SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 8 INTÉGRALES À PARAMÈTRE

8.1 Intégrales à paramètre

8.1 **a.** Posons, pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $f(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x^2t) - \operatorname{Arctan}(xt)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(x,0) = x^2 - x$. La convergence est claire pour $x = 0$ et $x = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, alors $f(x,.)$ est continue en 0 par développements limités et $f(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{t^2}$ en se servant du classique : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan}(y) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le critère de Riemann.
b. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2x}{1+x^4t^2} - \dfrac{1}{1+x^2t^2}$ si $t \neq 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x - 1$. Donc $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$; $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto f(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$; de plus, si $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $a < b$, on a : $\forall t \in [a;b]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2b}{1+a^4t^2} + \dfrac{1}{1+a^2t^2} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on a la formule de Leibniz : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{2x}{1+x^4t^2} - \dfrac{1}{1+x^2t^2}\right)dt = \dfrac{\pi}{2x}$.
c. Comme $F(1) = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \dfrac{\pi \ln(x)}{2}$. De plus, $F(0) = 0$.
<u>Autre méthode</u> : si $A \geqslant 0$ et $x > 0$, on calcule $\displaystyle\int_0^A \dfrac{\operatorname{Arctan}(x^2t) - \operatorname{Arctan}(xt)}{t}dt = \int_{xA}^{x^2A} \dfrac{\operatorname{Arctan}(u)}{u}du$ par Chasles et changement de variables linéaire et on encadre par croissance de Arctan ce qui donne $\operatorname{Arctan}(xA)\ln(x) \leqslant \displaystyle\int_0^A \dfrac{\operatorname{Arctan}(x^2t) - \operatorname{Arctan}(xt)}{t}dt \leqslant \operatorname{Arctan}(x^2A)\ln(x)$ d'où la valeur de $f(x)$.

8.2 • Pour $x > 1$, on a $\forall t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x^2 - \sin^2(t) \geqslant x^2 - 1 > 0$ donc $t \mapsto \ln(x^2 - \sin^2 t)$ est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc y est intégrable. Si $x = 1$, on a juste $t \mapsto \ln(x^2 - \sin^2 t)$ qui est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ mais, en posant $h = \dfrac{\pi}{2} - t$, on a $\ln(x^2 - \sin^2 t) = \ln\big(\cos^2(t)\big) = 2\ln\big(\sin(h)\big) \underset{0}{\sim} 2\ln(h)$ donc $t \mapsto \ln(x^2 - \sin^2 t)$ est intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ puisque $h \mapsto \ln(h)$ l'est sur $]0;1[$ par exemple.

• Soit $g : [1;+\infty[\times\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$, alors on a les hypothèses (H1) et (H2) vérifiées (continuité en x à t fixé et continuité en t à x fixé) ; soit $b > 1$, on a pour $x \in [1;b]$ et $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $|g(x,t)| \leqslant |g(1,t)| + |g(b,t)| = 2\ln\big|\cos t\big| + \ln\big(b^2 - \sin^2 t\big)$ (car $x \mapsto g(x,t)$ monotone) or la fonction $t \mapsto 2\ln\big|\cos t\big| + \ln\big(b^2 - \sin^2 t\big)$ est intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'après ce qui précède donc (H3) est vérifiée (et donne aussi l'intégrabilité manquante dans (H2)) donc d'après le théorème de continuité sous le signe somme : f est continue sur $[1;b]$ pour tout $b > 1$ donc f est continue sur $[1;+\infty[$.

• Soit $[a;b] \subset]1;+\infty[$, alors si $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x \mapsto g(x,t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$ est de classe C^1 sur $[a;b]$ et si $x \in [a;b]$, $t \mapsto g(x,t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2x}{x^2 - \sin^2 t}$ sont continues par morceaux et intégrables sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ (pour $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ voir la domination qui suit) donc (H1) et (H2) sont vérifiées. Or : $\forall (x,t) \in [a;b] \times \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2b}{a^2 - \sin^2 t} \leqslant \dfrac{2b}{a^2 - 1}$ donc (H3) est aussi vérifiée. On peut donc en déduire d'après le théorème de dérivation sous le signe somme que f est de classe C^1 sur $[a;b]$ (pour tout $[a;b] \subset]1;+\infty[$) et donc sur $]1;+\infty[$ et que, d'après la formule de LEIBNIZ : $\forall x > 1,\ f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x\,dt}{x^2 - \sin^2 t}$.

• En voyant cette dernière intégrale sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (la valeur en 0 ne change rien), on effectue le changement de variable $t = \mathrm{Arctan}(u)$ (ou plutôt $u = \tan(t)$ qui relève des règles de BIOCHE) et on a donc la relation : $\forall x > 1,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x\,du}{(1+u^2)\left(x^2 - \frac{u^2}{1+u^2}\right)}$ car $\sin^2 t = \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$ et $\mathrm{Arctan}'(u) = \frac{1}{1+u^2}$.

Mieux : $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}du}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2}u^2\right)} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \int_0^{y} \frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}du}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2}u^2\right)}$ qu'on intègre en $f'(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}u\right)\right]_0^y = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$.

• Ainsi, comme f est continue en 1 et que $[1;+\infty[$ est un intervalle, il existe une constante k telle que : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \pi \mathrm{Argch}\,(x) + k$. Or $f(1) = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$ et on a calculé l'intégrale d'EULER en cours donc $f(1) = -\pi\ln(2)$. Comme $\mathrm{Argch}\,(1) = 0$, on a donc $k = -\pi\ln(2)$ et : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \pi\ln(2)$.

8.3 **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\mathrm{ch}\,(2xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, $e^{-t^2}\mathrm{ch}\,(2xt) = \frac{e^{-t^2+xt} + e^{-t^2-xt}}{2} \underset{+\infty}{=} o(t^{-2})$ donc cette intégrale $f(x)$ existe pour tout x réel.

b. On définit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f(x,t) = e^{-t^2}\mathrm{ch}\,(2xt)$. Soit $a > 0$. (H1) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. (H2) Pour $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(2xt)$ et que $2te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(2xt) \underset{+\infty}{=} o(t^{-2})$. (H3) Pour $a > 0$ et $x \in [-a;a]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |2te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(2xt)| \leqslant 2te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(2at) = \varphi_a(t)$ et φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème de LEIBNIZ : F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(2xt)dt = 2xF(x)$ par IPP.

On intègre cette équation différentielle et $F(x) = F(0)e^{x^2}$ avec $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS).

c. On sait que $\mathrm{ch}\,(2xt) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2xt)^{2n}}{(2n)!}$ et, avec $u_n : t \mapsto \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}t^{2n}e^{-t^2}$, la fonction u_n est continue et $\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$ or $\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} t^{2n-1}te^{-t^2}dt = \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2(n-1)}e^{-t^2}dt$ par IPP donc $\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ par récurrence donc $\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{|x|^{2n}}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, par le TITT : $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2n}}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}$.

8.4 **a.** • Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$. De plus, $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc, d'après le critère de RIEMANN : $\left(t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}\right.$ est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\left.x < 1\right)$ et $\left(t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}\right.$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\left.x+1 > 1\right)$. Par conséquent : $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \in]0;1[$.

• Soit $g :]0;1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$, alors si $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0;1[$ et si $x \in]0;1[$, $t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-\ln(t)}{t^x(1+t)}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\frac{\partial g}{\partial x}$ voir la domination qui suit) donc (H1) et (H2) sont vérifiées. Soit $[a;b] \subset]0;1[$, $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ où $\varphi(t) = \dfrac{-\ln(t)}{t^b(1+t)}$ si $t \leqslant 1$ et $\varphi(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^a(1+t)}$ si $t \geqslant 1$. De plus $\dfrac{-\ln(t)}{t^b(1+t)} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1+b}{2}}}\right)$ avec $\dfrac{1+b}{2} < 1$ et $\dfrac{\ln(t)}{t^a(1+t)} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1+\frac{b}{2}}}\right)$ avec $1 + \dfrac{a}{2} > 1$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et (H3) est aussi vérifiée. On peut donc en déduire d'après le théorème de dérivation sous le signe somme que f est de classe C^1 sur $[a;b]$ (pour tout $[a;b] \subset]0;1[$) et donc sur $]0;1[$ et que, d'après la formule de LEIBNIZ : $\forall x \in]0;1[$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\ln(t)dt}{t^x(1+t)}$.

• Par la même méthode, f' est de classe C^1 et $\forall x \in]0;1[$, $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(t)dt}{t^x(1+t)} > 0$ donc f est convexe.

b. • On effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = \dfrac{1}{u}$ et φ est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $f(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \left(-\frac{1}{u^2}\right)\frac{u}{u^{-x}(1+u)}du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(1+u)} = f(1-x)$ d'où la symétrie du graphe de f par rapport à la droite $x = \dfrac{1}{2}$.

• La valeur minimale de f est donc prise en $\dfrac{1}{2}$ par convexité et cette symétrie et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \Big[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})\Big]_0^{+\infty}$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \pi = \underset{]0;1[}{\mathrm{Min}}(f)$.
c. Fatigué !

8.5 **a.** Pas de problème en $1-$ car $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{t-1}{\ln(t)} = 1$. Si $x > -1$, on a $\dfrac{t-1}{\ln(t)}t^x \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{-x+1}{2}}}\right)$ et il y a existence de $f(x)$. Mais si $x \leqslant -1$, $\dfrac{t-1}{\ln(t)}t^x \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\ln(t)t^{-x}}$ et $\dfrac{1}{|\ln(t)|t^{-x}} \geqslant \dfrac{1}{|\ln(t)|t}$ donc $f(x)$ n'existe pas car $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t\ln(t)}dt$ diverge. Ainsi le domaine de définition de f est $I =]-1\,;+\infty[$.
Pour $x \in [a\,;+\infty[$ avec $a > -1$, en posant $g(x,t) = \dfrac{t-1}{\ln(t)}t^x$: $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$ donc $g(x,.)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ sont continues, intégrables sur $]0\,;1]$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(.,t)$ continue sur $[a\,;+\infty[$ et $\forall (x,t) \in [a\,;+\infty[\times]0\,;1]$, $\left|(t-1)t^x\right| \leqslant (t-1)t^a$ avec $t \to (t-1)t^a$ intégrable sur $]0\,;1]$. On applique le théorème de dérivation sous le signe somme et la formule de LEIBNIZ : f est dérivable sur $[a\,;+\infty[$ et $\forall x \geqslant a$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 (t-1)t^x dt = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)$.
Donc f est bien dérivable sur I.
b. D'après la question précédente, comme I est un intervalle, on a l'existence d'une constante k telle que $\forall x \in I$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) + k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les $f_n : t \to \dfrac{t-1}{\ln(t)}t^n$ sont intégrables sur $]0\,;1]$, convergent simplement vers la fonction nulle sauf en 1 et sont dominées par f_0. Convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$ donc $\forall x > -1$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$.
Ou alors $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est bornée (par $M > 0$) sur $[0;1]$ donc $0 < f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 Mt^x dt = \frac{M}{x+1}$ et $k = 0$ aussi.

8.2 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

8.6 Avant tout, f est bien bornée sur $\mathbb{R}$ car elle l'est sur $[0;2\pi]$ en tant que fonction continue sur un segment et donc sur $\mathbb{R}$ car elle est 2π-périodique.
a. G est tout d'abord bien défini car $\forall t \geqslant 0$, $|e^{-t}f(x+t)| \leqslant ||f||_\infty e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est classiquement intégrable sur $\mathbb{R}_+$: on conclut par comparaison.
La linéarité de l'intégrale (pour les fonctions intégrables) justifie la linéarité de G.

Soit $f \in E$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ G(f)(x+2\pi) = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(x+2\pi+t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(x+t)dt = G(f)(x)$ car f est 2π-périodique : $G(f)$ est bien 2π-périodique.

- Soit $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto e^{-t}f(x+t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-t}f(x+t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (déjà vu).
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ |e^{-t}f(x+t)| \leqslant ||f||_\infty e^{-t}$ et $t \mapsto ||f||_\infty e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par théorème de continuité sous le signe somme, $G(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $G \in \mathcal{L}(E)$.

b. Soit $f \in E$, comme f n'est pas supposée C^1, on ne peut pas employer le théorème de dérivabilité sous le signe somme, mais $\forall x \in \mathbb{R},\ G(f)(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-u}f(u)du = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}f(u)du$ avec le changement de variable $u = t+x$. $u \mapsto e^{-u}f(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-u}f(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u}f(u)du - \int_0^x e^{-u}f(u)du$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -e^{-x}f(x)$.

