P_k hors de $]a;b[$. Ainsi, P_k garde un signe constant donc $< P_k,1 >= \displaystyle\int_a^b P_k(t)\omega(t)dt = 0$ implique, comme $t \mapsto P_k(t)\omega(t)$ est de signe constant et continue sur $]a;b[$, que $\forall t \in]a;b[,\ P_k(t)\omega(t) = 0 \Longrightarrow P_k(t) = 0$ car $\omega(t) > 0$. Ainsi, P_k admet une infinité de racines donc $P_k = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, P_k admet au moins une racine réelle de multiplicité impaire dans l'intervalle $]a;b[$.

e. Par construction, P_kQ_k n'a que des racines réelles de multiplicités impaires hors de l'intervalle $]a;b[$, ou des racines réelles de multiplicités paires, ou des racines complexes conjuguées de mêmes multiplicités. Toujours est-il que P_kQ_k est de signe constant, continu sur $]a;b[$ en ne s'annulant qu'en un nombre fini de valeurs (les racines de P_k dans $]a;b[$), ainsi $< P_k,Q_k >= \displaystyle\int_a^b P_k(t)Q_k(t)\omega(t)dt > 0$. Si on avait $p < k$, alors on aurait $Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et, puisque $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ par construction, on aurait $< P_k,Q_k >= 0$ ce qui est absurde. Alors, il vient $p = k$.

f. P_k possède donc k racines distinctes réelles dans $]a;b[$, et comme P_k est de degré k, il ne peut y en avoir d'autres. Les racines complexes de P_k sont donc toutes réelles, toutes dans $]a;b[$ et toutes simples. WAOUH !

13.4 **a.** D'après l'énoncé, $I_0 = \sqrt{\pi}$. De plus, $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt = \left[-\dfrac{e^{-t^2}}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire ou impaire selon la parité de n, et $f_n(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, ce qui fait que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après RIEMANN. Ainsi, I_n existe.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1}(te^{-t^2})dt$. Si on pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, $I_{n+2} = 0 + \dfrac{n+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

Si n impair, comme $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est impaire, on a $I_n = 0$ (ou alors avec $I_1 = 0$ et la relation précédente).

Si $n = 2p$ est pair, alors $I_n = I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2} I_{2p-2} = \cdots = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2^p} I_0 = \dfrac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi} = \dfrac{n!}{2^n (n/2)!}\sqrt{\pi}$.

b. À nouveau, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $g : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $g(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'application φ est donc bien définie.

Par linéarité de l'intégrale, φ est bilinéaire et symétrique car $PQ = QP$. $\varphi(P, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ et, comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ P^2(t)e^{-t} = 0$ ainsi P est nulle sur $\mathbb{R}$. Mais si P s'annule sur $\mathbb{R}$, P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(P|P) = 0 \iff P = 0$. $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. D'après le cours, $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = ||X^3 - p(X^3)||$ si p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $p(X^3) = a + bX + cX^2$ et $(X^3 - p(X^3)|1) = (X^3 - p(X^3)|X) = (X^3 - p(X^3)|X^2) = 0$ ce qui donne le système à 3 équations et 3 inconnues suivant : $aI_0 + cI_2 = aI_2 + cI_4 = bI_2 - I_4 = 0$ car $(X^3 - p(X^3)|1) = I_3 - aI_0 - bI_1 - cI_2$, $(X^3 - p(X^3)|X) = I_4 - aI_1 - bI_2 - cI_3$ et $(X^3 - p(X^3)|X^2) = I_5 - aI_2 - bI_3 - cI_4$.

On en déduit après calculs que $a = c = 0$ et $b = 3/2$, et, de deux manières :

- $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = ||X^3 - (3/2)X||$ et on développe $||X^3 - (3/2)X||^2 = ||X^3||^2 - 3(X^3|X) + (9/4)||X||^2$ ce qui donne $||X^3 - (3/2)X|| = \sqrt{\dfrac{I_6 - 3I_4 + (9/4)I_2}{\sqrt{\pi}}} = \sqrt{((15/8) - (9/4) + (9/8))} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- Comme $X^3 = (X^3 - (3/2)X) + ((3/2)X)$ avec $(X^3 - (3/2)X) \perp ((3/2)X)$ par construction, on a aussi par PYTHAGORE $||X^3||^2 = ||X^3 - (3/2)X||^2 + ||(3/2)X||^2$ donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{||X^3||^2 - (9/4)||X||^2}$ ce qui donne encore $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{\dfrac{I_6 - (9/4)I_2}{\sqrt{\pi}}} = \sqrt{\dfrac{15}{8} - \dfrac{9}{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Par les deux méthodes, on obtient $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sim 0,86$.

