

TD 14 : INTÉGRALES À PARAMÈTRE

PSI 1 2025-2026

vendredi 19 décembre 2025

14.1 a. Soit $h : \mathbb{R}_+ \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_0^1 h(x, t) dt$.

(H₁) $\forall t \in [0; 1], x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -e^{-(1+t^2)x}$.

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0; 1]$.

(H₃) $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 1], \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-x} \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est constante donc intégrable sur $[0; 1]$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = - \int_0^1 e^{-(1+t^2)x} dt$.

b. Classiquement, $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, pour $x > 0, \forall t \geq 0, 0 \leq e^{-(1+t^2)x} \leq e^{-x}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x} dt = e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $h : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'intégration et $h'(x) = e^{-x^2}$. De plus, d'après a., g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Ainsi, la fonction $a : x \mapsto g(x) + h(x)^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\forall x \geq 0, a'(x) = 2xf'(x^2) + 2h'(x)h(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Si $x = 0, a'(0) = 0$ et, si $x > 0$, on a $a'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2 x^2} x dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt - \int_0^1 e^{-t^2 x^2} x dt \right)$. Or par le changement de variable $u = xt$, il est clair que $\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2 x^2} x dt$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+, a'(x) = 0$. Comme $a' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, a(x) = g(x) + h(x)^2 = C \geq 0$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit $C = g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$ d'après a..

Comme f est une fonction positive, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{f(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)}$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ainsi, on a la valeur de l'intégrale de GAUSS, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ qu'on note $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

14.2 a. Pour $x \in \mathbb{R}, g_x : t \mapsto e^{-t^2} \cos(2tx)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2}) = o(e^{-t})$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = e^{-t^2} \cos(2tx)$.

(H₁) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2t \sin(2tx) e^{-t^2}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}, g_x : t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et g_x y est intégrable.

(H₃) Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2te^{-t^2} = \varphi(t)$. Comme $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(2xt)(-2te^{-t^2}) dt$.

b. On pose les fonctions $u : t \mapsto \sin(2xt)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, par intégration par parties et comme on a la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ et $u(0)v(0) = 0$, on arrive à la relation suivante :

$f'(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = -2x \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2} dt = -2xf(x)$. Ainsi, f est solution

sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$. Comme on a classiquement $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS), et qu'une primitive de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$, on a facilement $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

c. Méthode 1 : en utilisant la question précédente, on pose $b_y : x \mapsto e^{-(x+iy)^2} = e^{-x^2+y^2-2ixy}$, alors

b_y est continue sur $\mathbb{R}$ et $|b_y(x)| = e^{-x^2+y^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, b_y est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $g(y)$ existe. De plus, $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \sin(2xy) dx$. Mais la fonction $x \mapsto e^{-x^2+y^2} \sin(2xy)$ est impaire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \sin(2xy) dx = 0$ et, par parité de $x \mapsto e^{-x^2+y^2} \cos(2xy)$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) dx = 2e^{y^2} f(y) = \sqrt{\pi}$ d'après a..

Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \sqrt{\pi}$.

Méthode 2 : définissons $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $a(x, y) = e^{-(x+iy)^2}$.

(H₁) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto a(x, y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = -2i(x + iy)e^{-(x+iy)^2}$.

(H₂) Pour $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x, y)$ et $x \mapsto \frac{\partial a}{\partial y}(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $|a(x, y)| = e^{y^2-x^2} \underset{\pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, la fonction $x \mapsto a(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(H₃) Pour $b > 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R} \times [-b; b]$, $\left| \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2|x + iy|e^{y^2-x^2} \leq 2(|x| + b)e^{b^2-x^2} = \psi_b(x)$. ψ_b est continue et paire sur $\mathbb{R}$ et $\psi_b(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées : ψ_b est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-(x+iy)^2} = 0$, on a $g'(y) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} 2(x + iy)e^{-(x+iy)^2} dx = -i \left[e^{-(x+iy)^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, g est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut donc $g(0) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (par parité) donc $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \sqrt{\pi}$.

14.3 a. La fonction $g : t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1$ car on sait que $\sin(t) \sim t$. De plus, $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et I_2 existe.

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f_x : t \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}$. f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = x^2$ car $\sin(u) \sim u$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^4}\right)$ donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}$.

