ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 8 INTÉGRALES À PARAMÈTRE

8.1 Intégrales à paramètre

8.1 *Centrale PSI 2012* On définit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x^2t) - \text{Arctan}(xt)}{t} dt$.

a. Vérifier (sans chercher à le calculer) que $F(x)$ existe quel que soit le réel $x \in \mathbb{R}_+$.
b. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
c. En déduire une expression de $F(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$.
d. Calculer $F(x)$ par une méthode plus simple.

8.2 *Mines PSI 2007 d'après RMS* Soit $f : x \in [1; +\infty[\mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t) dt$. Calculer $f(x)$.

8.3 **a.** Existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \text{ch}\,(2xt) dt$.
b. Calculer $F(x)$ en introduisant une équation différentielle vérifiée par F.
c. Calculer $F(x)$ directement par une intégration terme à terme.

8.4 *Centrale PSI 2012* On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

a. Montrer que f est de classe C^2 sur son ensemble de définition. En déduire que f est convexe.
b. Établir que la courbe de f est symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$. Donner la valeur minimale prise par f.
c. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

8.5 *Centrale PSI 2012* On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.

a. Domaine I de définition de f. Montrer que f est de classe C^1 sur I et calculer $f'(x)$.
b. En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de x.

8.2 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

8.6 *Centrale PSI 2013* Maxime R.

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x + 2\pi)\}$.
On pose $||f||_\infty = \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Sup}} |f(x)|$ et $G(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt$ si $f \in E$.
a. Montrer que G est un endomorphisme de E.
b. Montrer que $G(f)$ est de classe C^1 et trouver une équation différentielle vérifiée par $G(f)$ si $f \in E$.
c. G est-il surjectif ? injectif ?
d. Résoudre l'équation $G(f) = \lambda f$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$.

8.7 *ENSAM PSI 2013* Pierre-Simon

On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} dt$.
a. Montrer la continuité de g sur $\mathbb{R}_+$.
b. Vérifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. Calculer $g(x)$. On pourra intégrer $g''(x)$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

8.8 <u>*Petites Mines PSI 2014*</u> Alizée Mayet

On pose $\mathsf{G}(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\mathsf{G}'(x)$.

Exprimer $\mathsf{G}(x)$ en fonction de $\mathsf{F}(x) = \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$. Montrer que F admet une limite en $+\infty$, la calculer.

8.9 <u>*Centrale Maths1 PSI 2015*</u> Inès Arranz-Valsero

a. Montrer que $g : t \to \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe C^2 et que $|f(x)| \leqslant x^2$. Calculer $f'(0)$.

c. On pose $a = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est solution de $(E)\ :\ y'' - y = \frac{\pi}{2} - ax$ sur $\mathbb{R}_+$.

d. En déduire $f(x)$ en fonction de x. Quel est donc la valeur de a ?

8.10 <u>*Mines PSI 2015*</u> Édouard Le Goas

On pose $\mathsf{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}\mathrm{d}t$.

a. Ensemble de définition de F.

b. Montrer que F est continue et dérivable.

c. Calculer F.

8.11 <u>*ENS Cachan PSI 2016*</u> Charly Castes

On pose $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

a. Calculer $g(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b. Montrer que g est de classe C^1 et que $g'(x) = -2f'(x)f(x)$.

c. Calculer g et donner la valeur de I.

8.12 <u>*ENS Cachan PSI 2016*</u> Clément Suberchicot

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $S_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que S_n est dérivable et que $S_n'(x) = -\int_0^1 (1-t^2)^n t\sin(xt)\mathrm{d}t$.

Soit aussi $A_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $A_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!}S_n(x)$.

b. Montrer que A_n est dérivable et que $xA_n'(x) = (2n+1)A_n(x) - A_{n+1}(x)$.

c. En déduire qu'il existe deux polynômes U_n et V_n à coefficients entiers et de degré inférieur ou égal à n tels que U_n soit pair, V_n impair, et $A_n(x) = U_n(x)\sin(x) + V_n(x)\cos(x)$.

On suppose qu'il existe deux entiers p et q tels que $\frac{\pi^2}{4} = \frac{p}{q}$.

d. Montrer que $u_n = q^n A_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est entier.

e. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

f. En déduire que π^2 et π sont irrationnels.