Alors, par produit, $G(f)$ est de classe C^1 avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(f)'(x) = e^xF(x) - e^xe^{-x}f(x) = G(f)(x) - f(x)$.

c. G n'est pas être surjective car $\text{Im}(G) \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. G est par contre injective car si $G(f) = 0$, alors $G(f)' = 0$ donc $f = 0$ d'après l'équation différentielle de la question précédente.

d. Comme on sait déjà que $G(f) = 0 \iff f = 0$, on peut dorénavant supposer que $\lambda \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in E$, $G(f) = \lambda f \Longrightarrow G(f)' = \lambda f' \Longrightarrow \lambda f' = \lambda f - f \Longrightarrow f' = \dfrac{\lambda-1}{\lambda} f$ ce qui donne, en posant $\alpha = \dfrac{\lambda-1}{\lambda}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ce^{\alpha x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Mais comme f est censée être 2π-périodique, ceci impose $C = 0$: pas de valeur propre réelle pour G.

8.7 **a.** Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall t > 0,\ \varphi(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ et $\varphi(0) = 1$. φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN. Comme $0 \leqslant e^{-xt} \leqslant 1$ si $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit aussi $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x,t) = \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$.

- Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $f(x,t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ et on sait que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme : g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. • Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle y est même de classe C^∞).

- Si $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\sin^2(t)}{t}e^{-xt}$ sont continues, intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $f(x,t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- Si $a > 0$ et $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, $|f(x,t)| \leqslant t\varphi(t)e^{-at} = \psi(t)$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir ci-dessus).

Théorème de dérivabilité sous le signe somme : g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2(t)}{t}e^{-xt}dt$.

Par le même procédé, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ \forall k \geqslant 1,\ g^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k\varphi(t)e^{-xt}dt$.

c. Ainsi : $\forall x > 0,\ g''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{2it}}{4} - \dfrac{e^{-2it}}{4}\right)e^{-xt}dt$ qu'on sait bien calculer : $g''(x) = \left[-\dfrac{1}{2x}e^{-xt} - \dfrac{1}{4(2i-x)}e^{(2i-x)t} + \dfrac{1}{4(2i+x)}e^{(-2i-x)t}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4(2i-x)} - \dfrac{1}{4(2i+x)}$ ce qui donne $g''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(4+x^2)}$. On intègre ($\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle) : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{2} - \dfrac{\ln(4+x^2)}{4} + \lambda$.

Comme $t \mapsto t\varphi(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, en notant $M = \underset{t\geqslant 0}{\text{Sup}}\,|t\varphi(t)|$, on a $|g'(x)| \leqslant= \int_0^{+\infty} Me^{-xt}dt = \dfrac{M}{x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$. Ceci implique que $\lambda = 0$ car $g'(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2}{4+x^2}\right) + \lambda$.

De même : $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{2} - \dfrac{x\ln(x^2+4)}{4} - \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \mu$. Or en notant $N = \underset{t\geqslant 0}{\text{Sup}}\,|\varphi(t)|$,

$\forall x > 0,\ |g(x)| \leqslant \dfrac{N}{x}$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Comme $\dfrac{x\ln(x)}{2} - \dfrac{x\ln(x^2+4)}{4} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$: $\mu = \dfrac{\pi}{2}$.

Enfin : $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{2} - \dfrac{x\ln(x^2+4)}{4} - \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2}$.

8.8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \times [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- Clairement $\forall t \in [0;1],\ f(\cdot,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x,\cdot)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ sont continues et intégrables sur $[0;1]$ car elles y sont continues.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0;1],\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-2xe^{-(1+t^2)x^2}\right| \leqslant \underset{x\in\mathbb{R}}{\text{Max}}\, h(x) = M$ car $h : x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue, bornée sur $\mathbb{R}$. Comme $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0;1]$, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme : G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0,\ G'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dt$. Si $x > 0$, après le changement de variable $u = tx$, on a $G'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$. Si $x = 0$, cette relation est aussi vraie.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a F de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0,\ F'(x) = e^{-x^2}$. Par conséquent : $\forall x \geqslant 0,\ G'(x) + 2F'(x)F(x) = 0$.
On intègre et, comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle et que $G(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $F(0) = 0$, $\forall x \geqslant 0,\ G(x) + F(x)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. Mais $0 \leqslant G(x) \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi e^{-x^2}}{4}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Ainsi, en passant à la limite dans la relation précédente : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$ (on retrouve l'intégrale de Gauss).

8.9 **a.** g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et $\lim\limits_{t\to0^+} g(t) = \dfrac{1}{2}$ par DL.

De plus : $\forall t > 0,\ 0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}$. Comme $\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$:

(H_1) Pour $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{t\to0^+} h(x,t) = \dfrac{x^2}{2}$ par DL et $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{2}{t^4}$.

De plus, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Soit $a > 0$, $x \in [-a;a]$, $t > 0$: $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{|tx|}{t(1+t^2)} \leqslant \dfrac{a}{1+t^2} = \varphi_a(t)$ et φ_a intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Mieux, $\forall (x,t) \in [-a;a] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme appliqué deux fois, la fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a les formules $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt$ et $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)}dt$ pour tout réel x.

On prouve $\forall u \in \mathbb{R},\ |1-\cos(u)| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$ donc $|f(x)| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2(1+t^2)}dt = \frac{\pi x^2}{4} \leqslant x^2$ pour tout x car $\pi < 4$. On peut aussi étudier la fonction $u : x \mapsto x^2 - f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ (car f est clairement paire), déterminer son tableau de variations et conclure que u est positive sur $\mathbb{R}_+$ en se servant du fait que $|f''(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{2}$, que $f(0) = f'(0) = 0$ (clair avec l'expression intégrale).

c. Si $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}dt - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}dt$.

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\text{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et avec le changement de variable $u = tx$ (si $x > 0$) dans la seconde intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}dt = x\int_0^{+\infty} g(u)du = ax$. (E) est aussi vérifié si $x = 0$ car $f(0) = 0$ et $f''(0) = \frac{\pi}{2}$.

d. On résout l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$ en tenant compte de $f(0) = f'(0) = 0$ avec la solution particulière $y(x) = ax - \frac{\pi}{2}$ et on a $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \frac{\pi}{2}(\text{ch}(x) - 1) + a(x - \text{sh}(x))$.

Mais pour respecter $|f(x)| \leqslant x^2$, on doit avoir $a = \frac{\pi}{2}$ sinon $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \Big(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\Big)e^x$.

Avec une IPP ad hoc dans $\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(t))dt}{t^2}$, on a l'intégrale de DIRICHLET : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

8.10 **a.** Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$. Comme $1 - \cos(xt) \underset{0}{=} \frac{x^2t^2}{2} + o(t^2)$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge par continuité en 0 par $f(x,0) = \frac{x^2}{2}$. De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = 0$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN et $F(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b. (H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \to f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \to f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir), $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $a > 0$, $x \in [-a;a]$, $t > 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant ae^{-t} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Globalement, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-t} = \varphi_1(t)$ et φ_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme qu'on applique deux fois, la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a les formules (LEIBNIZ) $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt$.

c. Ainsi : $F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \text{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme $F'(0) = 0$, on a $F'(x) = \text{Arctan}(x)$ et on intègre ; comme $F(0) = 0$: $F(x) = x\,\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

8.11 **a.** Clairement $g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, pour $x > 0$, $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant e^{-(1+t^2)x^2} \leqslant e^{-x^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}dt = e^{-x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
b. Soit $h : \mathbb{R} \times [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.
- $\forall t \in [0;1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0;1]$.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;1]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2|x|e^{-x^2} \leqslant \varphi(t) = M$ où $M = \underset{x\in\mathbb{R}}{\text{Max}}(2|x|e^{-x^2})$; φ est intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi par le théorème de dérivabilité sous le signe somme : g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a la formule $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}x\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}x\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du = -2e^{-x^2}f(x)$ en posant $u = tx$ si $x \neq 0$. Mais si $x = 0$, on a clairement $g'(0) = 0$ donc $g'(0) = -2e^{-0^2}f(0)$ car $f(0) = 0$.
On en déduit alors que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2f'(x)f(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration car $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que $(g+f^2)' = 0$ sur $\mathbb{R}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)+f^2(x) = C \geqslant 0$.

Comme $f(0)=0$, on en déduit $C=g(0)=\frac{\pi}{4}$ d'après **a.**. Comme f est une fonction positive, on a donc $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{f(x)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{4}-g(x)}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=I$.

8.12 **a.** Soit $f_n:\mathbb{R}\times[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x,t)=(1-t^2)^n\cos(xt)$.

- $\forall t\in[0;1]$, $x\to f_n(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f_n(x,t)$ et $t\mapsto \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)=-t(1-t^2)^n\sin(xt)$ sont continues donc intégrables sur $[0;1]$.
- $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0;1]$, $\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant 1=\varphi(t)$ et φ est intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi, S_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $S_n'(x)=-\int_0^1(1-t^2)^n t\sin(xt)dt$.

b. Pour A_n est dérivable parce que S_n l'est et on a facilement $xA_n'(x)=(2n+1)\frac{x^{2n+1}}{2^n n!}S_n(x)+\frac{x^{2n+2}}{2^n n!}S_n'(x)$ ce qui donne $xA_n'(x)-(2n+1)A_n(x)=\frac{x^{2n+2}}{2^n n!}S_n'(x)=\frac{x^{2n+2}}{2^n n!}\int_0^1[-(1-t^2)^n t][\sin(xt)]dt$. On effectue une IPP en posant $u(t)=\frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}$, $v(t)=\sin(xt)$ d'où $u'(t)=-(1-t^2)^n t$ et $v'(t)=x\cos(xt)$. Ainsi $\int_0^1[-(1-t^2)^n t]\sin(xt)dt=\left[\frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}\sin(xt)\right]_0^1-x\int_0^1\frac{(1-t^2)^{n+1}\cos(xt)}{2(n+1)}dt$ dont on déduit la relation $\int_0^1[-(1-t^2)^n t]\sin(xt)dt=-x\int_0^1\frac{(1-t^2)^{n+1}\cos(xt)}{2(n+1)}dt$.

Alors on a $\frac{x^{2n+2}}{2^n n!}S_n'(x)=\frac{x^{2n+3}}{2^{n+1}(n+1)!}\int_0^1\frac{(1-t^2)^{n+1}\cos(xt)}{2(n+1)}dt=-A_{n+1}(x)$ et on peut conclure que $xA_n'(x)=(2n+1)A_n(x)-A_{n+1}(x)$ comme attendu.

c. $S_0(x)=\int_0^1\cos(xt)dt=\frac{\sin(x)}{x}$ si $x\neq 0$ et $S_0(x)=1$. Ainsi $A_0(x)=\sin(x)$ et on a bien l'initialisation $A_0(x)=U_0(x)\sin(x)+V_0(x)\cos(x)$ avec $U_0(x)=1$ et $V_0(x)=0$. U_0 est pair et V_0 est impair et ce sont bien des polynômes de degré inférieurs ou égaux à 0.
Soit $n\geqslant 0$, si l'on suppose qu'il existe deux polynômes U_n et V_n à coefficients entiers et de degré inférieur ou égal à n tels que U_n soit pair, V_n impair, et $A_n(x)=U_n(x)\sin(x)+V_n(x)\cos(x)$, alors, en dérivant, on obtient la relation suivante $A_{n+1}(x)=(2n+1)A_n(x)-xA_n'(x)$ qui devient après substitution :

$$A_{n+1}(x)=((2n+1)U_n(x)-xU_n'(x)+xV_n(x))\sin(x)+((2n+1)V_n(x)-xV_n'(x)-xU_n(x))\cos(x)$$

Ainsi $A_{n+1}(x)=U_{n+1}(x)\sin(x)+V_{n+1}(x)\cos(x)$ en posant $U_{n+1}=(2n+1)U_n-XU_n'+XV_n$ qui est bien pair de degré inférieur ou égal à $n+1$ et $V_{n+1}=(2n+1)V_n-XV_n'-XU_n$ qui est bien impair de degré inférieur ou égal à $n+1$. On conclut par principe de récurrence. **d.** En écrivant $U_n=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}a_{2k}X^{2k}$ où les a_{2k} sont des entiers, on a

$$u_n=q^nA_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=q^n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}a_{2k}\frac{p^k}{q^k}=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}a_{2k}p^kq^{n-k}\in\mathbb{Z}.$$

e. De plus, $u_n=\frac{q^n}{2^n n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n\frac{q^n}{2^n n!}S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Il est clair que $|S_n(x)|\leqslant 1$ par majoration brutale donc $|u_n|\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{(p/2)^n}{n!}$. Par croissance comparée, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

f. Une suite entière qui tend vers 0 est forcément nulle à partir d'un certain rang (prendre $\varepsilon=\frac{1}{2}$). Ainsi : $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n=0$. Mais comme $u_{n_0}=0$, on a $A_{n_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ car $q\neq 0$ donc $S_{n_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ce qui montre que $\int_0^1 (1-t^2)^{n_0} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = 0$. Mais l'intégrale sur $[0;1]$ d'une fonction positive continue est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Alors $\forall t \in [0;1],\ (1-t^2)^{n_0} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0$ ce qui est absurde.