(H₁) Pour $t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 2 \frac{\cos(2tx)}{1+t^2}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir).

(H₃) Soit $a > 0$, $x \in [-a; a]$, $t > 0$, il vient $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|2tx|}{t(1+t^2)} \leq \frac{2a}{1+t^2} = \varphi_a(t)$ car on a l'inégalité

$\forall u \in \mathbb{R}_+, |\sin(u)| \leq u$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2a}{t^2}$. De même, on a

$\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2}{1+t^2} = \psi_2(t)$ et ψ_2 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme appliqué deux fois, la fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a les formules $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)} dt$ et $F''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{(1+t^2)} dt$ pour tout réel x .

Si $x \in \mathbb{R}$, comme $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$, $F''(x) - 4F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\cos(2tx)}{(1+t^2)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{4\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$ devient

$F''(x) - 4F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 - 4\sin^2(tx)}{(1+t^2)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{4\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - 4 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$.

Or $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et avec le changement de variable $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ (si $x > 0$) avec

φ de classe C^1 strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on trouve, dans la seconde intégrale, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt = x \int_0^{+\infty} g(u) du = xI_2$. Par conséquent, $\forall x > 0, F''(x) - 4F(x) = \pi - 4xI_2$ (E) et cette

relation est aussi vérifiée si $x = 0$ car $F(0) = 0$ et $F''(0) = \pi$.

c. On résout (E) sur $\mathbb{R}_+$. Les solutions de l'équation homogène associée sont classiquement les fonctions $y : x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$ et une solution particulière de (E) est clairement $y_0 : x \mapsto xI_2 - \frac{\pi}{4}$. Ainsi, les solutions

de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sont les fonctions $y : x \mapsto xI_2 - \frac{\pi}{4} + Ae^{2x} + Be^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Or $F(0) = F'(0) = 0$

donc $A + B = \frac{\pi}{4}$ et $2A - 2B = -I_2$ donc, après calculs, on trouve $A = \frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2}$ et $B = \frac{\pi}{4} + \frac{I_2}{2}$. Au final,

$$\forall x \geq 0, F(x) = xI_2 - \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{I_2}{2}\right)e^{-2x}.$$

d. Comme $\forall u \in \mathbb{R}_+, |\sin(u)| \leq u$, on a $|F(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi x^2}{2}$ pour tout x .

Pour déterminer un équivalent de F en $+\infty$, on doit traiter deux cas :

- Si $\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} \neq 0$, par croissances comparées, on a $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2}\right)e^{2x}$.
- Si $\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} = 0$, on a par contre $F(x) \underset{+\infty}{\sim} I_2 x$ (car $I_2 > 0$).

Mais comme $\forall x \geq 0, |F(x)| \leq \frac{\pi x^2}{2}$, le premier cas est à proscrire car $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^{2x})$. On en déduit donc

$$\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} = 0 \text{ donc que } I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

e. Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto \sin^2(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ car $\sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^2$ et $\sin$ est bornée. Ainsi, par intégration par parties,

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \text{ en posant } t = \frac{u}{2} \text{ (facile à}$$

justifier). Par conséquent, on retrouve la valeur de l'intégrale de DIRICHLET : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

14.4 a. Pour un réel x , la fonction $h_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $x < 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_x(t) = +\infty$ donc h_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $x = 0$, $h_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ donc h_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car une primitive de h_0 est Arctan qui admet une limite finie en $+\infty$.
- Si $x > 0$, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ou $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de référence.

Ainsi, le domaine de définition de la fonction f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

(H₁) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H₂) Pour $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir ci-dessus). De plus, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$.

Enfin, $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H₃) Pour $a > 0$ et $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a la majoration $\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, par théorème, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt$ par LEIBNIZ. Par

conséquent, $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} + \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

c. Les fonctions $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc la nature

de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est la même, par intégration par parties, que celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. Or $\frac{\sin(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge, ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge aussi. De même, $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge car elle est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Comme les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, il vient $g'(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt\right) \cos(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt\right) \sin(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration donc $g'(x) = -\left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt\right) \cos(x) - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt\right) \sin(x)$. De même, g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g''(x) = \frac{\cos^2(x)}{x} + \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt\right) \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt\right) \cos(x)$ donc $g''(x) = \frac{1}{x} - g(x)$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par conséquent, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) : $y'' + y = \frac{1}{x}$.