8.13 *Centrale Maths1 PSI 2016* Erwann Alric et Matthieu Cadiot

Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt$.

a. Trouver le domaine de définition de f.

b. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

c. Déterminer une expression simple de f.

8.14 *Centrale Maths1 PSI 2016* Théo Taupiac

Pour $\alpha \in]-1;1[$, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos(x))}{\cos(x)} dx$.

a. Montrer que I est de classe C^1 sur $]-1;1[$ et calculer $I'(\alpha)$.

Indication : on donne $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ si $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

b. En déduire une expression simple $I(\alpha)$ pour $\alpha \in]-1;1[$.

c. Montrer que I est développable en série entière avec un rayon égal à 1.

8.15 *Mines PSI 2016* Marine Saint-Mézard I

On définit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)} dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur un domaine D à préciser.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur D. En déduire une expression simple de f.

8.16 *Mines PSI 2016* Théo Taupiac II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+2t\cos(\alpha)+t^2)}{t} dt$.

a. Calculer $I(0)$.

b. En déduire $I(\alpha)$ pour $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8.17 *Petites Mines PSI 2016* Rogelio Escalona II

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} dt$.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

8.18 *ENS Cachan PSI 2017* Rémy Larue I

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f y est C^∞.

b. Calculer avec un changement de variable la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$.

c. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

d. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

8.19 *ENS Cachan PSI 2017* Maxime Pouvereau II

Pour tout réel x, on pose $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{ch}\,(xt) dt$.

Justifier que H existe et expliciter $H(x)$ en fonction de x. On donne $H(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.20 *Centrale Maths1 PSI 2017* Vincent Bouget

Soit $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et f'' strictement positive.

a. Montrer que $\forall x \neq 0,\ f(x) = x \int_0^1 f'(tx) dt$.

b. Montrer qu'il existe une fonction $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xg(x)$.
Montrer qu'il existe une fonction $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 h(x)$.
Question intermédiaire : graphe de f, limites de f en $\pm\infty$.

c. Montrer qu'il existe une bijection $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi^2(x)$.

8.21 *Centrale Maths1 PSI 2017* Tom Huix

Soit $\varphi : t \to e^{\frac{-t^2}{2}}$.

a. Montrer que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge. On donne $I = \sqrt{2\pi}$.

b. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{kt} dt$ converge aussi et déterminer sa valeur en fonction de k.

8.22 *Mines PSI 2017* Alexis Trubert II

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3 + t}} dt$.

a. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$ et trouver un équivalent de f en $+\infty$.

8.23 *CCP PSI 2017* Manon Bové I et Alexis Trubert I

On pose $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + xt)}{t} dt$.

a. Montrer que $]-1; 1[$ est inclus dans le domaine de définition de g.

b. Trouver un développement en série entière de $g(x)$ sur $]-1; 1[$.

c. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$.

d. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$ par une méthode différente.

8.24 *E3A PSI 2017* Agathe Maldonado

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1 + t} dt$.

a. Montrer que f est continue et décroissante sur $]0; +\infty[$.

b. Calculer $f(1)$.

c. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x + 1) + f(x) = \frac{1}{x}$. Trouver un équivalent de f en 0.

d. Trouver la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

e. Question rajoutée : Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$.

8.25 *Petites Mines PSI 2017* Élisa Gressier-Monard II

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}\,dt$.

a. Montrer que $F(x)$ converge si $x > 0$.

b. Donner le sens de variation de F. Montrer que F est de classe C^1.

c. Montrer que $F(x) \geqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{1+t}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Et en 0 ?

8.26 *Petites Mines PSI 2017* Pauline Lamaignère I

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln(t)}\,dt$.

a. Montrer que la fonction f est définie sur $D =]-1; +\infty[$.

b. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur D.

c. Trouver une expression simple de $f(x)$.