13.5 **a.** L'application $< ., . >: E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est bien définie car la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $(P,Q) \in E^2$ et que, par croissances comparées, on a $f(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ pour $P \in E$. De plus, si $P \in E$ tel que $< P, P >= 0$, la fonction $g : t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$ implique $g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que tous les réels positifs t sont racines de P car $e^{-t} > 0$. Comme P admet une infinité de racines, $P = 0$. Ainsi, $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

b. Pour $(i,j) \in [\![0; n]\!]^2$, on a $(B_i|B_j) = \dfrac{1}{i!j!}(X^i|X^j) = \dfrac{1}{i!j!}\int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}dt = \dfrac{\Gamma(i+j+1)}{i!j!}$ et on sait alors que $(B_i|B_j) = \dfrac{(i+j)!}{i!j!} = \dbinom{i+j}{i} \neq 0$ si $i \neq j$ donc $\mathcal{B} = (B_0, \cdots, B_n)$ n'est pas une base orthonormale de E.

c. Par la formule de Leibniz, pour un entier $k \in [\![0; n]\!]$, on a $L_k(t) = \dfrac{(-1)^k}{k!}e^t \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i}(e^{-t})^{(k-i)}(t^k)^{(i)}$ avec les abus de notations habituels. Comme $(e^{-t})^{(k-i)} = (-1)^{k-i}e^{-t}$ et $(t^k)^{(i)} = \dfrac{k!}{(k-i)!}t^{k-i}$, on a la relation $L_k = \dfrac{(-1)^k}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\dbinom{k}{i}\dfrac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} = k!\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^i}{i!((k-i)!)^2}X^{k-i}$. Par conséquent, L_k est bien un polynôme de degré k et de coefficient dominant $\dfrac{1}{k!}$ (pour $i = 0$) tel que $L_k(0) = (-1)^k$ (pour $i = k$). Ainsi, $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E de degrés échelonnés de 0 à n donc une base de E.

d. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, $p \in [\![0; k-1]\!]$, si on pose $u(t) = \dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)$ et $v(t) = t^p$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées ($u(t)v(t)$ est de la forme $V(t)e^{-t}$ avec V polynomiale). Par intégration par parties dans le produit scalaire $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}\int_0^{+\infty}\dfrac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^k)t^p dt$, on a donc la relation $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}\Big[\dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^p\Big]_0^{+\infty} - \dfrac{(-1)^k p}{k!}\int_0^{+\infty}\dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$. Or la partie "crochet" est nulle par croissances comparées donc $(L_k|X^p) = -\dfrac{(-1)^k p}{k!}\int_0^{+\infty}\dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^k)t^{p-1}dt$. Après $p-1$ intégrations par parties du même style, $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^p p!\int_0^{+\infty}\dfrac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}(e^{-t}t^k)dt$ d'où $(L_k|X^p) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^p p!\Big[\dfrac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)\Big]_0^{+\infty} = 0$ car $\dfrac{d^{k-p-1}}{dt^{k-p-1}}(e^{-t}t^k)$ est de la forme $t^{p+1}W(t)e^{-t}$ avec W polynomiale. Ainsi $(L_k|X^p) = 0$. Si $0 \leqslant i < k \leqslant n$, $L_i = \sum\limits_{p=0}^{i}\alpha_p X^p$ donc, par bilinéarité du produit scalaire, $(L_k|X^i) = \sum\limits_{p=0}^{i}\alpha_p(L_k|X^p) = 0$ d'après ce qui précède donc la famille est déjà orthogonale.