$h = f - g$ est C^2 par opérations et $h''(x) = f''(x) - g''(x) = -f(x) + \frac{1}{x} + g(x) - \frac{1}{x} = -(f - g)(x) = -h(x)$ donc $h'' + h = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait qu'alors $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x > 0, h(x) = A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \theta)$. Or $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$ car $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. En tant que "reste" d'intégrales convergentes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = 0$ donc, comme $\cos$ et $\sin$ sont bornées, on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ ce qui impose $\sqrt{A^2 + B^2} = 0$ donc $A = B = 0$. On déduit donc $f = g$ du fait que $h = 0$.

e. Avec les notations de la question **b.**, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et que ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ par continuité sous le signe somme car $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $f(0) = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

En écrivant $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos(t) - 1}{t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt$, comme $\int_x^1 \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = O(1)$ car $t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \sim_0 -\ln(x)$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Avec l'intégration par parties de **c.**, on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(t/2)}{t^2} dt$. On pose $t = 2u$ dans cette dernière intégrale, facile à justifier, et on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(u)}{4u^2} (2du) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

14.5 **a.** Si $x \in \mathbb{R}, g_x : t \mapsto \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \sim_{+\infty} t e^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-xt} = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x > 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \sim_{+\infty} t e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales

de RIEMANN, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ converge et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} \geq e^{-yt}$ donc $g_x(t) \geq g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t)dt$.

(H₁) Pour $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H₂) Pour $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto h(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H₃) Pour $a > 0$, $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \leq t^2 e^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a > 0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la formule de LEIBNIZ, $\forall x > 0$, $f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} \geq e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \leq \frac{\partial h}{\partial x}(y, t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x) \leq f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc conclure d'après le cours que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt = \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$ par intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)v(t) = 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

d. La fonction $t \mapsto t^3 e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^3 e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $x > 0$.

Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et avoir $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{x^4} e^{-u} du = \frac{\Gamma(4)}{x^4} = \frac{3!}{x^4} = \frac{6}{x^4}$.

Pour $x > 0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x) - g(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} - t^3 e^{-xt} \right) dt \right|$ qu'on écrit aussi $|f(x) - g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(\frac{\sqrt{1+t^4} - 1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt$ et, avec la quantité conjuguée, $|f(x) - g(x)| = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} \left(\frac{(1+t^4) - 1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})} \right) dt = \int_0^{+\infty} t^7 e^{-xt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})} \right) dt$. Or on minore $\forall t \geq 0$, $\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4}) \geq 1$ donc $|f(x) - g(x)| \leq \int_0^{+\infty} t^7 e^{-xt} dt = \frac{\Gamma(8)}{x^8} = \frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus. On a donc $f(x) - g(x) = O\left(\frac{1}{x^8}\right) = o\left(\frac{1}{x^4}\right) = o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x) \sim_{+\infty} g(x) = \frac{6}{x^4}$.

e. Méthode 1 : pour $x \in]0; 1]$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^{1/x} h(x, t)dt + \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t)dt \geq \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t)dt$. Or, on a $\int_{1/x}^{+\infty} h(x, t)dt = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/x}^{+\infty} t e^{-xt} dt$ car $\sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{2} t^2$ pour $t \in [1/x; +\infty[\subset [1; +\infty[$, d'où $\sqrt{2} \int_{1/x}^{+\infty} h(x, t)dt \geq \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_{1/x}^{+\infty} + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \frac{1}{ex^2} + \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_{1/x}^{+\infty} = \frac{2}{ex^2}$ avec la même intégration par parties qu'à la question **c.**. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{ex^2} = +\infty$, par encadrement, on

obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Méthode 2 : pour $x > 0$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^1 h(x, t) dt + \int_1^{+\infty} h(x, t) dt \geq \int_1^{+\infty} h(x, t) dt$. Or, on a $\int_1^{+\infty} h(x, t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{t^2} dt$ car $\forall t \geq 1, 1+t^4 \leq 2t^4$. Ainsi, comme $\int_1^{+\infty} t e^{-xt} dt = \left[-t \frac{e^{-xt}}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} dt = \frac{e^{-x}}{x} + \left[-\frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}$, et que l'on a la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) = +\infty$, par encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour aller plus loin, avec le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{x}$ avec la fonction φ qui est de classe C^1 , bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}} du$ donc la relation

$$x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} a(x, u) du \text{ en posant } a(x, u) = \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}}.$$

(H₁) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x, u) = u e^{-u} = b(u)$.