8.27 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Amélie Guyot et Jean-Baptiste Malagnoux

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. On définit aussi $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

a. Calculer $g(0)$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = -2h'(x)h(x)$.

c. En déduire une expression de g en fonction de h et la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(t)dt$ converge et est non nulle.

d. Montrer que a est positive.

e. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a(nt)$ converge et donner un équivalent de $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a(nt)$ quand t tend vers 0.

f. Donner un équivalent quand x tend vers 1^- de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

8.28 *Centrale Maths1 PSI 2018* Gauthier Crosio

On définit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{Arctan}\big(x\tan(\theta)\big)}{\tan(\theta)}\,d\theta$.

a. Quel est le domaine de définition de F ?

b. Calculer $F(x)$.

8.29 *Centrale Maths1 PSI 2018* Pauline Lamaignère

Soit $f \in C^0(]0;1], \mathbb{R})$ telle qu'il existe $a \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $f(t) \underset{0}{\sim} at^\alpha$. On pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition I de g.

b. Montrer la continuité de g sur I.

c. Montrer que g est de classe C^1 sur I.

d. Calculer $\lim\limits_{x\to-\alpha-1} g(x)$.

8.30 *Centrale Maths1 PSI 2018* Nicolas Ziegler

On définit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t^2}\,dt$.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

c. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi}{4}\ln(x) + \dfrac{\ln(2)}{2x} + O(\dfrac{1}{x^2})$.

8.31 *Mines PSI 2018* Anaïs Chaumeil I

Soit $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ et $g(x) = -\Big(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt\Big)\sin(x) + \Big(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt\Big)\cos(x)$.

a. Montrer que les deux fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que f et g sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E)\ :\ y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c. Montrer que $f = g$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

8.32 *Mines PSI 2018* Lucie Jandet I

Soit $\beta > 0$. On définit, pour tout réel x, le réel $I_\beta(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} e^{-\beta t}\,dt$.

a. Montrer que I_β est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $(E)\ :\ y'' - y = -\dfrac{\beta}{\beta^2 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_\beta(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2 + t^2}\,dt$ et $J_\beta(x) = \dfrac{1}{2}\Big(e^x F_\beta(x) + e^{-x}F_\beta(-x)\Big)$.

b. Montrer que J_β est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ I_\beta(x) = J_\beta(x)$.

8.33 *Mines PSI 2018* Paul Simon I

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\,dt$.

a. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Quelles sont les limites de F, F', F'' en $+\infty$?

c. Expliciter $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

d. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

8.34 *CCP PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau I

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(u))\,du$.

b. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$. Indication : on pourra poser $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))\,du$.

8.35 *ENS Cachan PSI 2019* Julien Tissot

Soit X l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour $(f, g) \in X^2$, on définit $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$ et $N_2(f) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y)dy}$.

a. Si $(f, g) \in X^2$, montrer que $f * g$ est bien définie et que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f * g(x)| \leqslant N_2(f)N_2(g)$.

b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de limite nulle en $\pm\infty$, montrer qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est nulle en dehors d'un intervalle borné.

c. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de limite nulle en $\pm\infty$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$.

d. Soit $(f, g) \in X^2$, montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$.

8.36 *Centrale Maths1 PSI 2019* Louis Destarac

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2tx)dt$ et $g : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}dx$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f y est de classe C^1.

b. Trouver une équation différentielle (E) vérifiée par f. En déduire une expression simple de f.

c. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.

8.37 *Centrale Maths1 PSI 2019* Paul Louzier

On pose $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}dt$.

a. Montrer l'existence de I_2.

b. Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x.

c. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - 4y = \pi - 4xI_2$ sur $\mathbb{R}_+$.

e. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire une expression de F en fonction de I_2.

f. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi x^2}{2}$. En déduire la valeur de I_2.

g. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge et déterminer sa valeur exacte.

8.38 *Centrale Maths1 PSI 2019* Léo Simplet

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. En déduire une expression de f sans intégrale avec des fonctions usuelles.

d. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

e. Question supplémentaire : déterminer un équivalent de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$ en $+\infty$.

8.39 *Mines PSI 2019* Noah Vicens II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2} dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f(0)$.

c. Montrer que $\forall u \geqslant 0,\ u \geqslant \ln(1+u)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant f(0) - f(x) \leqslant \frac{\pi x}{2}$.

d. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

8.40 *CCP PSI 2019* Léo Simplet I

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

a. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Quelles sont les limites de F, F', F'' en $+\infty$?

d. Montrer que $\forall x > 0,\ F'(x) = -\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Expliciter $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

e. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

8.41 *X PSI 2020* Louis Carillo I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.

c. En déduire une expression simple de $f(x)$.