De même, $(L_k|X^k) = \dfrac{(-1)^k}{k!}(-1)^k k!\int_0^{+\infty}\dfrac{d^{k-k}}{dt^{k-k}}(e^{-t}t^k)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt = k!$. On a vu ci-dessus que $L_k = \dfrac{X^k}{k!} + \sum\limits_{p=0}^{k-1}\alpha_p X^p$ d'où $(L_k|L_k) = \dfrac{(L_k|X^k)}{k!} + \sum\limits_{p=0}^{i}\alpha_p(L_k|X^p) = \dfrac{k!}{k!} = 1$: $\mathcal{L}$ est une base orthonormale de E.

e. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire non nulle car $\varphi(1) = 1$ donc $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi $\dim(F) = n + 1 - 1 = n$. Comme $P \in F \iff X|P \iff (\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = XQ)$, la famille $(X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de F. Mais $L_k(0) = (-1)^k$ d'après **c.** donc $L_k - (-1)^k \in F$ et la famille de degrés échelonnés $(L_1 + 1, \cdots, L_n - (-1)^n)$ est une base de F. Comme F est un hyperplan, $F^{\perp}$ est une droite. Si $F^{\perp}$ est engendrée par $U = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k$, comme $L_0 = 1$ et que $\mathcal{L}$ est une base orthonormale de E, $(U|L_p-(-1)^p) = a_p||L_p||^2-(-1)^p a_0||1||^2 = a_p-(-1)^p a_0 = 0$ si $p \geqslant 1$: $F^{\perp} = \text{Vect}(U)$ avec $U = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k L_k$.

f. $d = \underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\text{Inf}} \int_0^{+\infty}(1-a_1t-\cdots-a_nt^n)^2e^{-t}dt = d(1,F)^2 = \dfrac{(1|U)^2}{||U||^2}$ d'après une formule du cours. Or $(1|U) = (1|1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k L_k) = 1$ et $||U||^2 = n+1$ car $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ est une base orthonormale de E. Ainsi, on peut conclure que $d = \underset{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}{\text{Inf}} \int_0^{+\infty}(1-a_1t-\cdots-a_nt^n)^2e^{-t}dt = \dfrac{1}{n+1}$.

13.6 **a.** $\varphi : (X,Y) \mapsto X^TY$ va bien de E^2 dans $\mathbb{R}$. Pour $(X,Y) \in E^2$, si $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ et $Y^T = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, $X^TY = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k = Y^TX$. Ainsi, φ est symétrique. Par distributivité du produit matriciel et linéarité de la transposée, pour $(X_1,X_2) \in E^2$, $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y \in E$, $(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)^TY = (\lambda_1X_1^T+\lambda_2X_2^T)Y = \lambda_1X_1^TY+\lambda_2X_2^TY$ donc avec la symétrie, φ est bilinéaire. Pour $X \in E$, $\varphi(X,X) = X^TX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$ en notant $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ et si $\varphi(X,X) = 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ donc, comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, on a $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $x_k = 0$ donc $X = 0$, et φ est bien définie positive.
Comme φ est une application bilinéaire, symétrique définie positive sur E, φ est un produit scalaire sur E.
b. Comme $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(A^T)$, on a $\dim(\text{Ker}(A^T)) = n - \text{rang}\,(A) = n - \dim(\text{Im}\,(A)) = \dim(\text{Im}\,(A)^{\perp})$ par la formule du rang. De plus, soit $X \in \text{Ker}(A^T)$ et $Y \in \text{Im}\,(A)$, alors il existe $Z \in E$ tel que $Y = AZ$, ainsi $(X|Y) = (X|AZ) = X^TAZ = X^T(A^T)^TZ = (A^TX)^TZ = (A^TX|Z) = (0|Z) = 0$ donc $\text{Ker}(A^T) \subset \text{Im}\,(A)^{\perp}$. On conclut à l'égalité de ces deux sous-espaces de E par égalité de leurs dimensions, $\text{Im}\,(A)^{\perp} = \text{Ker}(A^T)$.
c. Pour un vecteur X de E, $f(X)$ est la distance entre AX et Y. Comme AX parcourt $\text{Im}\,(A)$ quand X parcourt E, la fonction f admet bien une borne inférieure sur E, et même un minimum. En notant p la projection orthogonale sur $\text{Im}\,(A)$, on a $\underset{Z\in E}{\text{Inf}}(f(Z)) = \underset{Z\in E}{\text{Min}}(f(Z)) = d(Y, \text{Im}\,(A)) = ||Y-p(Y)||$ et ce minimum de la distance entre Y et un vecteur de $\text{Im}\,(A)$ n'est atteint, toujours d'après le cours, qu'en ce vecteur $p(Y)$. Ainsi, f est minimale en X si et seulement si $AX = p(Y)$, c'est-à-dire si et seulement si $AX-Y$ est orthogonal à $\text{Im}\,(A)$. D'après **b.**, on a $f(X) = \underset{Z\in E}{\text{Inf}}(f(Z)) \Longleftrightarrow AX-Y \in (\text{Im}\,(A))^{\perp} \Longleftrightarrow AX-Y \in \text{Ker}(A^T) \Longleftrightarrow A^T(AX-Y) = 0$.