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto a(x, u)$ et $u \mapsto b(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $|a(x, u)| = \left| \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4 + u^4}} \right| \leq u e^{-u} = b(u)$ avec b continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme avant.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} b(u) du = \Gamma(2) = 1$.

Par conséquent, $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

14.6 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) \sim_0 \frac{1}{t^x}$ et $g_x(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}$.

D'après RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x < 1$ et g_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $1+x > 1$. Ainsi, g_x étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \in]0; 1[$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D =]0; 1[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes.

b. Soit $h :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt$.

(H₁) pour $t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0; 1[$.

(H₂) pour $x \in]0; 1[$, $t \mapsto h(x, t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après a..

(H₃) soit $0 < a < b < 1$, $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x, t)| = \frac{t^{-x}}{1+t} \leq \frac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0; 1]$ et $|h(x, t)| \leq \frac{t^{-a}}{1+t}$

si $t \in [1; +\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(t) = \frac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0; 1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \frac{t^{-a}}{1+t}$ si

$t \in [1; +\infty[$ et $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$ d'après ce qui précède. La fonction $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec $\varphi_{a,b}(1) = \frac{1}{2}$) et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi_{a,b}(t) \sim_0 \frac{1}{t^b}$ avec $b < 1$

et $\varphi_{a,b}(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}$ avec $1+a > 1$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0; 1[$.

c. Si $x \in]0; 1[$, on a clairement $1-x \in]0; 1[$. De plus, en effectuant dans $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ le changement de variable $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ est de classe C^1 , bijective et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on

$$a \ f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{u^{-x}(1+u^{-1})} \left(-\frac{du}{u^2} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(1+u)} = f(1-x). \text{ Ainsi la courbe de } f \text{ est symétrique}$$

par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left[2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi$.

d. La symétrie précédente suggère que c'est en $\frac{1}{2}$ que f atteint une valeur particulière, pourquoi pas son minimum. Soit $\alpha \in D$, alors $f(\alpha) = f(1-\alpha) = \frac{f(\alpha) + f(1-\alpha)}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2x^\alpha(1+x)} + \frac{1}{2x^{1-\alpha}(1+x)} \right) dx$ par linéarité de l'intégrale. On l'écrit $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-(1/2)} + x^{(1/2)-\alpha}}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$ et on se rappelle de l'inégalité classique $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ de sorte que $f(\alpha) \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = f(0) = \left[2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi$. Ainsi, la valeur minimale prise par f sur D est $f(0) = \pi$.

e. Méthode 1 : quand x tend vers 0, c'est au voisinage de $t = +\infty$ qu'il va y avoir un problème et que l'intégrale va être grande. Or $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc on approche $f(x)$ par $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}$. Évaluons la différence entre ces quantités, $f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)}$. Or $0 \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{1}{1-x}$ et $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2+x}} = \frac{1}{1+x} \leq 1$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} = O(1)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} = O(1)$. Par somme : $f(x) - \frac{1}{x} = O(1) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Méthode 2 : on pouvait aussi poser $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1 et une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a la relation $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})} du$. Soit $a :]0; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $a(x, u) = \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}$ de sorte que $xf(x) = \int_0^{+\infty} a(x, u) du$.

(H₁) si $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x, u) = d(u)$ avec $d(u) = 0$ si $u < 0$, $d(u) = \frac{1}{2}$ si $u = 1$ et $d(u) = \frac{1}{u^2}$ si $u > 1$.

(H₂) si $x \in]0; 1[$, les fonctions $g_x : t \mapsto g(x, t)$ et d sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H₃) si $(x, u) \in]0; 1[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $|a(x, u)| \leq \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = 1$ si $u < 1$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(u) = \frac{1}{u^2}$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} a(x, u) du$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \int_0^{+\infty} d(u) du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_0^{+\infty} = 1$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

14.7 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$ avec un prolongement par continuité

$f_x(0) = x$ en 0 car $\operatorname{Arctan}(xt) \underset{0}{\sim} xt$ si $x \neq 0$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN ($3 > 1$). Ainsi, g est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