On en conclut que $\frac{\pi^2}{4}$ est irrationnel, et ceci implique aussi que sa racine $\frac{\pi}{2}$ et donc π sont irrationnels.

8.13 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $g_x : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)} t^x$. La fonction g_x est continue sur $]0;1[$. Comme $\lim_{t \to 1^-} \frac{t-1}{\ln(t)} = 1$, la fonction g_x se prolonge par continuité en 1 en posant $g_x(1) = 1$.

- Si $x > -1$, on a $\frac{t-1}{\ln(t)} t^x \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{x+1}{2}}}\right)$ et $f(x)$ existe par comparaison avec les intégrales de Riemann.
- Si $x \leqslant -1$, $\frac{t-1}{\ln(t)} t^x \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\ln(t)t^x}$ et $\frac{1}{\ln(t)t^x} \geqslant \frac{1}{t\ln(t)}$ alors que $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $]0;1[$ car $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$ n'admet de limite finie ni en 0 ni en 1. Ainsi le domaine de définition de f est $I =]-1\,;+\infty[$.

Soit $g :]-1;+\infty[\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{t-1}{\ln(t)} t^x$. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$.

- $\forall t \in]0;1[,\ x \to g(x,t)$ est de classe C^1 sur I.
- $\forall x \in I,\ t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues, intégrables sur $]0\,;1[$ par Riemann.
- Pour $a > -1$, $\forall (x,t) \in [a\,;+\infty[\times]0\,;1]$, $\left|(t-1)t^x\right| \leqslant (t-1)t^a$ avec $t \mapsto (t-1)t^a$ intégrable sur $]0\,;1[$.

Par dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur I et $\forall x > -1,\ f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)$.

b. D'après la question précédente, comme I est un intervalle, on a l'existence d'une constante k telle que $\forall x \in I,\ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les $f_n : t \to \frac{t-1}{\ln(t)} t^n$ sont intégrables sur $]0\,;1[$, convergent simplement vers la fonction nulle et sont dominées par f_0 qui est intégrable.

Par convergence dominée : $\lim_{n \to +\infty} f(n) = 0$; donc $k = 0$ et $\forall x > -1,\ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.

On aurait aussi pu dire que la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ étant prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0;1]$, elle est bornée (par $M > 0$) sur $[0;1]$ donc $0 < f(x) \leqslant \int_0^1 M t^x dt = \frac{M}{x+1}$ et on retrouve $k = 0$.

8.14 **a.** Soit $f :]-1;1[\times[0;\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha,x) = \frac{\ln(1+\alpha\cos(x))}{\cos(x)}$ avec la valeur $f\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \alpha$ qui est un prolongement par continuité puisque $\lim_{x \to \pi/2} \cos(x) = 0$ donc, si $\alpha \neq 0$, $\ln(1+\alpha\cos(x)) \underset{\pi/2}{\sim} \alpha\cos(x)$.

- $\forall x \in [0;\pi]$, $\alpha \mapsto f(\alpha,x)$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$ (même si $x = \frac{\pi}{2}$).
- $\forall \alpha \in]-1;1[$, les fonctions $x \mapsto f(\alpha,x)$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,x) = \frac{1}{1+\alpha\cos(x)}$ sont continues donc intégrables sur $[0;\pi]$ car $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,\pi/2) = 1 = \frac{1}{1+\alpha.0}$ donc $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,x) = \frac{1}{1+\alpha\cos(x)}$ est valable pour tout $x \in [0;\pi]$.

On en déduit que I est de classe C^1 sur $]-1;1[$ et que $I'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\alpha\cos(x)}$.

On pose $x = 2\,\mathrm{Arctan}(t)$ dans cette intégrale et on obtient classiquement $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1+\alpha+(1-\alpha)t^2}$.

On calcule encore et on parvient à $I'(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\mathrm{Arctan}\left(t\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

b. Comme $f(0) = 0$ et que $]-1;1[$ est un intervalle : $\forall \alpha \in]-1;1[,\ I(\alpha) = \pi\,\mathrm{Arcsin}(\alpha)$.

c. On connaît le DSE de $\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ qu'on intègre pour trouver celui de Arcsin et on a (c'est presque du cours) : $\forall \alpha \in]-1;1[,\ I(\alpha) = \pi\,\mathrm{Arcsin}(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \alpha^{2n+1}$. Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 soit parce qu'on le sait, soit en utilisant comme dans le cours la règle de d'Alembert.

On aurait aussi pu faire cette question indépendamment des résultats précédents en écrivant, puisque $\alpha\cos(x) \in]-1;1[$ pour $\alpha \in]-1;1[$ et $x \in [0;\pi]$, la relation $\ln(1+\alpha\cos(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos^n(x)\alpha^n}{n}$. On a donc $I(\alpha) = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos^{n-1}(x)\alpha^n}{n} dx$. On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos^{n-1}(x)\alpha^n}{n}$ si $n \geqslant 1$. Comme il est clair que $||f_n||_{\infty,[0;\pi]} = \frac{|\alpha|^n}{n}$: $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\alpha|^n}{n}$ converge. On a donc convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur le segment $[0;\pi]$ donc $\forall \alpha \in]-1;1[$, $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n\alpha^n$ en notant $I_n = \int_0^\pi \frac{(-1)^{n+1}\cos^{n-1}(x)}{n}dx$. Ceci prouve que I est développable en série entière avec un rayon supérieur ou égal à 1.

Comme $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, par le changement de variable $x = \pi - t$ dans l'intégrale, on a $I_{2n} = 0$ et $I_{2n+1} = \frac{2W_{2n}}{2n+1}$ où $W_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ est la classique intégrale de Wallis. Ainsi, par Stirling ou directement Wallis, $|I_{2n+1}| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et le rayon de convergence vaut 1 par croissances comparées.

8.15 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_x :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$. Clairement, g_x est continue sur $]0;1[$. De plus, g_x est de signe constant sur $]0;1[$: positive si $x < 1$ et négative si $x > 1$. On a $g_1 = 0$.

Si $x \neq 1$, comme $t^{x-1} - 1 = e^{(x-1)\ln(t)} - 1$ et que $\lim_{t\to 1^-} \ln(t) = 0$, on a $t^{x-1} - 1 \underset{1^-}{\sim} (x-1)\ln(t)$ donc $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (x-1)$ et g_x se prolonge par continuité en 1 en posant $g_x(1) = x - 1$ (et même si $x = 1$ d'ailleurs).

- Si $x = 1$, $g_1 = 0$ donc $f(1)$ existe et $f(1) = 0$.
- Si $x > 1$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\ln(t)}$ donc g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = 0$. g_x est donc intégrable sur $]0;1[$ car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.
- Si $x < 1$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}\ln(t)}$. Si $x > 0$, $g_x(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$ et, d'après Riemann, g_x est intégrable sur $]0;1[$.

Par contre, si $x \leqslant 0$, $\forall t \in]0;1[$, $\left|\frac{1}{t^{1-x}\ln(t)}\right| \geqslant \left|\frac{1}{t\ln(t)}\right|$ et $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $]0;1[$ car elle admet pour primitive $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$ qui n'admet pas une limite finie en 0 : g_x n'est pas intégrable sur $]0;1[$.

Au final, le domaine de définition de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$. Alors :

(H_1) $\forall t \in]0;1[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) $\forall x > 0$, l'application $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = t^{x-1}$ est continue sur $]0;1[$ par opérations.

(H_3) Soit $a > 0$, $\forall x \in [a;+\infty[$, $\forall t \in]0;1[$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = t^{x-1} \leqslant t^{a-1} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur $]0;1[$ (intégrales de Riemann).

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle et que $f(1) = 0$, on a donc $\forall x > 0$, $f(x) = \ln(x)$.

8.16 **a.** $I(0) = 2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$. Cette intégrale converge car $h : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0;1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$. De plus, $\forall t \in [0;1[$, $h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{n}$ (et même pour $t = 0$) connaissant le DSE de $\ln(1+t)$. Si on note $h_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{n}$, comme cette série converge par le CSSA pour $t \in [0;1[$, on a $|R_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}t^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{t^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,[0;1[} \leqslant \frac{1}{n+1}$

donc la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ est uniforme vers h sur l'intervalle borné $[0;1[$. On peut donc intervertir ce qui donne $I(0) = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n-1}dt}{n} = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 2\theta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (classique : termes pairs/impairs).

b. Soit $f : \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \times [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha,t) = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t\cos(\alpha)+t^2)}{t}$.

- $\forall t \in [0;1]$, $\alpha \mapsto f(\alpha,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $t \mapsto f(\alpha,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,t) = \frac{-2\sin(\alpha)}{1+2t\cos(\alpha)+t^2}$ sont continues donc intégrables sur $[0;1]$.
- $\forall (\alpha,t) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \times [0;1]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,t)\right| \leqslant 2 = \varphi(t)$ car $1+2t\cos(\alpha)+t^2 \geqslant 1$ et φ est intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi, la fonction I est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $I'(0) = 0$ clairement. Par contre, pour $\alpha \neq 0$, on a les relations $I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{-2\sin(\alpha)dt}{1+2t\cos(\alpha)+t^2} = -2\int_0^1 \frac{\sin(\alpha)dt}{\sin^2(\alpha)+(t+\cos^2(\alpha))^2} = -2\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)\right]_0^1$.

Ainsi, puisque $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ et $\mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\alpha$, $I'(\alpha) = \pi - 2\alpha - \pi + \alpha = -\alpha$ (même si $\alpha = 0$).

Comme $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ est un intervalle et que $I(0) = \frac{\pi^2}{6}$, on a $\forall \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $I(\alpha) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha^2}{2}$.

8.17 **a.** Soit $x \geqslant 0$, posons $u : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{x+t}$. Alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et le crochet $[uv]_0^{+\infty}$ converge car $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ puisque $1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$. Ainsi les intégrales $\int_0^{+\infty} u'v$ et $\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature. Or uv' est continue en 0 si $x > 0$ et se prolonge par continuité en 0 si $x = 0$ car $u(t)v'(t) = -\frac{1-\cos(t)}{t^2} \to -\frac{1}{2}$ donc uv' est intégrable sur $]0;1]$. De plus $u(t)v'(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc uv' est intégrable sur $[1;+\infty[$. Par conséquent, uv' est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} uv'$ converge donc, tout comme $\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt$ (de même nature). De plus, comme le crochet est nul, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt = -\int_0^{+\infty} (1-\cos(t)) \times \left(-\frac{1}{(x+t)^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}dt$.

b. Soit maintenant $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}$.

- $\forall t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu avant).
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)| = g(x,t) \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu avant).

On peut donc conclure par continuité sous le signe somme que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
L'intégrale de DIRICHLET est $f(0)$ et vérifie $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

8.18 **a.** Si $x \neq 0$, $h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $h(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par contre, si $x = 0$, $h : t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc h n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$. f est clairement paire, il suffit d'étudier son aspect C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$ de sorte que $\forall x \neq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$.

