CHAPITRE 10
SÉRIES ENTIÈRES

PARTIE 10.1 : CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

DÉFINITION 10.1 :
Une **série entière de variable complexe** *est une série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *telle qu'il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *pour laquelle :* $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n(z) = a_n z^n$ *; on la note alors par abus* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
Les complexes a_n *sont appelés les* **coefficients** *de la série entière .*
Une **série entière de variable réelle** *est une série entière* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

PROPOSITION 10.1 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **et** $z_0 \in \mathbb{C}^*$**, si la suite** $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée alors pour tout** $z \in \mathbb{C}$ **tel que** $|z| < |z_0|$**, la série** $\sum a_n z^n$ **converge absolument. : c'est le lemme d'**ABEL**.**

DÉFINITION 10.2 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, on appelle* **rayon de convergence** *de la série entière* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *la borne supérieure* $R \geqslant 0$ *de* $E = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$ *avec par extension* $R = +\infty$ *si* E *n'est pas majorée.*

THÉORÈME 10.2 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **et** R **le rayon de convergence de la série entière** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$**, alors** $\forall z \in \mathbb{C}$ **:**

- **si** $|z| < R$ **alors la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **est absolument convergente,**
- **si** $|z| > R$ **alors la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **est grossièrement divergente.**

DÉFINITION 10.3 :
Pour une série entière de la variable complexe $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$*, on note :*

- **disque ouvert de convergence** *le disque* $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ *de* $\mathbb{C}$.
- **disque fermé de convergence** *le disque* $B_f(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$ *de* $\mathbb{C}$ *(adhérence de* $B(0,R)$*).*
- **cercle de convergence** *le cercle* $S(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ *(frontière des deux précédents).*

Pour une série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$*, on note :*

- **intervalle ouvert de convergence** *l'intervalle* $]-R;R[$ *de* $\mathbb{R}$.
- **intervalle fermé de convergence** *l'intervalle* $[-R;R]$ *(segment si* $R < +\infty$*).*

REMARQUE 10.1 : • *Par définition* $R = \mathrm{Sup}\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = r \text{ et } (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \right\}$.

- *On a aussi* $R = \mathrm{Sup}\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = r \text{ et } \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge absolument} \right\}$.
- *On a aussi* $R = \mathrm{Sup}\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = r \text{ et } (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0 \right\}$.
- *On a aussi* $R = \mathrm{Sup}\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = r \text{ et } \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge} \right\}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 10.2 : Avec les notations ci-dessus :

- *S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée ou* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ *converge :* $R \geqslant |z_0|$.
- *S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas bornée ou* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ *diverge :* $R \leqslant |z_0|$.
- $\forall z \in B(0,R)$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *CVA et* $\forall z \notin B_f(0,R)$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *DVG. Si* $z \in S(0,R)$, *on ne peut rien dire !*

THÉORÈME 10.3 :
$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **et** $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ **deux séries entières de rayons de convergence respectifs** R_a **et** R_b **:**

(i) Si $a_n \underset{\infty}{=} O(b_n)$ **(en particulier si** $a_n \underset{\infty}{=} o(b_n)$ **ou** $|a_n| \leqslant |b_n|$**), alors** $R_b \leqslant R_a$.

(i) Si $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$**, alors** $R_a = R_b$.

THÉORÈME ÉNORME 10.4 :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **une série entière telle que** $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ a_n \neq 0$ **et que la suite** $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geqslant n_0}$ **converge vers** $L \in [0;+\infty]$**. Alors** $R = \dfrac{1}{L}$ **avec les conventions** $\dfrac{1}{0} = +\infty$ **et** $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

PROPOSITION 10.5 :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ **et** $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ **deux séries entières de rayons de convergence resp.** R_a, R_b.

- $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ **a aussi pour rayon de convergence** R_a.
- $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ **a pour rayon de convergence** $R \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$.
- $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ **a pour rayon de convergence** $R = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$ **si** $R_a \neq R_b$.
- $\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ **a pour rayon de convergence** $R \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$.

PROPOSITION 10.6 :
Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ **et** $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} z^n$ **ont le même rayon de convergence.**

PARTIE 10.2 : SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 10.7 :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **une série entière de rayon de convergence** R.

Si $R > 0$**, la série** $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **converge normalement sur tout disque fermé** $B_f(0,\rho)$ **pour** $\rho < R$.

THÉORÈME 10.8 :
Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **est de rayon** $R > 0$, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ **est continue sur** $]-R;R[$.