(H₁) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \left|\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leq \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq \pm 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \frac{x^2(1+t^2) - (1+x^2t^2)}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ en réduisant au

même dénominateur, $\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \frac{x^2-1}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.

d. Si on prend $x \geq 0$ et $x \neq 1$, d'après **c.**, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} \right) dt$ donc $g'(x) = \frac{x}{x^2-1} \left[\text{Arctan}(xt) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(1-x^2)} \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty}$ et, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne $g'(x) = \frac{x\pi}{2(x^2-1)} + \frac{\pi}{2(1-x^2)} = \frac{(x-1)\pi}{2(x^2-1)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme la fonction g' est continue en 1 d'après **b.**, on a $g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(1+1)}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2} + \lambda$. Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{\pi \ln(1+x)}{2}$.

e. Par imparité de F , on a $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $g(x) = -g(-x) = -\frac{\pi \ln(1-x)}{2}$ d'après **d.**

14.8 a. Clairement, la fonction f_x est continue sur $]0;1[$ et elle est de signe constant sur $]0;1[$: f_x est positive si $x < 0$ et f_x est négative si $x > 0$. De plus, si $x \neq 0$, comme $t^x - 1 = e^{x \ln(t)} - 1$ et que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(t) = 0$, on a $t^x - 1 \sim x \ln(t)$ donc $f_x(t) \sim x$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = x$. Ainsi, la fonction f_x est toujours intégrable sur le segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

- Si $x = 0$, alors $f_0 = 0$ donc f_0 est intégrable sur $]0;1[$.
- Si $x > 0$, $f_x(t) \sim -\frac{1}{\ln(t)}$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(t)} = 0$ donc f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 0$. f_x est donc intégrable car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.
- Si $x < 0$, $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{-x} \ln(t)}$ donc $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right)$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$ et, d'après RIEMANN, f_x est intégrable sur $]0;1[$ car $-x < 1$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $]0;1[$ pour tout réel $x \in \mathbb{D}$.

b. Soit $g : \mathbb{D} \times]0;1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$. Alors :

- (H₁) $\forall t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{D}$.
- (H₂) $\forall x \in \mathbb{D}$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^x$ est continue sur $]0;1[$.
- (H₃) Soit $a \in \mathbb{D}$, $\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0;1[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = t^x \leq t^a = \varphi_a(t)$ et φ_a intégrable sur $]0;1[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur $\mathbb{D}$ et $\forall x > -1$, $f'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

Comme $\mathbb{D}$ est un intervalle et que $f(0) = 0$, en intégrant, on a donc $\forall x > -1$, $f(x) = \ln(1+x)$.

14.9 a. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, comme $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) > 0$ car $\sin(\theta) > 0$ si $\theta \in]0; \pi[$ et que $(x - \cos(\theta))^2 > 0$ si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ car $x \neq \pm 1$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc $I(x)$ existe.

b. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $(x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = (x - \cos(\theta) - i \sin(\theta))(x - \cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |x - e^{i\theta}|^2$ pour $\theta \in [0; \pi]$ donc $f_x(\theta) = 2 \ln(|x - e^{i\theta}|)$ de sorte que, par linéarité de l'intégrale, $I(x) = 2 \int_0^\pi \ln(|x - e^{i\theta}|) d\theta$.

c. Par propriété du logarithme, on a $S_n(x) = \frac{2\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} |x - e^{\frac{ik\pi}{n}}| \right) = \frac{\pi}{n} \ln \left(\left| \prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}}) \right|^2 \right)$ donc

$S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln \left((x-1)^2 \left| \prod_{k=1}^{n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}}) \right| \right) = \frac{\pi}{n} \ln \left((x-1)^2 \left| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{2n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}}) \right| \right)$. Or on connaît les

$2n$ racines distinctes de $X^{2n} - 1$ qui sont les éléments de $\mathbb{U}_{2n} = \{e^{\frac{ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket\}$, ainsi on factorise $X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - e^{\frac{ik\pi}{n}})$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln \left(|x^{2n} - 1| \cdot \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(x) = \frac{\pi-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_x\left(0 + \frac{k(\pi-0)}{n}\right)$ associée à la fonction f_x continue sur le segment $[0; \pi]$. D'après le cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \int_0^\pi f_x(\theta) d\theta$. Or, avec la question b., on a

$$R_n(x) = \frac{\pi-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(|x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|^2) \text{ donc } R_n(x) = S_n(x) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta = I(x).$$

• Si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|x^{2n} - 1| \cdot \left|\frac{x-1}{x+1}\right|) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$ ce qui montre avec ce qui précède (pas d'indétermination) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln\left(|x^{2n} - 1| \cdot \left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = 0$ d'où $I(x) = 0$.