On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+t^2)^3(1+t^2)}}$, puis $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{2x^2-t^2}{\sqrt{(x^2+t^2)^5(1+t^2)}}$. Si on suppose, pour un entier $k \geqslant 1$, que $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \frac{P_k(x,t)}{\sqrt{(x^2+t^2)^{2k+1}(1+t^2)}}$ avec un polynôme P_k en deux variables de degré total inférieur ou égal à k, $\frac{\partial^{k+1} g}{\partial x^{k+1}}(x,t) = \frac{(x^2+t^2)\frac{\partial P_k}{\partial x}(x,t) - (2k+1)xP_k(x,t)}{\sqrt{(x^2+t^2)^{2k+3}(1+t^2)}} = \frac{P_{k+1}(x,t)}{\sqrt{(x^2+t^2)^{2k+3}(1+t^2)}}$ avec $P_{k+1}(x,t) = (x^2+t^2)\frac{\partial P_k}{\partial x}(x,t) - (2k+1)xP_k(x,t)$ qui est polynomial en x, t de degré inférieur ou égal à $k+1$.
Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et toutes les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [a;b]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, comme $t \mapsto P_k(x,t) = \sum_{i=0}^{k} Q_i(x)t^i$ est polynomiale de degré inférieur à k (on peut être légèrement plus précis et montrer que P_k est homogène de degré total k), que toutes les fonctions polynomiales Q_i sont bornées (car continues) sur le segment $[a;b]$ (par M_i), alors $\forall t > 0,\ |P_k(x,t)| \leqslant \sum_{i=0}^{k} M_i t^i = U_k(t)$ donc $\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \frac{U_k(t)}{\sqrt{(a^2+t^2)^{2k+1}(1+t^2)}} = \varphi_{k,[a;b]}(t) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc $\varphi_{k,[a;b]}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par un théorème du cours, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc sur $\mathbb{R}^*$).
b. Pour $x > 0$ on pose $t = x\,\mathrm{sh}\,(u) = \varphi(u)$ avec φ qui est C^1, bijective, strictement croissante de $[0;\alpha]$ dans $[0;1]$ où $\mathrm{sh}\,(\alpha) = \frac{1}{x}$. Ainsi, il vient $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^\alpha \frac{x\,\mathrm{ch}\,(u)}{\sqrt{x^2+x^2\mathrm{sh}^2(u)}} = \alpha$ car $1+\mathrm{sh}^2(u) = \mathrm{ch}^2(u)$.
Or $\mathrm{sh}\,(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \frac{1}{x}$ donc, en posant $A = e^\alpha > 1$, on a $xA^2 - 2A - x = 0$. On résout et on trouve $A = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ donc $\alpha = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ (mais Argsh est hors programme hein !).
c. $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} \geqslant \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$ donc $f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ et on déduit par encadrement que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Évaluons la différence, $f(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right)dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$.
Or l'inégalité $\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)} \geqslant t^2$ montre que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$. De plus, $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1 = \frac{-t^2}{(1+\sqrt{1+t^2})\sqrt{1+t^2}}$ (avec la quantité conjuguée) donc $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right)\right| \leqslant t$ et $\left|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right)dt\right| \leqslant \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $f(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} \underset{0}{=} O(1)$ donc, comme $\lim_{x\to 0} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = +\infty$, on a l'équivalent intermédiaire $f(x) \underset{0}{\sim} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$.
Comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) + o(1) \underset{0}{\sim} -\ln(x) + o(\ln(x))$, on a donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} \underset{0}{\sim} -\ln(x)$. Au final, on a $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

d. On sait que $\forall t > 0,\ x^2 + t^2 \geqslant 2tx$ donc $\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}}$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par encadrement. Mieux $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{x du}{x\sqrt{(1+u^2)(1+x^2u^2)}} = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{du}{\sqrt{(1+u^2)(\frac{1}{x^2}+u^2)}} = \dfrac{1}{x} f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ avec le changement de variable $t = xu$ donc, avec la question **c.**, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\Big(-\ln\big(\frac{1}{x}\big)\Big) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

8.19 Pour tout réel x, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t^2}\mathrm{ch}\,(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{ch}\,(xt) = \dfrac{e^{xt}+e^{-xt}}{2} = \underset{+\infty}{=} O(e^{|x|t})$ donc $e^{-t^2}\mathrm{ch}\,(xt) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2+|x|t}) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et H est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = e^{-t^2}\mathrm{ch}\,(xt)$, alors :

- $\forall t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le faire).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a > 0$, on a la majoration $\forall x \in [-a;a],\ \forall t \geqslant 0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(at) = \varphi_a(t)$ et $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc la fonction φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt)dt$. On pose $u(t) = \mathrm{sh}\,(xt)$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$ de sorte que u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $u(0)v(0) = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $H'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{ch}\,(xt)dt = \dfrac{x}{2}H(x)$. On intègre et $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{4}}$. Comme $H(0) = \lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, au final, $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{4}}}{2}$.

8.20 **a.** Soit $x \neq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(u)du$ et on pose $u = tx = \varphi(t)$ pour que, par intégration par parties puisque φ est une bijection de classe C^1 et strictement monotone de $[0;1]$ sur $\widetilde{[0;x]}$, on ait bien $f(x) = x\displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$.

b. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt = \int_0^1 r(x,t)dt$ en posant $r(x,t) = f'(tx)$. Alors :

- Pour $t \in [0;1]$, la fonction $x \mapsto f'(tx)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est C^2 sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f'(tx)$ est continue donc intégrable sur $[0;1]$, $t \mapsto \frac{\partial r}{\partial x}(x,t) = tf''(tx)$ est continue sur $[0;1]$.
- Pour $a > 0$, comme f'' est continue sur le segment $[-a;a]$, $\exists M_a \geqslant 0,\ \forall y \in [-a;a],\ |f''(y)| \leqslant M_a$. Ainsi, pour $x \in [-a;a]$ et $t \in [0;1]$, on a $\left|\frac{\partial r}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M_a = \varphi_a(t)$ avec φ_a continue donc intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $\mathbb{R}$ (car sur tout $[-a;a]$) et on a bien $g'(x) = \displaystyle\int_0^1 tf''(tx)dt$. Il existe $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xg(x)$ (même si $x = 0$ car $f(0) = 0$).

Plutôt que de recommencer à partir de l'expression de g, on va utiliser la relation de TAYLOR-reste intégral pour écrire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) + xf'(0) + \displaystyle\int_0^x (x-u)f''(u)du = \int_0^x (x-u)f''(u)du$. Si $x \neq 0$, en posant le changement de variable $u = tx$ comme avant, on a $f(x) = x^2\displaystyle\int_0^1 (1-t)f''(tx)dt$ (relation même pour $x = 0$).

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)f''(tx)dt = \int_0^1 s(x,t)dt$ en posant $s(x,t) = (1-t)f''(tx)$:

- Pour $t \in [0;1]$, la fonction $x \mapsto (1-t)f''(tx)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est C^3 sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto s(x,t)$ est continue donc intégrable sur $[0;1]$ et $t \mapsto \frac{\partial s}{\partial x}(x,t) = t(1-t)f'''(tx)$ y est continue.
- Pour $a > 0$, comme f''' est continue sur le segment $[-a;a]$, $\exists T_a \geqslant 0,\ \forall y \in [-a;a],\ |f'''(y)| \leqslant T_a$. Ainsi, pour $x \in [-a;a]$ et $t \in [0;1]$, on a $\left|\frac{\partial s}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant T_a = \psi_a(t)$ avec ψ_a continue donc intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, h est C^1 sur $\mathbb{R}$ (car sur tout segment $[-a;a]$) et on a bien $h'(x) = \int_0^1 t(1-t)f'''(tx)dt$. Ainsi, il existe bien $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2h(x)$.

Question intermédiaire : le graphe de la fonction f passe par $(0,0)$ avec une tangente horizontale en ce point et est convexe (le graphe est au dessus de toutes ses tangentes). Comme f' est strictement croissante, on a par exemple $f'(1) > 0$ donc $\forall x \geqslant 1,\ f(x) - f(1) = f'(c)(x-1)$ pour un $c \in]1;x[$ donc $f'(c) > f'(1)$ ce qui fait que $f(x) \geqslant f(1) + f'(1)(x-1)$ (ceci traduit que le graphe de f est au-dessus de la tangente de f en $(1, f(1))$) mais comme $f'(1) > 0$, ceci impose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

c. Comme $f'' > 0$ et $t \mapsto 1-t$ est positive sur $[0;1]$ et ne s'annule qu'en 1, la fonction h définie comme ci-dessus est strictement positive (même en 0 où $h(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$). Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x\sqrt{h(x)}$. Par composée, comme $\sqrt{\ }$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; $\varphi < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Comme f'' est strictement positive, la fonction f' est strictement croissante. Puisque $f'(0) = 0$, on a $f' < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0.

Si $x > 0$, $\varphi(x) = \sqrt{f(x)} > 0$, donc $\varphi'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ et φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x < 0$, $\varphi(x) = -\sqrt{f(x)} < 0$, donc $\varphi'(x) = -\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ et φ est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

Par conséquent, φ est injective sur $\mathbb{R}$ car strictement croissante. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$ donc, par continuité de φ, φ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Au final, φ définie comme ceci est de classe C^1, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi^2(x)$.

8.21 **a.** La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, φ est paire et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}$ par parité : I existe. On connaît l'intégrale de Gauss : $I = \sqrt{2\pi}$.

b. <u>Méthode 1</u> : pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(t)e^{kt} = e^{-\frac{(t-k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}}$. Comme avant, la fonction $t \mapsto \varphi(t)e^{kt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(t)e^{kt} \underset{+\infty}{\sim} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi(t)e^{kt} \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt}dt$ converge.

En posant $t = h(u) = u + k$ dans cette intégrale, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + \frac{k^2}{2}}du = e^{\frac{k^2}{2}}I = e^{\frac{k^2}{2}}\sqrt{2\pi}$.

<u>Méthode 2</u> : On pouvait aussi poser $f(k,t) = e^{\frac{-t^2}{2}}e^{kt}$ de sorte que $g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k,t)dt$.

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $k \mapsto f(k,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour $k \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(k,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $e^{\frac{-t^2}{2}}e^{kt} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

De plus, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial k}(k,t) = te^{\frac{-t^2}{2}}e^{kt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(H_3) Pour $a > 0$ et $(k,t) \in [-a;a] \times \mathbb{R}$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial k}(k,t)\right| \leqslant \varphi_a(t) = te^{\frac{-t^2}{2}}e^{a|t|}$. Comme φ_a est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi_a(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, on peut donc dériver sous le signe somme.

La fonction g est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g'(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}e^{kt}dt$. On effectue alors une intégration par parties en posant $u(t) = -e^{\frac{-t^2}{2}}$ et $v(t) = e^{kt}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$ donc on obtient $g'(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{\frac{-t^2}{2}}e^{kt}dt = kg(k)$. On intègre cette équation différentielle : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{R},\ g(k) = \lambda e^{\frac{k^2}{2}}$.

Or $g(0) = I = \sqrt{2\pi} = \lambda$ donc $\forall k \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{kt}dt = \sqrt{2\pi}\,e^{\frac{k^2}{2}}$.

8.22 **a.** Soit $x>0$ et $h_x : t \mapsto \dfrac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3+t}}$. Alors h_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc h_x est intégrable sur $]0;1]$. Comme $x>0$, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{2}\Big)$ donc h_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ aussi donc $f(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x,t) = \dfrac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3+t}}$.

- Pour tout >0, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2x\sqrt{t}\dfrac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^2+1}}$.
- Pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir).
- Pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $0<a<b$, $x \in [a;b]$ et $t>0$, alors $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2b\sqrt{t}\dfrac{e^{-ta^2}}{\sqrt{t^2+1}} = \varphi_{a,b}(t)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi_{a,b}(0)=0$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ car $a>0$.

Ainsi, par dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = -2x\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^2+1}}dt$.

b. Pour $x>0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du \ \Big(= \frac{\sqrt{\pi}}{x}\Big)$ en posant $t = \varphi(u) = \dfrac{u^2}{x^2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme la majorité de l'intégrale se fait au voisinage de 0 et que $\sqrt{t^3+t} \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$, on estime la différence $f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3+t}} - \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t}}\Big)dt = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-tx^2}dt$ en posant $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^3+t}} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. La fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle tend vers 0 en $+\infty$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0 avec $h(0)=0$ puisque $h(t) = -\dfrac{\sqrt{t^3+t}-\sqrt{t}}{\sqrt{t^3+t}\sqrt{t}} = -\Big(\dfrac{\sqrt{1+t^2}-1}{t\sqrt{1+t^2}}\Big) \underset{0}{\sim} -\dfrac{t}{2}$. Ainsi, $\exists M \geqslant$, $\forall t>0$, $|h(t)| \leqslant M$ et $\forall x>0$, $\left|f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{x}\right| \leqslant M\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dt = \frac{M}{x^2}$. Comme $f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{x} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) \underset{+\infty}{\sim} o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{x}$.