13.7 **a.** L'application $(\,.\,|\,.\,) : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (f,g) \in E^2,\ (f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$ est bien définie car la fonction $t \mapsto t^2 f(t)g(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ pour $(f,g) \in E^2$. Cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $t \mapsto t^2 f^2(t)$ est positive sur $[0;1]$ pour $f \in E$. De plus, si $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$, la fonction $t \mapsto t^2 f^2(t)$ est continue et positive sur $[0;1]$, ainsi $\int_0^1 t^2 f^2(t) = 0$ implique $\forall t \in [0;1],\ t^2 f^2(t) = 0$ donc $\forall t \in]0;1],\ f(t) = 0$. Par continuité de f en 0, f est nulle sur $[0;1]$. Ainsi, $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est continue sur $]0;1]$, on a $f_0(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc f_0 est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de Riemann et $\lim_{t \to 0^+} f_n(t) = 0$ si $n \geqslant 1$ toujours par croissances comparées donc f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n \ln(t)dt$ converge. Pour $n \geqslant 0$, avec $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $]0;1]$ et comme $u(1)v(1) = 0$ et $\lim_{t \to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t)dt = -\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)} \times \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$ par intégration par parties.

c. La fonction $f = f_1$ ainsi prolongée est continue sur le segment $[0;1]$ donc $f \in E$. En notant g le projeté orthogonal de f sur F, puis $p_0 : x \mapsto 1$ et $p_1 : x \mapsto x$ de sorte que $F = \text{Vect}(p_0, p_1)$, on a $g \in F$ donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = ap_1 + bp_0$. Par définition d'une projection orthogonale, $f - g \in F^\perp$ donc $(f - g|p_0) = (f - g|p_1) = 0$ ce qui se traduit par le système $I_3 - (a/4) - (b/3) = I_4 - (a/5) - (b/4) = 0$ qui se résout en $a = \frac{11}{20}$ et $b = -\frac{3}{5}$. Ainsi, $g : x \mapsto \frac{11}{20}x - \frac{3}{5}$. On a besoin de $J_n = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

d. En posant $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$, $||g_{a,b}|| = ||f - f_{a,b}||$ est la distance entre le vecteur $f_{a,b}$ de F et le vecteur f de E. Quand (a,b) parcourt $\mathbb{R}^2$, $f_{a,b}$ parcourt F. Ainsi, $\underset{(a,b) \in \mathbb{R}^2}{\text{Inf}} ||g_{a,b}|| = d(f,F) = ||f - g||$ d'après le cours. Or, comme $f = (f - g) + g$ avec $f - g \perp g$, on a $||f||^2 = ||f - g||^2 + ||g||^2$ donc $d(f,F) = \sqrt{||f||^2 - ||g||^2}$. Or, en posant $u : x \mapsto \frac{x^5}{5}$ et $v : x \mapsto (\ln(x))^2$ qui sont C^1 sur $]0;1]$ et vérifient $\lim_{x \to 0^+} u(x)v(x) = u(1)v(1) = 0$ par croissances comparées, $||f||^2 = \int_0^1 x^4(\ln(x))^2 dx = \left[\frac{x^5}{5}(\ln(x))^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^5}{5}.\frac{2\ln(x)}{x}dx = -\frac{2}{5}I_4 = \frac{2}{125}$ par intégration par parties. De plus, $||g||^2 = \frac{121}{400}||p_1||^2 - \frac{33}{50}(p_0|p_1) + \frac{9}{25}||p_0||^2$ et $||p_1||^2 = J_4 = \frac{1}{5}$, $(p_0|p_1) = J_3 = \frac{1}{4}$ et $||p_0||^2 = J_2 = \frac{1}{3}$ donc $||g||^2 = \frac{31}{2000}$. Ainsi, $d(f,F) = \sqrt{\frac{32}{2000} - \frac{31}{2000}} = \frac{1}{\sqrt{2000}} = \frac{1}{20\sqrt{5}}$ d'où $\underset{(a,b) \in \mathbb{R}^2}{\text{Inf}} ||g_{a,b}|| = \frac{1}{20\sqrt{5}} \sim 0,02$.

