TD 14 : INTÉGRALES À PARAMÈTRE

PSI 1 2025-2026 **vendredi 19 décembre 2025**

14.1 *ENS Cachan PSI 2016 et Mines PSI 2022* Charly Castes et Florian Picq II (note 12 et 15,5)

On définit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$ et on pose $g(x) = f(x^2)$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de $f'(x)$.
b. Calculer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
c. Établir que $\forall x \geqslant 0,\ g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

14.2 *Centrale Maths1 PSI 2019* Louis Destarac (note 20)

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2tx) dt$ et $g : y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2} dx$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f y est de classe C^1.
b. Trouver une équation différentielle (E) vérifiée par f. En déduire une expression simple de f.
c. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.

14.3 *Centrale Maths1 PSI 2019* Paul Louzier (note 16) Soit $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$.

a. Montrer l'existence de I_2 et de $F(x)$ pour tout réel x.
b. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et que F est solution de $(E)\ :\ y'' - 4y = \pi - 4xI_2$ sur $\mathbb{R}_+$.
c. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire une expression de F en fonction de I_2.
d. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi x^2}{2}$. En déduire la valeur de I_2.
e. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et déterminer sa valeur exacte.

14.4 *Mines PSI 2022* Maxence Rossignol I (note 16) Pour un réel x, en cas de convergence, on définit les deux réels $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \cos(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + y = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.
d. Prouver que g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
e. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, puis de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

14.5 *Mines PSI 2022* Baptiste Savarit I (note 16)

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la monotonie de f sur D.
b. Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f'.
c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
d. Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt$.
e. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.
f. Déterminer la limite de f en 0^+.

14.6 <u>*Mines PSI 2022 et CCINP PSI 2022 (2)*</u> Anna Decrock, Joël Lascoumes, Jade Mirassou (note 7;7,91;15,35)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.
b. Montrer que f est continue sur D.
c. Montrer, si $x \in D$, que $1-x \in D$ et qu'on a $f(1-x) = f(x)$.
d. (Mines) Établir l'existence d'une borne inférieure de f sur D et calculer $\operatorname{Inf}_D(f)$.
e. Déterminer des équivalents de f aux bornes de D.

14.7 <u>*CCINP PSI 2022*</u> Ewan Sarrazin II (note 10,09) Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

a. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
b. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression intégrale de $g'(x)$.
c. Montrer, si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, que $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$.
d. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.
e. Que vaut donc $g(x)$ si $x \in \mathbb{R}_-$?

14.8 <u>*Mines 2016 et Mines-Télécom PSI 2022*</u> Marine Saint-Mézard et Naïs Baubry I (note 18,5 et ?)

Pour $x \in D =]-1;+\infty[$, on définit la fonction $f_x : t \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$ et, en cas de convergence, $f(x) = \int_0^1 f_x(t)dt$.

a. Montrer que f_x est intégrable sur $]0;1[$ en distinguant les cas $x = 0$, $x > 0$ et $x < 0$.
b. Montrer que f est de classe C^1 sur D et calculer $f'(x)$.
c. En déduire une expression simple de $f(x)$.

14.9 <u>*Mines PSI 2023*</u> Antoine Notelle-Maire I (note 7) Pour $x \notin \{-1,1\}$, soit $I(x) = \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)d\theta$.

a. Justifier l'existence de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ I(x) = 2\int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\theta}|\right)d\theta$.
c. Montrer que $S_n(x) = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(|x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$. En déduire la valeur de $I(x)$.
d. Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et calculer $I'(x)$. En déduire à nouveau la valeur de $I(x)$.

14.10 <u>*CCINP PSI 2022, 2023*</u> Paul Sterlin I, Rébecca Blé II (note 14,87;16,75) Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t} dt$.

a. Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. Exprimer φ' puis φ avec des fonctions usuelles.

14.11 <u>*Mines PSI 2024*</u> Mathias Pisch I (note 8,5) Soit $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a. Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle y est strictement positive et de classe C^2.
b. Prouver que Γ et $\ln \circ \Gamma$ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. Établir, pour $x > 0$, que $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.
d. Trouver une relation entre $\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ et $\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.
e. En déduire que $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

14.12 <u>*CCINP PSI 2024*</u> Edward Bauduin et Jasmine Meyer I (note 16,6 et 14,67) Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.
b. Trouver la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Pour $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
c. En déduire un développement de f en somme de séries de fonctions de deux manières.