8.23 **a.** Soit $x \in]-1;1[$, alors $g_x : t \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{t}$ est continue sur $]0;1]$ car $\forall t \in [0;1]$, $0 < 1-|x| \leqslant 1+xt \leqslant 1+|x|$. Ainsi g_x est intégrable sur $]0;1]$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$; c'est clair si $x=0$ et si $x \neq 0$, $\ln(1+xt) \underset{0}{\sim} xt$. Alors $g(x)$ est bien défini. Ainsi $]-1;1[\subset \mathcal{D}_g$.

b. Si $|x|<1$, on a $|xt|<1$ pour $t \in [0;1]$ donc $\ln(1+xt) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^nt^n}{n}$. Ainsi $g(x) = \displaystyle\int_0^1\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt$ avec $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^nt^{n-1}}{n}$ car $\forall t \in [0;1]$, $g_x(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$. Comme $||g_n||_{\infty,[0;1]} = \dfrac{|x|^n}{n}$ et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{|x|^n}{n}$ converge car $|x|<1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} g_n$ converge normalement vers g_x sur le segment $[0;1]$ donc on peut intervertir et avoir $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 g_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

c. En tant que somme d'une série entière de rayon $R \geqslant 1$, la fonction g est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1;1[$ et $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$. On reconnaît, pour $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

d. Posons $f :]0;1[\times]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{t}$ de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$.

- Pour $x \in]0;1[$, $t \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0;1]$.
- Pour $t \in]0;1]$, $t \mapsto f(x,t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $]0;1]$ (on vient de le voir). De plus, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{1+xt}$ est continue sur $]0;1]$.

• Pour $(x,t) \in]0;1[\times]0;1]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $]0;1]$.

Par dérivation sous le signe somme, g est C^1sur $]0;1[$ et $g'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = \left[\frac{\ln(1+xt)}{x}\right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pourtant, la meilleure méthode est, pour $x \neq 0$, d'effectuer le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ dans l'intégrale $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}dt$ pour obtenir $g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u}du$ et tout devient limpide par le théorème fondamental de l'intégration car $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]-1;1[$.

8.24 **a.** D'abord, si $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1;+\infty[$. De plus, $g_x t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc $\int_1^{+\infty} g_x$ converge d'après RIEMANN car $x+1 > 1$. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $0 < x < y$, alors $\forall t \geqslant 1$, $\frac{t^{-y}}{1+t} \leqslant \frac{t^{-x}}{1+t}$ qu'on intègre sur $[1;+\infty[$ pour avoir $f(y) \leqslant f(x)$ et f est bien décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{t^{-x}}{1+t}$.

• $\forall t \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $[1;+\infty[$ (on vient de le faire).

• Soit $a > 0$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times[1;+\infty[$, $|g(x,t)| \leqslant \frac{t^{-a}}{1+t} = g_a(t)$ et g_a est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme : f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{1+t} = \big[\ln(t) - \ln(1+t)\big]_1^x = \ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ en décomposant en éléments simples donc $f(1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} = \ln(2)$.

c. Pour $x > 0$, on a $f(x+1) + f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x} + t^{-x-1}}{1+t}dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-1}dt = \left[-\frac{t^{-x}}{x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

Comme f est continue en 1, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1) = f(1) \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1) \underset{0}{=} \frac{1}{x} + O(1)$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

d. Comme f est positive et décroissante, elle possède une limite $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$. On passe à la limite dans la relation $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$ et on a $2\ell = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De plus, toujours par décroissance de f : $\forall x > 1$, $\frac{1}{x} = f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x-1}$. Ainsi $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

e. $\forall t > 1$, $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{1}{t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^n}$, donc $g_x(t) = \frac{t^{-x}}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ où $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{-n-1-x}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers g_x sur $]1;+\infty[$, la fonction g_x est continue sur $]1;+\infty[$ et les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]1;+\infty[$ mais $\int_1^{+\infty} |f_n| = \left[-\frac{t^{-n-x}}{n+x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n+x}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+x}$ diverge donc pas de TITT !!! On n'est pas sur un segment donc même une convergence uniforme ne suffirait pas.

Posons $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^{-k-1-x}$. $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers g_x sur $]1;+\infty[$, les S_n et g_x sont continues sur $]1;+\infty[$ et $|S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^{-k-1-x}\right| = \left|\frac{t^{-1-x}(1-(-t^{-1})^{n+1})}{1+t^{-1}}\right| \leqslant \varphi(t) = \frac{2t^{-x}}{1+t} = 2g_x(t)$ pour $t > 1$ et $n \geqslant 0$ et on sait que g_x est intégrable sur $]1;+\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc $\int_1^{+\infty} g_x(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} S_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \int_1^{+\infty} (-1)^k t^{-k-1-x}dt$ ce qui revient à la relation $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Par exemple, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = [\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.

8.25 **a.** Soit $g_x : t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t}$. La fonction g_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissance comparée, $g_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $F(x)$ existe bien pour $x > 0$.

b. Pour $t \geqslant 0$ et $0 < x < y$, on a $e^{-yt^2} \leqslant e^{-xt^2}$ donc $g_y(t) \leqslant g_x(t)$ qu'on intègre sur $\mathbb{R}_+$ pour établir que $F(y) \leqslant F(x)$ donc F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t}$.

• Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• Soit $a > 0$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2 e^{-at^2}}{1+t} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car, par croissances comparées toujours, $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-at^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t}\,dt$.

c. Soit $x > 0$, par positivité de g_x, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t}dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t}dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$. Pour $t \in \left[0; \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{e(1+t)}$ donc $F(x) \geqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{x}} \dfrac{dt}{1+t} = \dfrac{1}{e}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.

d. Pour $x > 0$, on a $0 \leqslant F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\dfrac{\pi}{4x}}$ en posant $t = \varphi(u) = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Or $\left|F(x) - \sqrt{\dfrac{\pi}{4x}}\right| = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{te^{-xt^2}}{1+t}dt \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-xt^2}dt = \left[-\dfrac{e^{-tx^2}}{2x}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2x}$.
Ainsi $F(x) - \sqrt{\dfrac{\pi}{4x}} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x}\right) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4x}}$.

Soit $x > 0$, on pose à nouveau $t = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$ pour avoir $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$ qu'on décompose par CHASLES pour écrire $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du + \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$. Or $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du \leqslant \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{u}du$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du \underset{0}{=} O(1)$ alors que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$ donc $F(x) \underset{0}{\sim} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$. On se rend compte que c'est en 0 que cette intégrale est grande ce qui nous conduit, puisque $e^{-u^2} \underset{0}{\sim} 1$, à estimer la différence $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}+u}du - \int_0^1 \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du = \int_0^1 \dfrac{1-e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du \leqslant \int_0^1 \dfrac{1-e^{-u^2}}{u}du$ (cette dernière intégrale converge car $\displaystyle\lim_{u\to 0^+} \dfrac{1-e^{-u^2}}{u} = 0$ par DL. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}+u}du - \int_0^1 \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du \underset{0}{=} O(1)$ donc, toujours puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}+u}du = +\infty$, on a $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}+u}du \underset{0}{\sim} \int_0^1 \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du = \left[\ln\left(\sqrt{x}+u\right)\right]_0^1 = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)$. Or $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{\ln(x)}{2} + \ln(1+\sqrt{x}) = \underset{0}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{2} + o(1) \underset{0}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{2}$. Par conséquent, $F(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{2}$.

8.26 **a.** Soit $x > -1$, alors la fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{(t-1)t^x}{\ln(t)}$ est continue sur $]0;1[$, elle se prolonge par continuité en 1 avec $h_x(1) = 1$ car $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$. De plus, $\dfrac{(t-1)t^x}{\ln(t)} \underset{0}{\sim} o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$ car $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$. Ainsi, par RIEMANN car $-x < 1$, la fonction h_x est intégrable sur $]0;1[$ et f est bien définie sur $D =]-1;+\infty[$.

b. Soit $g : D\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t)=\dfrac{(t-1)t^x}{\ln(t)}$. Alors :

- Pour $t\in]0;1[$, la fonction $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur D.
- Pour $x\in D$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ (on vient de le voir).
- Pour $x\in D$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=(t-1)t^x$ est continue sur $]0;1[$.
- Pour $a>-1$, $x\in[a;+\infty[$ et $t\in]0;1[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant(1-t)t^a=f_a(t)$ et f_a est intégrable sur $]0;1[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme : f est C^1 sur D et $\forall x>-1,\ f'(x)=\displaystyle\int_0^1(t^{x+1}-t^x)dt$.

c. Ainsi, $\forall x>-1,\ f'(x)=\left[\dfrac{t^{x+2}}{x+2}-\dfrac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$ donc, comme $]0;1[$ est un intervalle, il existe une constante C telle que $\forall x\in]0;1[,\ f(x)=\ln(x+2)-\ln(x+1)+C$. La fonction h_0 se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ ($h_0(0)=0$ et $h_0(1)=1$) donc elle y est bornée (par M) et on a $0\leqslant f(x)\leqslant M\displaystyle\int_0^1 t^x dt=\dfrac{M}{x+1}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Ainsi $C=0$ et $\forall x\in D,\ f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$. On peut même prendre $M=1$ car $\forall t>0,\ \ln(t)\leqslant t-1$ d'où $\forall t\in]0;1[,\ \ln(t)\leqslant t-1\leqslant 0$ donc $0\leqslant h_0(t)=\dfrac{(t-1)}{\ln(t)}\leqslant 1$.

8.27 **a.** $t\mapsto\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $g(x)$ existe. De plus, $g(0)=[\text{Arctan}(t)]_0^1=\dfrac{\pi}{4}$. $\forall t\in[0;1],\ 0\leqslant\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\leqslant\dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}\leqslant e^{-x^2}$. En intégrant, $0\leqslant g(x)\leqslant e^{-x^2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.

b. Soit $f:\mathbb{R}_+\times[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,t)=\dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- Clairement $\forall t\in[0;1],\ x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ t\mapsto f(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-2xe^{-(1+t^2)x^2}$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0;1]$.
- Enfin, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+\times[0;1],\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=|-2xe^{-(1+t^2)x^2}|\leqslant 2xe^{-x^2}$. Or $\psi:x\mapsto 2xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=0$ par croissances comparées donc ψ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, si $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times[0;1]$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant||\psi||_{\infty,\mathbb{R}_+}=\varphi(t)$. Comme φ est continue et intégrable sur $[0;1]$, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme : g est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\geqslant 0,\ g'(x)=-2x\displaystyle\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}dt=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dt$. Si $x>0$, après le changement de variable $t=u/x=\varphi_x(u)$ avec φ_x bijection strictement croissante de classe C^1 de $[0;x]$ dans $[0;1]$, on a $g'(x)=-2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$. Si $x=0$, cette relation est aussi vraie car $g'(0)=0$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a h de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\geqslant 0,\ h'(x)=e^{-x^2}$. Par conséquent : $\forall x\geqslant 0,\ g'(x)+2h'(x)h(x)=0$.

c. On intègre et, comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle et que $g(0)=\pi/4$ et $h(0)=0$, $\forall x\geqslant 0,\ g(x)+h(x)^2=\pi/4$. Mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ d'après **a.** donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}h(x)^2=\pi/4$ en passant à la limite dans la relation précédente. Comme h est positive, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}h(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$ (on retrouve l'intégrale de GAUSS).

d. D'après le théorème de la limite monotone, a admet une limite en $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, or $\displaystyle\int_0^{+\infty}a$ converge donc cette limite ne peut être que 0. Comme a est décroissante et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}a(x)=0$, a est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

e. Comme a est décroissante, pour $t>0$ fixé et tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_{kt}^{(k+1)t}a(x)dx\leqslant ta(kt)\leqslant\int_{(k-1)t}^{kt}a(x)dx$ donc, en sommant ces inégalités pour $k\in[\![1;n]\!]$, $\displaystyle\frac{1}{t}\int_t^{(n+1)t}a(x)dx\leqslant S_n(t)=\sum_{k=1}^n a(kt)\leqslant\frac{1}{t}\int_0^{nt}a(x)dx$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}a(x)dx$ converge et que a est positive, on a donc $S_n(t)\leqslant\displaystyle\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}a(x)dx$ donc la suite $(S_n(t))_{n\geqslant1}$ est croissante et majorée donc elle converge, ce qui se traduit par : $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}a(nt)$ converge.