13.8 **a.** Soit $x \in F$, alors $\forall y \in F^\perp,\ (x|y) = 0$ donc x est orthogonal à tous les vecteurs de $F^\perp$, ce qui est la définition de $x \in (F^\perp)^\perp$. On a donc bien $F \subset (F^\perp)^\perp$.

b. On vérifie d'abord que l'application proposée est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. En effet, comme le degré d'un polynôme est fini, la suite $(P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1))_{k \in \mathbb{N}}$ est à support fini donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ existe bien si $(P,Q) \in E^2$. La bilinéarité de $(.|.)$ provient de la linéarité des dérivées successives, la symétrie est claire et, si $P \in E$, $(P|P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)^2 \geqslant 0$ et $(P|P) = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(1) = 0$ donc $P = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 0$ avec la formule de Taylor : $(.|.)$ est bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur E.

Détermination de $F^\perp$:

($\subset$) : soit $P \in F^{\perp}$, on a donc $\forall Q \in F,\ (P|Q) = 0 = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ car $Q(1) = Q'(1) = 0$. Pour un entier $n \geqslant 2$, prenons $Q = (X-1)^n \in F$, l'égalité $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) = 0$ se résume à $P^{(n)}(1)Q^{(n)}(1) = 0$ car $\forall k \neq n,\ Q^{(k)}(1) = 0$. Or $Q^{(n)}(1) = n!$ donc $P^{(n)}(1) = 0$. Avec la formule de TAYLOR en 1 pour les polynômes, $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)(X-1)^k = P(1) + P'(1)(X-1)$ donc $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi, $F^{\perp} \subset \mathbb{R}_1[X]$.

($\supset$) : soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ et $Q \in F$, alors $P = P(1) + P'(1)(X-1)$ et $Q = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} Q^{(k)}(1)(X-1)^k$ par la formule de TAYLOR car $Q(1) = Q'(1) = 0$ et on a bien $(P|Q) = 0$ car $Q(1) = Q'(1) = P''(1) = \cdots = P^{(n)}(1) = 0$ donc $P \in F^{\perp}$. On peut donc affirmer que $\mathbb{R}_1[X] \subset F^{\perp}$.

Par double inclusion, on a $F^{\perp} = \mathbb{R}_1[X]$.

Détermination de $(F^{\perp})^{\perp}$:

($\subset$) : soit $P \in (F^{\perp})^{\perp}$, on a donc $\forall Q \in F^{\perp},\ (P|Q) = 0 = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1)$ car $\forall k \geqslant 2,\ Q^{(k)}(1) = 0$. Prenons $Q = 1$ puis $Q = X - 1$, on a donc $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ donc $P \in F$. Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$.

($\supset$) : l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ a été établie à la question **a.**.

Par double inclusion, on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

c. On vérifie d'abord que l'application proposée est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: classique !

Soit $P \in F^{\perp}$, alors $\forall Q \in F,\ (P|Q) = 0$ par hypothèse. Prenons en particulier $Q = (X-1)^2 P \in F$, on a donc $(P|Q) = \int_0^1 (t-1)^2 P(t)^2 dt = 0$. Comme la fonction $t \mapsto (t-1)^2 P(t)^2$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$, on en déduit qu'elle est nulle donc que $\forall t \in [0;1],\ (t-1)^2 P(t)^2 = 0$ puis que $\forall t \in [0;1[,\ P(t) = 0$. Le polynôme P admet ainsi une infinité de racines, ce qui montre que $P = 0$. On vient de montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. D'après le cours, on a donc $(F^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbb{R}[X] \neq F$.

d. On a vu en cours que si F est de dimension finie, on a $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

e. D'après la question **b.**, comme $F = \text{Vect}\big(\{(X-1)^n \mid n \geqslant 2\}\big)$ est de dimension infinie car $\big((X-1)^n\big)_{n \geqslant 2}$ est une famille libre de cardinal infini dans F et qu'on a quand même $F = (F^{\perp})^{\perp}$, la condition suffisante de la question **d.** n'est pas nécessaire.