8.42 *Mines PSI 2021* Mathilde Arnaud II

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t} e^{-t} dt$.

a. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simple de $F(x)$.

8.43 *Mines PSI 2021* Adrien Guyot I

On considère $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.

a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

b. Montrer que $F(0)$ existe et que F est continue en 0.

c. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

8.44 *Mines PSI 2021* Johan Haramboure II

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

a. Montrer que f et g sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$.

c. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

8.45 *CCINP PSI 2021* Antonio Treilhou I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,dt$.

a. Trouver le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.

c. Montrer que si $x \in D$, alors $1-x \in D$ et $f(1-x) = f(x)$.

d. Déterminer des équivalents de f aux bornes de D.

8.46 *CCINP PSI 2021* Adeline Vaudrey I

On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$.

a. Montrer que f est définie sur $[0;+\infty[$.

b. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

c. Montrer que $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = xf(x-1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln\big(f(u)\big)\,du$. On souhaite étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$. On définit la fonction $\varphi : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln\big(f(u)\big)\,du$.

d. Montrer que φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.

e. En déduire la limite de φ en $+\infty$. Conclure.

8.47 *Mines-Télécom PSI 2021* Juliette Maricourt I

Pour $x \geqslant 0$, soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\,dt$.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à déterminer.

8.48 *Mines PSI 2022* Anna Decrock I

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.

c. Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \dfrac{1}{2}$.

d. Établir l'existence d'une borne inférieure de f sur D et calculer $\operatorname{Inf}_D f(f)$.

e. Trouver un équivalent de f en 0.

8.49 *Mines PSI 2022* Florian Picq II

On définit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\,dt$ et on pose $g(x) = f(x^2)$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b. Calculer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Établir que $\forall x \geqslant 0,\ g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

d. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.50 *Mines PSI 2022* Maxence Rossignol I

Pour un réel x, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$. On définit aussi, toujours sous réserve de convergence, $g(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$.

d. Prouver que g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Montrer que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$, puis de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.

8.51 *Mines PSI 2022* Baptiste Savarit I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la monotonie de f sur D.

b. Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f'.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d. Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt}\,dt$.

e. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.

f. Déterminer la limite de f en 0^+.

8.52 *CCINP PSI 2022* Joël Lascoumes et Jade Mirassou I

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.

c. Montrer, si $x \in D$, que $1 - x \in D$ et qu'on a $f(1-x) = f(x)$.

d. Déterminer des équivalents de f aux bornes de D.

8.53 *CCINP PSI 2022* Ewan Sarrazin II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.

a. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.

b. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression intégrale de $g'(x)$.

c. Montrer, si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, que $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$.

d. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.

e. Que vaut donc $g(x)$ si $x \in \mathbb{R}_-$?

8.54 *CCINP PSI 2022* Paul Sterlin I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}dt$.

a. Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. Exprimer φ' puis φ avec des fonctions usuelles.

8.55 *Mines-Télécom PSI 2022* Naïs Baubry I

Pour $x \in D =]-1;+\infty[$, on définit la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{t^x - 1}{\ln(t)}$ et, en cas de convergence, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x(t)dt$.

a. Montrer que f_x est intégrable sur $]0;1[$ en distinguant les cas $x = 0$, $x > 0$ et $x < 0$.
b. Montrer que f est de classe C^1 sur D et calculer $f'(x)$.
c. En déduire une expression simple de $f(x)$.

8.56 *Mines-Télécom PSI 2022* Manon Odelot II

a. Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Donner une expression simple de $F(x)$.

8.57 *Centrale Maths1 PSI 2023* Arthur Biot

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

a. Donner l'ensemble de définition D de F et montrer que F est continue sur D.
b. Montrer que F est de classe C^1 sur D et calculer $F'(x)$.
c. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.

8.58 *Centrale Maths1 PSI 2023* Alban Dujardin I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}dt$.

a. Donner l'ensemble de définition D de F.
b. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0;\infty[$.
c. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.
b. Déterminer la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\theta)\big)d\theta$.

8.59 *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire I

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, on note $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)d\theta$.