À la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, $\forall t>0,\ \frac{1}{t}\int_t^{+\infty}a(x)dx \leqslant S(t) \leqslant \frac{1}{t}\int_0^{+\infty}a(x)dx$.
Puisque $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^{+\infty}a(x)dx = \int_0^{+\infty}a(x)dx > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}tS(t) = \int_0^{+\infty}a(x)dx$ par encadrement car $\int_t^{+\infty}a(x)dx \leqslant tS(t) \leqslant \int_0^{+\infty}a(x)dx$. Ainsi, $S(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}\int_0^{+\infty}a(x)dx$.

f. Comme la suite $(x^{n^2})_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement $|x|\leqslant 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}x^{n^2}$ vaut $R=1$. Soit $x\in]0;1[$, $x^{n^2}=e^{n^2\ln(x)}=e^{-n^2|\ln(x)|}$, on définit $a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par $a(u)=e^{-u^2}$. Alors d'après **c.**, $\int_0^{+\infty}a(u)du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par conséquent, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a(n\sqrt{|\ln(x)|})=S(\sqrt{|\ln(x)|})$. Or d'après **e.**, $S(t)\underset{0}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2t}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{|\ln(x)|}=0$, en composant, $S(\sqrt{|\ln(x)|})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n^2}\underset{1^-}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}}$.

8.28 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f_x:\theta\mapsto\dfrac{\mathrm{Arctan}\left(x\tan(\theta)\right)}{\tan(\theta)}$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0)=x$ car $\mathrm{Arctan}(u)\underset{0}{=}u+o(u)$. De plus, si $x=0$, $f=0$ donc $F(0)$ existe. Si $x\neq 0$, comme $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\mathrm{Arctan}(t)=\pm\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi/2^-}\tan(\theta)=+\infty$, on a $\lim\limits_{\theta\to\pi/2-}\frac{1}{\tan(\theta)}=0$ donc $\lim\limits_{\theta\to\pi/2^-}f_x(\theta)=0$ et f_x se prolonge aussi par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $f_x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Ainsi, $F(x)=\int_0^{\pi/2}f_x$ existe car f_x est finalement continue sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Le domaine de définition de F est donc $\mathbb{R}$.

b. Soit $f:\mathbb{R}\times\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,\theta)=\dfrac{\mathrm{Arctan}\left(x\tan(\theta)\right)}{\tan(\theta)}$.

- Pour $t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction $x\mapsto f(x,\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme Arctan.
- Pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\theta\mapsto f(x,\theta)$ est continue et intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ (voir ci-dessus) et la fonction $\theta\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)=\dfrac{1}{1+x^2\tan^2(\theta)}$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
- Pour $(x,\theta)\in\mathbb{R}\times\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)\right|\leqslant 1=\varphi(\theta)$ avec φ continue et intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{d\theta}{1+x^2\tan^2(\theta)}$.
On pose $\theta=\mathrm{Arctan}(u)=\varphi(u)$ avec φ de classe C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, ce qui donne par changement de variable $F'(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{du}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}$. Si $x>0$ et $x\neq 1$, on a $F'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\dfrac{du}{1+u^2}-\dfrac{x^2}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\dfrac{du}{1+x^2u^2}$ (les deux intégrales convergent). Par conséquent, $F'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}[\mathrm{Arctan}(u)]_0^{+\infty}-\dfrac{x}{1-x^2}[\mathrm{Arctan}(xu)]_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2(1+x)}$ après simplification. Comme F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $F'(1)=\lim\limits_{x\to 1}F'(x)=\frac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2(1+1)}$. Ainsi, $\forall x>0,\ F'(x)=\dfrac{\pi}{2(1+x)}$. On intègre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ sachant que $F(0)=0$ et que F est continue sur $\mathbb{R}_+$, cela donne $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ F(x)=\frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.
Comme F est clairement impaire, on a $\forall x\in\mathbb{R}_-,\ F(x)=-F(-x)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-x)$.

8.29 **a.** Soit $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f_x:t\mapsto\dfrac{t^xf(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $t\mapsto t^xf(t)$ est continue en 1, $f_x(t)\underset{t\to 1^-}{\sim}O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$. Par hypothèse, $f_x(t)\underset{0}{\sim}\frac{a}{t^{-\alpha-x}}$ avec $a\neq 0$ donc f_x est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $-\alpha-x<1\iff x>-\alpha-1$ d'après RIEMANN.
Comme f_x garde un signe constant au voisinage de 0, $\int_0^{1/2}f_x$ existe si et seulement si $x>-\alpha-1$. Ainsi, le

domaine de définition de g est $I =]-\alpha-1;+\infty[$.

b. Soit $h : I \to]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}$.

• Pour $t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur I.

• Pour $x \in I$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur I (déjà fait).

• Pour $b > -\alpha-1$ et $(x,t) \in [b;+\infty[\times]0;1[$, on a $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{t^b|f(t)|}{\sqrt{1-t}} = \varphi_b(t)$ et φ_b est continue et intégrable sur $]0;1[$ car $\varphi_b(t) \underset{t\to 1^-}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et $\varphi_b(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{|a|}{t^{-\alpha-b}}$ comme avant. Par théorème, g est continue sur I.

c. Reprenons avec la même fonction h.

• Pour $t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur I.

• Pour $x \in I$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur I et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^x f(t)\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0;1[$.

• Pour $b > -\alpha-1$ et $(x,t) \in [b;+\infty[\times]0;1[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^b|f(t)||\ln(t)|}{\sqrt{1-t}} = \psi_b(t)$ et ψ_b est continue et intégrable sur $]0;1[$ car $\psi_b(t) \underset{t\to 1^-}{=} O\left(\dfrac{-\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc $\lim\limits_{t\to 1^-} \psi_b(t) = 0$ car $-\ln(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (t-1)$ et, si on choisit $-\alpha-b < \gamma < 1$, on a $\psi_b(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{|a||\ln(t)|}{t^{-\alpha-b}} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$.

Ainsi, par dérivabilité sous le signe somme, g est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^x f(t)\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt$.

d. Supposons que $a > 0$, alors par définition de la limite, $\exists \beta > 0$, $\forall t \in]0;\beta]$, $f(t) \geqslant \dfrac{at^\alpha}{2}$. Ainsi, pour $x > -\alpha-1$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt = \int_0^\beta \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt + \int_\beta^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt \geqslant \int_0^\beta \dfrac{at^x t^\alpha}{2\sqrt{1-t}}dt + \int_\beta^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt$. Or $\forall t \in]0;\beta]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \geqslant 1$ donc $g(x) \geqslant \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^\beta at^{x+\alpha}dt + \int_\beta^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt = \dfrac{a\beta^{x+\alpha+1}}{2(x+\alpha+1)} + \int_\beta^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt$. Or $\left|\displaystyle\int_\beta^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt\right| \leqslant ||f||_{\infty,[\beta;1]} \displaystyle\int_\beta^1 t^x dt = ||f||_{\infty,[\beta;1]} \mathrm{Max}(1,\beta^x)$ (traiter selon que $x < 0$ ou $x \geqslant 0$ sachant que $\beta < 1$) donc $\displaystyle\int_\beta^1 \dfrac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}dt \underset{x\to -\alpha-1}{=} O(1)$. Par contre, $\lim\limits_{x\to(-\alpha-1)^+} \dfrac{a\beta^{x+\alpha+1}}{2(x+\alpha+1)} = +\infty$. Ainsi, par minoration, $\lim\limits_{x\to -\alpha-1} g(x) = +\infty$. Bien sûr, par symétrie, si $a < 0$, on a $\lim\limits_{x\to -\alpha-1} g(x) = -\infty$.

8.30 **a.** Soit $x \geqslant 0$, $f_x : t \mapsto \dfrac{\ln(x+t)}{1+t^2}$ est continue donc intégrable sur $[0;1]$ si $x > 0$ et f_0 est continue sur $]0;1]$ avec $f_0(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) \underset{0}{=} o(1/\sqrt{t})$ donc f_0 est intégrable sur $]0;1]$. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $h : \mathbb{R}_+ \times]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{\ln(x+t)}{1+t^2}$.

• Pour $t \in]0;1]$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0;1]$.

• Soit $a > 0$ et $(x,t) \in [0;a]\times]0;1]$, alors $t \leqslant x+t \leqslant a+t$ donc $\ln(t) \leqslant \ln(x+t) \leqslant \ln(a+t)$ donc, en passant aux valeurs absolues, cela donne $|\ln(x+t)| \leqslant \mathrm{Max}(|\ln(t)|, |\ln(a+t)|) \leqslant |\ln(t)| + |\ln(a+t)|$. Ainsi, $\left|\dfrac{\ln(x+t)}{1+t^2}\right| \leqslant |\ln(t)| + |\ln(a+t)| = \varphi_a(t)$. Or, $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0;1]$ car $\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $t \mapsto |\ln(a+t)|$ est continue donc intégrable sur $[0;1]$. Par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $x \geqslant 1$, alors $\forall t \in [0;1]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(x+t) \leqslant \ln(x+1)$ donc, en intégrant cette inégalité, on a $\ln(x)\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} \leqslant f(x) \leqslant \ln(x+1)\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ d'où $\dfrac{\pi\ln(x)}{4} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi\ln(x+1)}{4}$. Comme on a classiquement $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(x) + o(1)$, on a $\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi\ln(x)}{4}$.

c. On peut montrer l'inégalité $\forall x \in [0;1],\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. Ainsi, avec $\ln(x+t) = \ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{t}{x}\right)$, dès que $x \geqslant 1$, $\forall t \in [0;1]$, $\dfrac{t}{x} \in [0;1]$ donc $\ln(x) + \dfrac{t}{x} - \dfrac{t^2}{2x^2} \leqslant \ln(x+t) \leqslant \ln(x) + \dfrac{t}{x}$. En intégrant, on trouve $\dfrac{\pi\ln(x)}{4} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{t}{1+t^2}dt - \dfrac{1}{2x^2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^2}{1+t^2}dt \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi\ln(x)}{4} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{t}{1+t^2}dt$ donc il vient $\dfrac{\pi\ln(x)}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2x} - \dfrac{1-(\pi/4)}{2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi\ln(x)}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2x}$ ce qui prouve bien que $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi}{4}\ln(x) + \dfrac{\ln(2)}{2x} + O(\frac{1}{x^2})$.

8.31 **a.** Soit $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ou $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par RIEMANN. Ainsi, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x > 0$, les fonctions $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[x;+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+iy} u(t)v(t) = 0$ donc la nature de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}d$ est la même que celle de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t^2}dt$. Or $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x;+\infty[$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge, ainsi $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}dt$ converge aussi. De même avec $u : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$: $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt$ converge. On en déduit que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$.
• Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir ci-dessus). De plus, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{te^{-tx}}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour $a > 0$ et $(x,t) \in [a;+\infty[\times\mathbb{R}_+$, on a la majoration $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{te^{-at}}{1+t^2} \leqslant e^{-at} = \varphi_a(t)$ et aussi $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2e^{-at}}{1+t^2} \leqslant e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, par théorème, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}dt$ par LEIBNIZ. Par conséquent, $f''(x) + f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} + \dfrac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\right)dt = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{1}{x}$.
Comme les fonctions $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}dt = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}dt - \displaystyle\int_1^{x} \dfrac{\cos(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt - \displaystyle\int_1^{x} \dfrac{\sin(t)}{t}dt$, il vient $g'(x) = \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{x} - \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}dt\right)\cos(x) - \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{x} - \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt\right)\sin(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration donc $g'(x) = -\left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}dt\right)\cos(x) - \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt\right)\sin(x)$. De même, g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g''(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{x} + \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}dt\right)\sin(x) + \dfrac{\sin^2(x)}{x} - \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt\right)\cos(x)$ donc $g''(x) = \dfrac{1}{x} - g(x)$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par conséquent, les fonctions f et g sont C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) : $y'' + y = 1/x$.

c. La fonction $h = f - g$ est de classe C^2 par opérations et $h'' = f'' - g'' = -f + \dfrac{1}{x} + g - \dfrac{1}{x} = -(f-g) = -h$ donc $h'' + h = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait qu'alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x > 0$, $h(x) = A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x+\theta)$. Or $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \dfrac{1}{x}$ car $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En tant que "reste" d'intégrales convergentes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t}dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt = 0$ donc, comme

$\cos$ et $\sin$ sont bornées, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ce qui impose $\sqrt{A^2+B^2} = 0$ donc $A = B = 0$. On déduit donc $f = g$ du fait que $h = 0$.