• Si $|x| > 1$, on a $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln(|x|^{2n} \cdot |1 - x^{-2n}| \cdot \left|\frac{x-1}{x+1}\right|) = 2\pi \ln(|x|) + \frac{\pi}{n} \ln(|1 - x^{-2n}|) + \frac{\pi}{n} \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$ et, avec les mêmes arguments, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 2\pi \ln(|x|)$ donc $I(x) = 2\pi \ln(|x|)$.

d. Soit $h : (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation $h(x, \theta) = \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1)$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I(x) = \int_0^\pi h(x, \theta) d\theta$.

(H₁) $\forall \theta \in [0; \pi]$, la fonction $x \mapsto h(x, \theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(H₂) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la fonction $f_x : \theta \mapsto h(x, \theta)$ est continue et intégrable sur $[0; \pi]$ (on l'a vu en question a.) et $\theta \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) = \frac{2(x - \cos(\theta))}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}$ est continue sur $[0; \pi]$.

(H₃) - Soit $x \in [a; b] \subset]1; +\infty[$ et $\theta \in [0; \pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta)\right| = \frac{2(x - \cos(\theta))}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{2(b+1)}{(a-1)^2} = \varphi_{a,b}(\theta)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; \pi]$.

- Soit $x \in [a; b] \subset]-\infty; -1[$ et $\theta \in [0; \pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta)\right| = \frac{2(\cos(\theta) - x)}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{2(-a+1)}{(b-1)^2} = \psi_{a,b}(\theta)$ et $\psi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; \pi]$.

- Soit $x \in [-a; a] \subset]-1; 1[$ et $\theta \in [0; \pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta)\right| = \frac{2|x - \cos(\theta)|}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{2(a+1)}{(1-a)^2} = \Theta_a(\theta)$ et Θ_a est continue donc intégrable sur le segment $[0; \pi]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction I est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et, d'après la formule de LEIBNIZ, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I'(x) = \int_0^\pi \frac{2(x - \cos(\theta))}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1} d\theta$.

On pose $\theta = 2 \operatorname{Arctan}(u) = \varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1 , strictement croissante et bijective de $[0; +\infty[$ dans $[0; \pi[$ et, par changement de variable, comme $\cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\varphi'(u) = \frac{2}{1+u^2}$, on obtient la relation

$$I'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2(x(1+u^2) - (1-u^2))}{(1+x^2)(1+u^2) - 2x(1-u^2)} \left(\frac{2}{1+u^2}\right) du = 4 \int_0^{+\infty} \frac{(x-1) + (x+1)u^2}{(1+u^2)((x-1)^2 + (1+x)^2 u^2)} du.$$

Pour $x \neq 0$, on décompose $\frac{(x-1) + (x+1)u^2}{(1+u)((x-1)^2 + (1+x)^2 u^2)} = \frac{\alpha}{1+u} + \frac{\beta}{(x-1)^2 + (1+x)^2 u^2}$ en éléments simples et, classiquement, $\alpha = \frac{1}{2x}$ et $\beta = \frac{x^2-1}{2x}$. Ainsi, $I'(x) = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2 + (1+x)^2 u^2}\right) du$. Les deux

intégrales convergent donc, par linéarité, on a $I'(x) = \frac{2}{x} \left[\operatorname{Arctan}(u) \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{x+1}{x-1}}{1 + \left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right)^2} du$ donc

$$I'(x) = \frac{2}{x} \left[\operatorname{Arctan}(u) \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{x} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right) \right]_0^{+\infty}.$$

• Si $|x| > 1$, $\frac{x+1}{x-1} > 0$ donc $\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x) = \frac{2\pi}{x}$.

• Si $|x| < 1$ et $x \neq 0$, $\frac{x+1}{x-1} < 0$ donc $\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right) \right]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x) = 0$. Par continuité de I' en 0, on a aussi $I'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} I'(x) = 0$ donc $\forall x \in]-1; 1[$, $I'(x) = 0$.