13.9 **a.** Les vecteurs $(2,1,-2)$ et $(1,-2,2)$ sont dans F et sont de norme $\sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ donc (v_1, v_2) est une base orthonormale de F si $v_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$ et $v_2 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Comme $w_3 = (1,2,2)$ est normal à F par car $x + 2y + 2z = 0 \iff (v|w_3) = 0$ avec $v = (x,y,z)$, et que ce vecteur w_3 est aussi de norme 3, si on pose $v_3 = \frac{1}{3}(1,2,2)$, la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

b. $F = \text{Ker}(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $F^{\perp} = \text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ d'après le cours, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de p et de s, et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B'$.

c. Méthode 1 : pour $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p(v) = v - \frac{(v|v_3)}{||v_3||^2} v_3$ car l'application $p' : v \mapsto v - \frac{(v|v_3)}{||v_3||^2} v_3$ est aussi un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $p(v) = 0$ si $v = \lambda v_3 \in \text{Vect}(v_3) = F^{\perp}$ car $p(\lambda v_3) = \lambda v_3 - \frac{\lambda ||v_3||^2}{||v_3||^2} v_3 = 0$ et $p(v) = v$ si $v \in F \iff v \perp v_3$ car alors $p(v) = v - \frac{0}{||v_3||^2} v_3 = v$. p et p' coïncident donc sur F et sur $F^{\perp}$ donc sur $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^{\perp}$. Ainsi, $p(\overrightarrow{\imath}) = (1,0,0) - \frac{1}{9}(1,2,2) = \frac{1}{9}(8,-2,-2)$, $p(\overrightarrow{\jmath}) = (0,1,0) - \frac{2}{9}(1,2,2) = \frac{1}{9}(-2,5,-4)$ et

$p(\overrightarrow{k}) = (0,0,1) - \frac{2}{9}(1,2,2) = \frac{1}{9}(-2,-4,5)$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = A$. Puisque $s = 2p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} - I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Méthode 2 : par formule de changement de base, si $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P^{-1}A'P$ et $B = P^{-1}B'P$. Or P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales d'où $P^{-1} = P^T$ et $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ (calcul facile) et $B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ ou $B = 2A - I_3$.

13.10 ($\Longrightarrow$) Si p est le projecteur orthogonal sur un sous-espace F de E, pour tout vecteur $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a $p(x) = y$ donc $||p(x)||^2 = ||y||^2 \leqslant ||y||^2 + ||z||^2 = ||x||^2$ par PYTHAGORE. Ainsi, en passant à la racine, on a $||p(x)|| \leqslant ||x||$. Par conséquent, pour tout $(x,y) \in E^2$, par linéarité de p, $||p(x) - p(y)|| = ||p(x-y)|| \leqslant ||x-y||$ ce qui prouve que p est 1-lipschitzien.

($\Longleftarrow$) Supposons que p est 1-lipschitzien, alors $\forall x \in E$, $||p(x)|| = ||p(x) - p(0_E) \leqslant ||x - 0_E|| = ||x||$. Notons F et G les sous-espaces de E tels que $G = \text{Ker}(p)$ et $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ de sorte que p soit la projection sur F parallèlement à G. Soit $y \in F$ et $z \in G$, alors pour tout réel t, on a $p(ty + z) = ty$ donc $||p(ty+z)|| = ||ty|| \leqslant ||ty + z||$ donc $t^2||y||^2 = ||ty||^2 \leqslant ||ty+z||^2 = t^2||y||^2 + 2t(y|z) + ||z||^2$ ce qui prouve que la fonction affine $t \mapsto 2t(y|z) + ||z||^2$ reste positive sur $\mathbb{R}$. Or ceci n'est possible que si cette fonction est constante, donc si $(y|z) = 0$. Par conséquent $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ d'où $\text{Ker}(p) \subset (\text{Im}(p))^\perp$ mais ces deux sous-espaces ont la même dimension par la formule du rang donc $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp$ et p est orthogonale.

Par double implication, on a bien p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est 1-lipschitzien.