Avec les notations de la question **b.**, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et que ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ par continuité sous le signe somme car $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $f(0) = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

En écrivant $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt + \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt + \int_x^1 \frac{\cos(t)-1}{t}dt + \int_x^1 \frac{1}{t}dt$, comme $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos(t)-1}{t}dt \underset{0}{=} O(1)$ car $t \mapsto \dfrac{\cos(t)-1}{t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} g(x) = I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

8.32 **a.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}e^{-\beta t}$.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-\beta t})$, la fonction f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car $\beta > 0$. De plus, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t\sin(xt)}{1+t^2}e^{-\beta t}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\dfrac{t^2\cos(xt)}{1+t^2}e^{-\beta t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}e^{-\beta t} \leqslant e^{-\beta t}$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-\beta t} \leqslant e^{-\beta t} = \varphi(t)$

où la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par théorème, I_β est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle I''_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{1+t^2}e^{-\beta t}dt$. Ainsi, $\displaystyle I''_\beta(x) - I_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{1+t^2}e^{-\beta t} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}e^{-\beta t}dt$ d'où $\displaystyle I''_\beta(x) - I_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-\beta t}dt = -\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-\beta)t}\right) = -\mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(ix-\beta)t}}{ix-\beta}\right]_0^{+\infty}\right) = -\frac{\beta}{\beta^2+x^2}$. **b.**

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = -\dfrac{\beta e^{-t}}{\beta^2+t^2}$. Alors h est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $[x;+\infty[$ pour tout x car $h(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$. Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_\beta(x)$ est défini et $\displaystyle F_\beta(x) = \int_0^{+\infty} h(t)dt - \int_0^x h(t)dt$. Par le théorème fondamental de l'intégration, F_β est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'_\beta(x) = -h(x)$. Comme h est aussi C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations, F_β est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $F''_\beta(x) = -h'(x)$. Par opérations toujours, J_β est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $J'_\beta(x) = \frac{1}{2}\Big(e^xF_\beta(x) - e^xh(x) - e^{-x}F_\beta(-x) + e^{-x}h(-x)\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^xF_\beta(x) - e^{-x}F_\beta(-x)\Big)$. On dérive à nouveau et $J''_\beta(x) = \frac{1}{2}\Big(e^xF_\beta(x) - e^xh(x) + e^{-x}F_\beta(-x) - e{-}xh(-x)\Big) = J_\beta(x) - \dfrac{\beta}{\beta^2+x^2}$ donc $J''_\beta(x) - J_\beta(x) = -\dfrac{\beta}{\beta^2+x^2}$.

La fonction $H_\beta = I_\beta - J_\beta$ est donc de classe C^2 par somme et, par linéarité de la dérivée seconde, elle est solution de $y'' - y = 0$. On sait qu'alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_\beta(x) = I_\beta(x) - J_\beta(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

Comme $\displaystyle J_\beta(0) = F_\beta(0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2+t^2}dt$, par le changement de variable $t = \beta u = \psi(u)$ avec ψ qui réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle J_\beta(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}e^{-\beta u}du = I_\beta(0)$ donc $H_\beta(0) = 0$ et $A+B = 0$.

Mais $\displaystyle I'_\beta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}e^{-\beta t}dt$ donc $I'_\beta(0) = 0$. De plus, $J'_\beta(0) = \frac{1}{2}\Big(e^0F_\beta(0) - e^{-0}F_\beta(0)\Big) = 0$ donc $H'_\beta(0) = 0$ ce qui impose $A = B$. Au final, $A = B = 0$ donc $H_\beta = 0$ et on a bien $I_\beta = J_\beta$.

8.33 **a.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$.

(H_1) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \dfrac{1}{2}$ par développements limités et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Continuons :

(H_1) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fait ci-dessus).

(H_3) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle se prolonge par continuité en 0 (elle tend vers 0) et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-xt}) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.

(H_4) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_5) Soit $a > 0$, pour $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\Big|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\Big| \leqslant \theta_a(t) = 2e^{-at}$. Or θ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (intégrale de référence).

On déduit du théorème de dérivation sous le signe somme généralisé que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Avec la formule de LEIBNIZ, $\forall x > 0,\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(t)-1}{t}e^{-xt}dt$ et $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}dt$.

b. Les fonctions $\varphi : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $\psi : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, admettent des limites finies en 0 et tendent vers 0 en $+\infty$ donc, classiquement, elles sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$, par inégalité de la moyenne (tout converge), on a $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|e^{-xt}dt \leqslant ||\varphi||_{\infty,\mathbb{R}_+} \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{||\varphi||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{x}$. De même, comme $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}dt$ et $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}dt$, on a $|F'(x)| \leqslant \dfrac{||\psi||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{x}$ et $|F''(x)| \leqslant \dfrac{2}{x}$ car $0 \leqslant 1-\cos(t) \leqslant 2$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} F''(x) = 0$.
On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu, mais c'est plus long !

c. Pour $x > 0$, on a $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}dt = \dfrac{1}{x} - \text{Re}\Big(\int_0^{+\infty} e^{it-xt}dt\Big) = \dfrac{1}{x} - \text{Re}\Big(\Big[\dfrac{e^{(i-x)t}}{i-x}\Big]_0^{+\infty}\Big)$ donc $F''(x) = \dfrac{1}{x} - \text{Re}\Big(\dfrac{1}{x-i}\Big) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$. On intègre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ F'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{x^2}{1+x^2}\Big) + C$. Comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{x^2}{1+x^2}\Big) = 0$, on trouve $C = 0$. On intègre à nouveau et on trouve classiquement $F(x) = x\ln(x) - x - \dfrac{x\ln(1+x^2)}{2} + x - \text{Arctan}(x) + K = K - \dfrac{x}{2}\ln\Big(1+\dfrac{1}{x^2}\Big) - \text{Arctan}(x)$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, on trouve $K = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0,\ F(x) = \dfrac{\pi}{2} + x\ln(x) - x\ln(\sqrt{1+x^2}) - \text{Arctan}(x)$.
Comme F est continue en 0, on a $F(0) = \lim\limits_{x\to0^+} F(x) = K = \dfrac{\pi}{2}$ par croissances comparées. On effectue dans $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ une intégration par parties en posant $u(t) = 1-\cos(t)$ et $v(t) = -\dfrac{1}{t}$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt = \dfrac{\pi}{2}$ (DIRICHLET).

8.34 **a.** Soit $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = t^x e^{-t}$.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 car $\lim\limits_{t\to0^+} h(x,t) = 1$ si $x = 0$ et $\lim\limits_{t\to0^+} h(x,t) = 0$ si $x > 0$. De plus, $t^x e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ce

qui justifie déjà l'existence de la fonction f.
• Soit $a > 0$, alors $\forall (x,t) \in [0;a] \times \mathbb{R}_+^*$, $|h(x,t)| \leqslant \varphi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 1 \\ t^a e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$. Or φ_a est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$ comme ci-dessus.
Au final, par continuité sous le signe somme, f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
b. Comme $u \mapsto \ln(f(u))$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car f est strictement positive sur son ensemble de définition, définissons $\varphi : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_{x-1}^{x} \ln(f(u))du$. Par le théorème fondamental de l'intégration, φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $\varphi'(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1))$. Or, si $x \geqslant 1$, en posant $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ dans l'intégrale $f(x)$, comme $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, on a $f(x) = 0 + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt = xf(x-1)$. Ainsi, $\forall x \geqslant 1$, $\varphi'(x) = \ln(x) \geqslant 0$. Comme $[1;+\infty[$ est un intervalle, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geqslant 1$, $\varphi(x) = x\ln(x) - x + \lambda$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Ainsi, comme $v_n = \varphi(n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/v_n = 0$. Comme φ est croissante, la suite $(1/v_n)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc, d'après le CSSA, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$ converge.

8.35 **a.** Soit f, g deux fonctions de X. La fonction $h : y \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par définition de X. De plus, la fonction $y \mapsto f(x-y)$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ car f l'est et par le changement de variable $y = \phi(u) = x - u$. En effet, la fonction ϕ est bien une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}$ implique celle de $y \mapsto f(x-y)^2$ avec la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)^2 dy = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-(x-u))^2(-1)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u)du = N_2(f)^2.$$

Ainsi, comme $y \mapsto f(x-y)$ et $y \mapsto g(y)$ sont de carré intégrables sur $\mathbb{R}$, on sait d'après le cours que $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; on peut redonner l'inégalité $|f(x-y)g(y)| \leqslant \frac{1}{2}\Big(f(x-y)^2 + g(y)^2\Big)$ qui justifie par comparaison cette intégrabilité. Ainsi, le réel $f * g(x)$ est bien défini pour tout x donc la fonction $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et grâce à ce qui précède, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f * g(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x-y)dy}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(y)dy} = N_2(f)N_2(g).$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} > 0$, par définition de la limite, il existe deux réels $a_n \leqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ (on peut les choisir ainsi, c'est-à-dire a_n aussi petit qu'on veut et b_n aussi grand qu'on veut), tels que

$$\forall x \leqslant a_n,\ |f(x) - 0| \leqslant \varepsilon_n \ \text{ et } \ \forall x \geqslant b_n,\ |f(x) - 0| \leqslant \varepsilon_n.$$

Soit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [a_n;b_n]$, $f_n(x) = f(x)$ et $\forall x \in]-\infty;a_n[\cup]b_n;+\infty[$, $f_n(x) = 0$. Alors, pour un réel x, on a deux cas :
- $x \in [a_n;b_n]$ et alors $|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0$.
- $x \notin [a_n;b_n]$ et alors $|f_n(x) - f(x)| = |0 - f(x)| = |f(x)| \leqslant \varepsilon_n$ par construction.

Dans les deux cas, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_n$ donc $||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \varepsilon_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. De plus, les f_n sont nulles en dehors du segment $[a_n;b_n]$ par construction.
c. Comme les f_n sont continues et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, on peut conclure par un théorème du cours que f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Mais f_{n_0} (par exemple) est de limite nulle en

$+\infty$. Ainsi, il existe $b \geqslant 0$ tel que $\forall x \geqslant b,\ |f_n(x) - 0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a donc $\forall x \geqslant b,\ |f(x) - 0| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - 0| \leqslant |f(x) - f_{n_0}((x)| + |f_{n_0}(x) - 0| \leqslant \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$: ceci garantit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Bien sûr, par symétrie, on a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

d. Si $(f, g) \in X^2$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, définissons les deux fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = f(x)$ et $g_n(x) = g(x)$ si $x \in [-n; n]$, $f_n(x) = \left(2 - \frac{|x|}{n}\right) f(x)$ et $g_n(x) = \left(2 - \frac{|x|}{n}\right) g(x)$ si $x \in]-2n; -n[$ ou $x \in]n; 2n[$ et $f_n(x) = g_n(x) = 0$ si $|x| \geqslant 2n$ (faire un dessin). Ces fonctions f_n et g_n sont continues sur $\mathbb{R}$ car f et g le sont et car, par exemple, $\lim\limits_{x \to (-2n)^+} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to n^+} f_n(x) = f(n) = f_n(n)$. Les fonctions f_n et g_n sont nulles en dehors du segment $[-2n; 2n]$ et ont donc pour limite 0 en $\pm\infty$ et, bien sûr, $(f_n, g_n) \in X^2$. Comme on ne sait pas si la limite de f existe en $\pm\infty$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ peut ne pas converger uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ même si, par construction, on a bien la convergence simple de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ vers f sur $\mathbb{R}$ car dès que $n \geqslant |x|$, on a $f_n(x) = f(x)$ donc la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ est stationnaire. Par contre, comme $f_n(x) - f(x) = 0$ si $|x| \leqslant n$, $|f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{|x|}{n} - 1\right) |f(x)| \leqslant |f(x)|$ si $|x| \in]n; 2n[$, $f_n - f$ est de carré intégrable puisque f l'est et $||f_n - f||_2^2 = \int_{-\infty}^{-n} |f_n(t) - f(t)|^2 dt + \int_n^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \leqslant R_n = \int_{t \in I_n} |f(t)^2| dt$ où $I_n =]-\infty; n] \cup [n; +\infty[$. Or R_n est le reste de l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)^2| dt$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} |f(t)^2| dt = ||f||_2^2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$. On vient de montrer par encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f_n - f||_2 = 0$, ce qu'on résume en disant que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge en norme 2 (ou dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) vers f. Par symétrie, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} ||g_n - g||_2 = 0$.