En intégrant sur les trois intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; +\infty[$, il existe trois constantes C_1, C_2, C_3 réelles telles que $\forall x \in]-\infty; -1[$, $I(x) = 2\pi \ln(|x|) + C_1$, $\forall x \in]-\infty; -1[$, $I(x) = C_2$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $I(x) = 2\pi \ln(x) + C_3$. Comme $I(0) = 0$, on a $C_2 = 0$. Pour $|x| > 1$, on a $I(x) - 2\pi \ln(|x|) = \int_0^\pi (\ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) - \ln(|x|^2)) d\theta$. Ainsi, $I(x) - 2\pi \ln(|x|) = \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2 \cos(\theta)}{x} + \frac{1}{x^2}\right) d\theta = I\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $I(x) = 2\pi \ln(|x|)$ ce qui montre que $C_1 = C_3 = 0$. On retrouve, comme avant, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I(x) = 2\pi \ln(|x|)$ si $|x| < 1$ et $I(x) = 0$ si $|x| < 1$.

14.10 Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0) = x$ car $\sin(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$ et $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison à des intégrales de référence. Ainsi, la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$.

(H₁) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H₃) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\cos(xt)|e^{-t} \leq e^{-t} = \psi(t)$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, avec la formule de LEIBNIZ, il vient $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ implique l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C + \operatorname{Arctan}(x)$. Or $g(0) = 0$, d'ailleurs g est clairement impaire, donc $C = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.

14.11 a. Pour $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle vérifie $f_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$

donc f_x est intégrable en 0 par comparaison aux intégrales de RIEMANN et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_x est aussi intégrable en $+\infty$ toujours par critère de RIEMANN. Ainsi, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\Gamma(x)$ existe : Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f_x est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) \geq 0$.

De plus, si on avait $\Gamma(x) = 0$, comme f_x est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait $f_x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui est absurde car f_x reste strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$:

(H₁) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H₂) Pour $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir).

(H₃) Pour $x > 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t)t^{x-1}e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H₄) Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a; b]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$ avec $\varphi_{a,b}(t) = (\ln(t))^2 t^{a-1}e^{-t}$ si $t \in]0; 1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = (\ln(t))^2 t^{b-1}e^{-t}$ si $t \in]1; +\infty[$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} (\ln(t))^2 t^{a-1} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ avec $1 - \frac{a}{2} < 1$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o(t^b e^{-t}) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a les expressions des dérivées $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t} dt$ et $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t} dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Γ est de classe C^2 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la question a., $\forall x > 0$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t} dt \geq 0$ donc, d'après le cours, Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, comme Γ et $\ln$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

et que Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, $g = \ln \circ \Gamma$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ donc $g''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma^2(x)}$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour les intégrales, comme

$$|\Gamma'(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{|\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}} \times \sqrt{t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}} dt, \text{ on}$$

a par inégalité triangulaire $|\Gamma'(x)|^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{|\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}} \right)^2 dt \right) \times \left(\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}} \right)^2 dt \right)$ ce qui donne $|\Gamma'(x)|^2 = \Gamma'(x)^2 \leq \Gamma''(x) \times \Gamma(x)$ puis $g'(x) \geq 0$. Ainsi, $g = \ln \circ \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons $g_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ si $t \in [0; n]$ et $g_n(t) = 0$ si $t > n$. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_n(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ donc g_n est intégrable en 0 donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN car g_n est nulle au voisinage de $+\infty$. De plus, on a $J_n = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

(H₁) La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ car $g_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)$ dès que $n \geq t$, que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -t$ puisque $\ln(1+u) \sim u$.

(H₂) Les fonctions g_n et la fonction f_x sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H₃) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, si $t \leq n$, $|g_n(t)| = t^{x-1} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq f_x(t) = t^{x-1} e^{-t}$ car $\exp$ est croissante et que, par concavité de $\ln$, on a $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$. De plus, f_x est bien continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

d. Dans l'intégrale convergente $\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, on pose $t = nu = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0; 1]$ dans $]0; n]$ et on a $J_n = \int_0^1 (nu)^{x-1} (1-u)^n n du$ par changement de variable donc $J_n = \int_0^1 t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$.