REMARQUE 10.3 : Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ *est absolument convergente alors* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge normalement sur* $B_f(0,R)$ *donc* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur* $[-R;R]$.

PROPOSITION 10.9 :
Soit deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ **de rayon respectifs** $R>0$ **et** $R'>0$ **et de sommes** $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ **et** $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ **là où elles sont définies, alors si** $\lambda\in\mathbb{K}$**, on a les opérations :**

(i) $\forall z\in B(0,R),\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n)z^n=\lambda.\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big)$.

(ii) $\forall z\in B\big(0,\mathrm{Min}(R,R')\big),\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n=\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big)+\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\Big)$.

(iii) $\forall z\in B\big(0,\mathrm{Min}(R,R')\big),\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)z^n=\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big)\times\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\Big)$.

THÉORÈME ÉNORME 10.10 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ **une série entière de la variable réelle de rayon de convergence** $R>0$ **et** f **sa fonction somme définie sur** $]-R;R[$ **(au moins) par** $\forall x\in]-R;R[,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ **:**

(i) Pour tout $(a,b)\in]-R;R[^2$**, on a** $\int_a^b f(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\Big[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_a^b$.

(ii) La primitive F **de** f **qui s'annule en** 0 **est somme sur** $]-R;R[$ **d'une série entière :**

$$\forall x\in]-R;R[,\ F(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n.$$

THÉORÈME ÉNORME 10.11 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ **une série entière de la variable réelle de rayon de convergence** $R>0$ **et** f **sa somme sur** $]-R;R[$**. Alors** f **est de classe** C^∞ **sur** $]-R;R[$ **et si** $p\in\mathbb{N}$**, on a :**
$\forall x\in]-R;R[,\ f^{(p)}(x)=\sum\limits_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p}=\sum\limits_{n=p}^{+\infty}\dfrac{n!}{(n-p)!}a_n x^{n-p}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^n$

En particulier, on a : $\forall p\in\mathbb{N},\ a_p=\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

PROPOSITION 10.12 :
Soit deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ **et** $R>0$ **tels que** $\forall x\in]-R;R[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$**,**
alors on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n$.

PARTIE 10.3 : FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE

DÉFINITION 10.4 :
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *dont* 0 *est un point intérieur, on dit que* $f:I\to\mathbb{K}$ *est* **développable en série entière** *s'il existe* $r>0$ *et une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $]-r;r[\subset I$ *et* $\forall x\in]-r;r[,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

REMARQUE 10.4 : • Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *est au moins égal à* r.

• *Si* f *est paire (resp. impaire) et DSE alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$ *(resp.* $a_{2n} = 0$*).*

PROPOSITION 10.13 :
Soit $r > 0$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-r;r[$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) λf **est DSE sur** $]-r;r[$ **(stabilité par multiplication par un scalaire).**

(ii) $f + g$ **est DSE sur** $]-r;r[$ **(stabilité par somme).**

(iii) $f \times g$ **est DSE sur** $]-r;r[$ **(stabilité par produit).**

DÉFINITION 10.5 :
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *dont* 0 *est un point intérieur et* f *une fonction de classe* C^∞ *sur* I*, on appelle* **série de** TAYLOR **de** f **en** 0 *la série entière de la variable réelle* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

REMARQUE 10.5 : Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *dont* 0 *est un point intérieur,* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *et* $r > 0$*, alors :*

$$\Big(f \text{ est DSE sur }]-r;r[\Big) \iff \Big(f \in C^\infty\big(]-r;r[, \mathbb{R}\big) \text{ et } \forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\Big).$$

THÉORÈME 10.14 :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $r > 0$, alors :

$$\Big(f \text{ est DSE sur }]-r;r[\Big) \iff \Big(f \in C^\infty\big(]-r;r[, \mathbb{R}\big) \text{ et } \forall x \in]-r;r[,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = 0\Big).$$

THÉORÈME 10.15 :
Il faut connaître par cœur les développements en séries entières des fonctions usuelles de la variable réelle suivantes (pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$), en notant $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$:

$\mathrm{sh}(x)$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$	$\mathrm{ch}(x)$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin(x)$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$	$\cos(x)$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1+x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$R = 1$	$\frac{1}{1-x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$-\ln(1-x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$	$\ln(1+x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$R = 1$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$

À savoir retrouver assez rapidement, avec un rayon de convergence égal à $R = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} x^n,\ \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} x^n,\ \mathrm{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}.$$

REMARQUE FONDAMENTALE 10.6 : Pour un complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *quelconque, on a la relation essentielle* $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.