13.11 **a.** Pour $x \in E$, $(p(x)|p(x)) = (p(x) - x + x|p(x)) = (p(x) - x|p(x)) + (x|p(x))$ par bilinéarité du produit scalaire. Or p est un projecteur orthogonal, donc la projection sur $F = \text{Im}\,(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p) = F^{\perp}$, ce qui assure que $x - p(x) \in F^{\perp}$ et que $p(x) \in F$, donc que $(p(x) - x|p(x)) = 0$ et on a bien $(p(x)|p(x)) = (x|p(x))$.

b. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on sait que $a_{i,j} = (p(v_j)|v_i)$ donc $||p(v_i)||^2 = (p(v_i)|p(v_i)) = (v_i|p(v_i)) = a_{i,i}$ d'après **a.**. Ainsi, $\text{Tr}\,(A) = \text{Tr}\,(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} ||p(v_i)||^2$. Or, si $\mathcal{B}' = (w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_n)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}\,(p) \oplus \text{Ker}(p)$ avec $\text{Im}\,(p) = \text{Vect}(w_1, \cdots, w_r)$ (car $r = \text{rang}\,(p) = \dim(\text{Im}\,(p))$) et $\text{Ker}(p) = \text{Vect}(w_{r+1}, \cdots, w_n)$, on a $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{Tr}\,(p) = \text{Tr}\,(A') = r$. Par conséquent, $\sum\limits_{i=1}^{n} ||p(v_i)||^2 = r = \text{Tr}\,(p)$.

13.12 **a.** Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1; 1]$ donc $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ existe et l'application φ est bien définie. La symétrie de φ provient de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ ($P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$) et sa bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale (il suffit de l'écrire). De plus, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale et, si on a $\varphi(P, P) = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2$ étant continue et positive sur $[-1; 1]$ et que $\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt = 0$, d'après le cours, $\forall t \in [-1; 1]$, $P(t)^2 = 0$ donc P admet une infinité de racines ce qui montre que P est le polynôme nul. Comme φ est bilinéaire symétrique définie positif, c'est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, en restreignant le produit scalaire φ dans $\mathbb{R}_n[X]$, cet espace devient devient un espace euclidien muni du produit scalaire $\varphi_n : (\mathbb{R}_n[X])^2 \to \mathbb{R}$ défini par $\varphi_n(P, Q) = \varphi(P, Q)$ et l'application $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Le théorème de représentation montre qu'il existe un unique $U_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\psi(P) = \varphi(P, U_n) = P(0) = \int_{-1}^{1} P(t)U_n(t)dt$.

c. Posons $U_2 = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Comme $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P(0) = \int_{-1}^{1} P(t)U_2(t)dt$, avec $P = 1, X$ ou X^2, on a $\int_{-1}^{1} (at^2 + bt + c)dt = 1$, $\int_{-1}^{1} t(at^2 + bt + c)dt = 0$ et $\int_{-1}^{1} t^2(at^2 + bt + c)dt = 0$ ce qui donne $\frac{2a}{3} + 2c = 1$, $b = 0$ et $\frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = 0$ donc $a = -\frac{15}{8}$, $b = 0$ et $c = \frac{9}{8}$ d'où $U_2 = \frac{3}{8}(3 - 5X^2)$.

13.13 **a.** Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, alors $v \in F \Longleftrightarrow x - t = y - z = 0 \Longleftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, y, x) = xv_1 + yv_2$ en notant $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 1, 0)$. Ainsi, $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et, comme (v_1, v_2) est libre, F est de dimension 2. En notant s la symétrie orthogonale par rapport à F, on sait que $\forall v \in \mathbb{R}^4,\ s(v) = 2p(v) - v$ en notant p la projection orthogonale sur F. Or v_1, v_2 sont orthogonaux la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^4$ (on admet que c'est celle qu'on utilise dans $\mathbb{R}^4$) et de norme $\sqrt{2}$ donc $p(v) = \dfrac{(v|v_1)}{2}v_1 + \dfrac{(v|v_2)}{2}v_2$ d'après le cours car $\left(\dfrac{v_1}{\sqrt{2}}, \dfrac{v_2}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormée de F. Ainsi, si on prend un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a $s(v) = (v|v_1)v_1 + (v|v_2)v_2 - v = (x+t)v_1 + (y+z)v_2 - v = (x+t, y+z, y+z, x+t) - (x, y, z, t) = (t, z, y, x)$.
Ainsi, on a donc $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On constate que A est symétrique. C'était effectivement prévisible car s est une symétrie orthogonale donc un endomorphisme autoadjoint et que la base canonique est une base orthonormée pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^4$.