e. Posons $K_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ (elle existe même si $n = 0$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, dans l'intégrale $K_n(x)$, on pose $a : u \mapsto \frac{u^x}{x}$ et $b : u \mapsto (1-u)^n$ de sorte que a et b sont de classe C^1 sur $]0; 1]$ et que $a(1)b(1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} a(u)b(u) = 0$ car $x > 0$. Par intégration par parties, on a donc $K_n(x) = - \int_0^1 \frac{u^x}{x} (-n(1-u)^{n-1}) du = \frac{n}{x} K_{n-1}(x+1)$. Par une récurrence facile, comme $K_0(x) = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$, on a $K_n(x) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} \times \dots \times \frac{1}{x+n-1} \times K_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n-1)(x+n)}$. Ainsi, comme $J_n = n^x K_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n-1)(x+n)}$ avec **d.** et que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ avec **c.**, on obtient la relation $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$ pour tout $x > 0$.

14.12 a. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$, la fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_x(t) \sim te^{-(x+1)t}$. De plus, comme

$e^t - 1 \sim t$, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_x(t) = 1$ quelle que soit la valeur de x ce qui fait que f_x est toujours intégrable en 0^+ .

• Si $x \leq -1$, on a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_x(t) = +\infty$ et f_x n'est donc pas intégrable en $+\infty$.

• Si $x > -1$, $f_x(t) \sim_{+\infty} te^{-(x+1)t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_x est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > -1$, et comme f_x est positive, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si $x > -1$. Par conséquent, le domaine de définition D de f est $D =]-1; +\infty[$.

b. Méthode 1 : la fonction $g : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La convexité de la fonction exponentielle montre que $\forall t > 0, e^t > t + 1$ donc $e^t - 1 > t$ et on a $\forall t > 0, g(t) \leq 1$. Par conséquent, par croissance de l'intégrale, comme $e^{-xt} > 0, \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Ainsi, puisque $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$:

$$(H_1) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, t) = 0 = h(t).$$

$$(H_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \text{ la fonction } t \mapsto g(x, t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } h \text{ l'est aussi.}$$

$$(H_3) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, |g(x, t)| \leq \frac{t}{e^t - 1} = f_0(t) \text{ et on a vu que } f_0 \text{ est continue et intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} h(t) dt = 0$.

Pour $x > 0, x - 1 \in D$ donc $f(x - 1)$ et $f(x)$ existent et, par linéarité de l'intégrale, on a la relation

$$f(x - 1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^{-(x-1)t} - e^{-xt})}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt. \text{ On pose } u : t \mapsto t \text{ et } v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x},$$

les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par

$$\text{intégration par parties, } f(x - 1) - f(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

$$\text{donc } f(x - 1) - f(x) = \frac{1}{x} \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}.$$

c. Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n (f(x + k - 1) - f(x + k)) = f(x) - f(x + n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x + k)^2}$ par télescopage donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = 0$ d'après **b.** et que $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x + k)^2}$ converge par

RIEMANN, on a $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x + k)^2}$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_x(t) = \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} = \frac{te^{-(x+1)t}}{1 - e^{-t}} = te^{-(x+1)t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n$

car $|e^{-t}| < 1$ (série géométrique). Ainsi, $f_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = te^{-(x+1+n)t}$.

$$(H_1) \quad \text{La série } \sum_{n \geq 0} g_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+^* \text{ vers } f_x \text{ (on vient de le voir).}$$

$$(H_2) \quad \text{Les fonctions } g_n \text{ sont continues et intégrables sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car elles se prolongent par continuité en 0 en posant } g_n(0) = 0 \text{ et qu'on a } g_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ par croissances comparées.}$$

$$(H_3) \quad \text{La fonction } f_x \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$(H_4) \quad \text{Pour } n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt \text{ en posant}$$

$$u : t \mapsto -\frac{e^{-(x+1+n)t}}{x + 1 + n} \text{ et } v : t \mapsto t \text{ qui sont } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0 \text{ par}$$

$$\text{croissances comparées car } x + 1 + n > 0. \text{ Ainsi, } \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1+n)t}}{x + 1 + n} dt = \frac{1}{(x + 1 + n)^2}$$

$$\text{et la série } \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt \text{ converge par comparaison car } \frac{1}{(x + 1 + n)^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et on

$$\text{a } \forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x + 1 + n)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x + k)^2} \text{ en posant } k = n + 1.$$