On se propose de calculer la valeur de $I(x)$ par deux méthodes.
a. Justifier l'existence de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ I(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\big(|x - e^{i\theta}|\big)d\theta$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \dfrac{2\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\big(|x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|\big)$.

c. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$. En déduire la valeur de $I(x)$.

d. Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et calculer $I'(x)$. En déduire à nouveau la valeur de $I(x)$.

8.60 *Mines PSI 2023* Paul Picard I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la monotonie de f sur D.

b. Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f'.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d. Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt$.

e. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.

f. Déterminer la limite de f en 0^+.

8.61 *Mines PSI 2023* Maxence Prieur II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

c. Exprimer f en fonction de Γ. En déduire la valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

8.62 *CCINP PSI 2023* Rebecca Blé II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

a. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. Mettre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$ sous forme de fonctions usuelles.

8.63 *Mines PSI 2024* Mathias Pisch I

Soit la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

a. Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle y est strictement positive et de classe C^2.

b. Prouver que Γ et $\ln \circ \Gamma$ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Établir, pour $x > 0$, que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

d. Trouver une relation entre $\displaystyle\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$.

e. En déduire que $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

8.64 *CCINP PSI 2024* Edward Bauduin et Jasmine Meyer I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Trouver la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c. Pour $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.

d. En déduire un développement de f en somme de séries de fonctions.

e. Trouver ce développement d'une autre manière.

8.3 Officiel de la Taupe

8.65 *OdT 2013/2014 Ensam PSI planche 284II*

Montrer que g, définie par $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par g et en déduire une autre expression de g.

8.66 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 157II*

a. Montrer que, pour tout $y > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On note $F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}dt$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$.

c. En déduire la valeur de $F(x,y)$.

8.67 *OdlT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 324II*

a. Montrer que f et g données par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ et $g(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}dt$ sont définies et dérivables.

b. Montrer que $f^2 + g$ est constante et en déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

8.68 *OdlT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 327I*

a. Donner l'ensemble de définition de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

b. Montrer que F est de classe C^1 puis calculer $F(x)$.

8.69 *OdlT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 328II*

a. Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+$.

b. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Calculer $F(x)$ à l'aide de $\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}du$.

8.70 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 41*

À toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, on associe sa demi-intégrale définie par $I_{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt$ et à toute fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, sa demi-dérivée définie, pour $x > 0$, par $D_{1/2}f = \frac{d}{dx}I_{1/2}f$.

Vérifier que $I_{1/2}f$ est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $I_{1/2}f(x) = \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}}dt$. Montrer que $D_{1/2}$ est bien définie et que $D_{1/2}f(x) = I_{1/2}f'(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}$.

Calculer $I_{1/2}f$ pour $f(x) = x^n$ (on pourra utiliser la valeur des intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$, soit $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ et $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$). Calculer $I_{1/2}f$ pour $f(x) = x^{n+\frac{1}{2}}$.

En déduire les relations $I_{1/2}I_{1/2}f(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $D_{1/2}I_{1/2}f = f$ quand f est un polynôme.

Montrer les relations de la question précédente pour une fonction développable en série entière.
Que dire quand f est quelconque, de classe C^1 ?

8.71 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 45*

Sur quel intervalle de $\mathbb{R}_+^*$, $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ est-elle définie ?

Montrer qu'elle est continue sur cet intervalle et trouver un équivalent de f en 0.

Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

8.72 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 248II* Domaine de définition de $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}dt$.

Montrer que g y est dérivable, calculer g' et en déduire g.

8.73 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 266II* Continuité et dérivabilité de $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$.

Déterminer g à l'aide de $h(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. Trouver la limite de g en $+\infty$ et en déduire celle de h.

8.74 *OdlT 2015/2016 ENSEA planche 283II*

Montrer que $\Phi_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t)dt$ s'annule une fois et une seule sur $[0;\pi]$.

8.75 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 113II*

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Ensemble de définition et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)dt$.

8.76 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 157*

Montrer que f, définie pour $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}dt$, est C^2.

Trouver un équivalent de f en $+\infty$ puis en 0.

8.77 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 450I et OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 216II*

Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Trouver trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$. Calculer $f(0)$. Montrer que f admet en $+\infty$ une limite que l'on calculera.