

DEVOIR 14 : SÉRIES ORTHOGONALES

PSI 1 2025-2026

mardi 16 décembre 2025

QCM

- 1** *Produit scalaire et norme : soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ (donc de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|$) et $\lambda \in \mathbb{R}$*

1.1 $\forall (a, b) \in E^2, (\lambda a + b|a - \lambda b) = \lambda \|a\|^2 - \lambda \|b\|^2$

1.3 $\forall (a, b) \in E^2, (a|b) \leq \|a\| \|b\|$

1.2 $\forall (a, b) \in E^2, (a|b) = \frac{1}{2} (\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a + b\|^2)$

1.4 $\forall (a, b) \in E^2, \|a + \lambda b\| \leq \|a\| + \lambda \|b\|$

- 2** *Orthogonaux : soit E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E*

2.1 $F \cap F^\perp = \{0_E\}$

2.3 $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$

2.2 $F = (F^\perp)^\perp$

2.4 $F \perp G \iff G^\perp \subset F$

- 3** *Bases orthonormales : soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une de ses bases orthonormales, deux vecteurs $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$*

3.1 $x \perp y \iff (\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k = 0 \text{ ou } y_k = 0)$

3.3 $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$

3.2 $\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|^2 \geq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$

3.4 $x = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k$

- 4** *Bases orthonormales : soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces dans E tels que $E = F \oplus G$, $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{B}' = (g_1, \dots, g_m)$ des bases orthonormales de F et G respectivement, posons $\mathcal{B}'' = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$*

4.1 $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n (x|f_i) f_i + \sum_{j=1}^m (x|g_j) g_j$

4.3 $(\mathcal{B}'' \text{ est une base orthonormale de } E) \implies G = F^\perp$

4.2 $\forall x \in F, x = \sum_{k=1}^n (x|f_k) f_k$

4.4 $F \subset G^\perp \implies (\mathcal{B}'' \text{ est une base orthonormale de } E)$

Énoncé Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Soit deux vecteurs x et y de E : $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$. Rappeler les formules qui donnent les x_k sous forme de produit scalaire, $(x|y)$ en fonction des coordonnées des vecteurs x et y , $\|x\|$ en fonction des $x_1, \dots, x_n$.

Preuve Soit E un espace préhilbertien réel (le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$), soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E telle que $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_k \neq 0_E$. Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Exercice 1 Établir que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\forall x > 0, I_x = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. On se rappellera que $\forall u \in \mathbb{R}, e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

Exercice 2 Sur $E = C^1([0, \pi])$, montrer que $(f|g) = f(0)g(0) + \int_0^\pi f'(t)g'(t)dt$ définit un produit scalaire.

Soit $F = \text{Vect}(1, \cos, \sin)$. On admet que $\mathcal{B} = (1, \cos, \sin)$ est libre ce qui en fait une base de E . Déterminer l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT de cette base $\mathcal{B}$ (avec le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$).

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

1.1 Faux : $(\lambda a + b|a - \lambda b) = \lambda \|a\|^2 - \lambda \|b\|^2 + (1 - \lambda^2)(a|b)$ **1.2** Faux : c'est $(a|b) = \frac{1}{2}(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$

1.3 Vrai : $(a|b) \leq |(a|b)|$ **1.4** Faux : il manque la valeur absolue.

2.1 Vrai : du cours **2.2** Faux : on a juste $F \subset (F^\perp)^\perp$ **2.3** Vrai : du cours **2.4** Faux : c'est $F \perp G \iff F \subset G^\perp$; si F et G sont deux droites orthogonales dans l'espace, $G^\perp$ est un plan !.

3.1 Faux : $x \perp y \iff \sum_{k=1}^n x_k y_k = 0$ **3.2** Faux : c'est $\leq$ dans CAUCHY-SCHWARZ **3.3** Vrai : par construction $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) \subset F^\perp$ et on conclut avec les dimensions **3.4** Vrai : du cours.

4.1 Faux : $\mathcal{B}''$ n'est une BON de E que si $F \perp G$ **4.2** Vrai : $\mathcal{B}$ est une BON de F **4.3** Vrai : les g_k sont dans $F^\perp$ donc $G \subset F^\perp$ et égalité par les dimensions **4.4** Vrai : Les f_i sont donc orthogonaux aux g_j et comme ils sont tous unitaires et que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthogonales, $\mathcal{B}''$ est une BON.

Énoncé • $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k = (e_k|x), (x = \sum_{k=1}^n (e_k|x)e_k : \text{coordonnées en fonction des produits scalaires}).$

• $(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ (produit scalaire) • $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ (norme en fonction des coordonnées).

Preuve Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k = 0_E, i \in \llbracket 1; p \rrbracket. \left(x_i \middle| \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \right) = (x_i|0_E) = 0$ par bilinéarité de $(\cdot, \cdot)$, puis par orthogonalité de la famille : $\lambda_i \|x_i\|^2 = 0 \implies \lambda_i = 0$ car $\|x_i\|^2 > 0$ puisque $x_i \neq 0_E$.

On obtient donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ donc la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Exercice 1 La fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $I =]0; 1]$, $g_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées

pour tout $x > 0$ et $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc g_x est intégrable sur I par RIEMANN : I_x existe. Pour

$t \in I$, on a $g_x(t) = t^{x-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1} \frac{(-1)^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n t^{x+n-1}}{n!}$. Les f_n et

g_x sont continues sur I . Les f_n sont intégrables sur I et $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 |f_n| = \frac{1}{n!(x+n)} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Puisque $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n|$ converge, par le TITT, $I_x = \int_I g_x(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

Exercice 2 Cette application est bien définie (car f' et g' sont continues sur le segment $[0; \pi]$ pour $(f, g) \in E^2$),

bilinéaire symétrique et positive. Si $f \in E$ et $(f|f) = 0, \int_0^\pi f'(t)^2 dt + f(0)^2 = 0 \implies \int_0^\pi f'(t)^2 dt = f(0)^2 = 0$.

Alors, comme f'^2 est positive et continue, $\int_0^\pi f'(t)^2 dt = 0 \implies f' = 0$ sur $[0; \pi]$ donc f constante (car $[0; \pi]$ est un intervalle). Mais comme $f(0) = 0$, on a $f = 0$ et $(\cdot, \cdot)$ est bien un produit scalaire sur E .

$\mathcal{B}$ est génératrice de F par définition. Si $a + b \cos + c \sin = 0$, on a $a + b = 0$ (en 0), $a + c = 0$ (en $\frac{\pi}{2}$),

$a - b = 0$ (en π donc $a = b = c = 0$ et $\mathcal{B}$ est aussi libre donc c'est une base de F . $f_1 = 1$ et $\|1\| = 1$; $f_2 = \cos - (\cos|1)1 = \cos - 1$ et $\|f_2\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 = \frac{\pi}{2}$; $f_3 = \sin - (\sin|1)1 - \frac{2}{\pi}(\sin|\cos - 1)(\cos - 1) = \sin$

et $\|\sin\|^2 = \int_0^\pi \cos^2 = \frac{\pi}{2}$ donc l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT est $\left(1, \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cos - 1), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\right)$.