Il est clair que le produit de convolution est bilinéaire par linéarité de l'intégrale donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n * g_n(x) - f * g(x)| = |f_n * g_n(x) - f_n * g(x) + f_n * g(x) - f * g(x)| = |f_n * (g_n - g)(x) + (f_n - f) * g(x)|$ ce qui donne par inégalité triangulaire : $|f_n * g_n(x) - f * g(x)| \leqslant |f_n * (g_n - g)(x)| + |(f_n - f) * g(x)|$.

Mais on a vu à la question **a.** que $|f_n * (g_n - g)(x)| \leqslant ||f_n||_2 ||g_n - g||_2$ et $|(f_n - f) * g(x)| \leqslant ||f_n - f||_2 ||g||_2$. Ainsi, puisque par construction $||f_n||_2 \leqslant ||f||_2$ car $|f_n| \leqslant |f|$, on obtient la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n * g_n(x) - f * g(x)| \leqslant ||f||_2 ||g_n - g||_2 + ||f_n - f||_2 ||g||_2$$

qui montre que $f_n * g_n - f * g$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n * g_n - f * g||_{\infty, \mathbb{R}} \leqslant ||f||_2 ||g_n - g||_2 + ||f_n - f||_2 ||g||_2$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(||f||_2 ||g_n - g||_2 + ||f_n - f||_2 ||g||_2\big) = 0$ d'après ce qui précède, on a montré la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n * g_n)_{n \geqslant 1}$ vers $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 4n$, il vient $f_n * g_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x - t) g_n(t) dt = 0$ car

- si $t > 2n$ on a $g_n(t) = 0$ par définition de g_n,

- si $t \leqslant 2n$, comme $x > 4n$, on a $x - t > 4n - 2n = 2n$ et $f_n(x - t) = 0$ par définition de f_n.

Par symétrie, $\forall x < -4n$, $f_n * g_n(x) = 0$ de sorte que $f_n * g_n$ est nulle en dehors du segment $[-4n; 4n]$.

Par conséquent, d'après la question **c.**, la suite de fonctions $(f_n * g_n)_{n \geqslant 1}$ étant composée de fonctions nulles en dehors d'un segment donc de limite nulle en $\pm\infty$ et convergeant uniformément vers $f * g$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $f * g$ est elle-même de limite nulle en $\pm\infty$.

De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$, en définissant $h_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h_n(x, t) = f_n(x - t) g_n(t)$, on a :

- Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_n(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f_n l'est.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_n(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f_n et g_n le sont.

• Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $x \in [a;b]$, alors $h_n(x,t) = 0$ si $t \notin [-2n;2n]$ par construction de g_n et si $t \in [-2n;2n]$, alors $x - t \in [a-2n;b+2n] = J_n$ et la fonction f_n est continue sur le segment J_n donc elle y est bornée d'après le théorème des bornes atteintes, d'où l'existence de $M_n = \underset{u \in J_n}{\text{Max}} |f_n(u)|$ et qui fait que pour $(x,t) \in J_n \times \mathbb{R}$, on a $|h_n(x,t)| \leqslant \varphi_n(t)$ avec $\varphi_n(t) = 0$ si $|t| > 2n$ et $\varphi_n(t) = M_n$ si $|t| \leqslant 2n$. Comme φ_n est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car à support fini, le théorème de continuité sous le signe somme montre que $f_n * g_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme la suite $(f_n * g_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers $f * g$ sur $\mathbb{R}$ et que toutes les $f_n * g_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$ par un théorème du cours.

8.36 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto e^{-t^2}\cos(2tx)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2}) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(2tx)$.

- (H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2t\sin(2xt)e^{-t^2}$.
- (H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et g_x y est intégrable.
- (H_1) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2te^{-t^2} = \varphi(t)$. Comme $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(2xt)(-2te^{-t^2})dt$.

b. On pose les fonctions $u : t \mapsto \sin(2xt)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, par intégration par parties et comme on a la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ et $u(0)v(0) = 0$, on arrive à la relation suivante : $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = -2x\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}dt = -2xf(x)$. Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$. Comme on a classiquement $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss), et qu'une primitive de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$, on a facilement $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$.

c. Méthode 1 : en utilisant la question précédente, on pose $b_y : x \mapsto e^{-(x+iy)^2} = e^{-x^2+y^2-2ixy}$, alors b_y est continue sur $\mathbb{R}$ et $|b_y(x)| = e^{-x^2+y^2} \underset{x \to \pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, b_y est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $g(y)$ existe. De plus, $g(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)dx$. Mais la fonction $x \mapsto e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)$ est impaire donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)dx = 0$ et, par parité de $x \mapsto e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx = 2e^{y^2}f(y) = \sqrt{\pi}$ d'après **a.**.
Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = \sqrt{\pi}$.
Méthode 2 : définissons $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $a(x,y) = e^{-(x+iy)^2}$.

- (H_1) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto a(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y) = -2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2}$.
- (H_2) Pour $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x,y)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $|a(x,y)| = e^{y^2-x^2} \underset{\pm\infty}{=} O(e^{-x^2})$ donc, par comparaison, la fonction $x \mapsto a(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- (H_3) Pour $b > 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R} \times [-b;b]$, $\left|\dfrac{\partial a}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2|x+iy|e^{y^2-x^2} \leqslant 2(|x|+b)e^{b^2-x^2} = \psi_b(x)$. ψ_b est continue et paire sur $\mathbb{R}$ et $\psi_b(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées : ψ_b est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-(x+iy)^2} = 0$, on a $g'(y) = -i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2(x+iy)e^{-(x+iy)^2}dx = -i\Big[e^{-(x+iy)^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, g est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut donc $g(0) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (par parité) donc $\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = \sqrt{\pi}$.

8.37 **a.** La fonction $g : t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} g(t) = 1$ car on sait que $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. De plus, $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et I_2 existe.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f_x : t \mapsto \dfrac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}$. f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = x^2$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$ donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

c. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}$.

(H_1) Pour $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = 2\dfrac{\cos(2tx)}{1+t^2}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir).

(H_3) Soit $a > 0$, $x \in [-a;a]$, $t > 0$, il vient $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{|2tx|}{t(1+t^2)} \leqslant \dfrac{2a}{1+t^2} = \varphi_a(t)$ car on a l'inégalité $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(u)| \leqslant u$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2a}{t^2}$. De même, on a $\forall (x,t) \in [-a;a] \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2}{1+t^2} = \psi_2(t)$ et ψ_2 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme appliqué deux fois, la fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a les formules $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}dt$ et $F''(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{(1+t^2)}dt$ pour tout réel x.

d. Si $x \in \mathbb{R}$, comme $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$, $F''(x) - 4F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\cos(2tx)}{(1+t^2)}dt - \int_0^{+\infty} \frac{4\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}dt$ devient $F''(x) - 4F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2 - 4\sin^2(tx)}{(1+t^2)}dt - \int_0^{+\infty} \frac{4\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - 4\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et avec le changement de variable $t = \dfrac{u}{x} = \varphi(u)$ (si $x > 0$) avec φ de classe C^1 strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on trouve, dans la seconde intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}dt = x\int_0^{+\infty} g(u)du = xI_2$. Par conséquent, $\forall x > 0,\ F''(x) - 4F(x) = \pi - 4xI_2\quad(E)$ et cette relation est aussi vérifiée si $x = 0$ car $F(0) = 0$ et $F''(0) = \pi$.

e. On résout (E) sur $\mathbb{R}_+$. Les solutions de l'équation homogène associée sont classiquement les fonctions $y : x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$ et une solution particulière de (E) est clairement $y_0 : x \mapsto xI_2 - \frac{\pi}{4}$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sont les fonctions $y : x \mapsto xI_2 - \frac{\pi}{4} + Ae^{2x} + Be^{-2x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Or $F(0) = F'(0) = 0$ donc $A + B = \frac{\pi}{4}$ et $2A - 2B = -I_2$ donc, après calculs, on trouve $A = \frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2}$ et $B = \frac{\pi}{4} + \frac{I_2}{2}$. Au final, $\forall x \geqslant 0,\ F(x) = xI_2 - \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{I_2}{2}\right)e^{-2x}$.

f. Comme $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(u)| \leqslant u$, on a $|F(x)| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+t^2}dt = \frac{\pi x^2}{2}$ pour tout x.
Pour déterminer un équivalent de F en $+\infty$, on doit traiter deux cas :

- Si $\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} \neq 0$, par croissances comparées, on a $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2}\right)e^{2x}$.
- Si $\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} = 0$, on a par contre $F(x) \underset{+\infty}{\sim} I_2 x$ (car $I_2 > 0$).

Mais comme $\forall x \geqslant 0,\ |F(x)| \leqslant \frac{\pi x^2}{2}$, le premier cas est à proscrire car $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^{2x})$. On en déduit donc $\frac{\pi}{4} - \frac{I_2}{2} = 0$ donc que $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

g. Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto \sin^2(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ car $\sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^2$ et $\sin$ est bornée. Ainsi, par intégration par parties, $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = -\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ en posant $t = \frac{u}{2}$ (facile à justifier). Par conséquent, on retrouve la valeur de l'intégrale de DIRICHLET : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

8.38 **a.** Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ si elle converge.

(H_1) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations,

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations,

(H_3) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ |g(x,t)| \leqslant e^{-t^2} = \varphi(t)$ et φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Par continuité sous le signe somme, f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Comme f est clairement paire, on s'occupe de l'aspect C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$:

(H_1) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x,t)$ est C^1 continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}$,

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **a.** sur $\mathbb{R}_+^*$, et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations,

(H_3) Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a;b]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{t^2} e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}} = \varphi_{a,b}(t)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ où elle est intégrable car $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t^2})$ et $\lim_{t\to 0^+} \varphi_{a,b}(t) = 0$ par croissances comparées (car $\lim_{v\to+\infty} ve^{-v} = 0$ en posant $v = \frac{a}{t}$).

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ et on a $\forall x > 0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$.

c. Pour $x > 0$, on pose $t = \frac{x}{u} = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement décroissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par changement de variable, $f'(x) = -2x \int_{+\infty}^0 \frac{u^2}{x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{u^2} - u^2\right)\left(\frac{-x}{u^2}\right) du$ d'où $f'(x) = -2f(x)$ (E).

On résout (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ f(x) = \lambda e^{-2x}$ (R). Comme $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et que f est continue en 0, on a $\lambda = f(0)$ en passant à la limite quand x tend vers 0 dans (R). Ainsi, $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$. Par parité de f, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(|x|) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

d. Comme f est continue en 0 et que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(-2f(x)) = -\sqrt{\pi}$, f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = -\sqrt{\pi}$. Par parité de f, on a $f'_g(0) = +\sqrt{\pi} \neq -\sqrt{\pi}$. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

e. Pour $x > 0$, on peut écrire $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{2te^{-t^2}dt}{2t}$ et on pose $u(t) = -e^{-t^2}$ et $v(t) = \frac{1}{2t}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x;+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Par intégration par parties, on obtient donc $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$. Or, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}dt = \int_x^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2t^3}dt \leqslant \frac{1}{2x^3}\int_x^{+\infty} te^{-t^2}dt = \frac{1}{2x^3}\Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_x^{+\infty} te^{-t^2}dt = \frac{e^{-x^2}}{4x^3}$ donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}dt \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{e^{-x^2}}{2x}\Big)$ ce qui permet de conclure que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

8.39 **a.** • Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^{3/2}}\Big)$ donc g_x est intégrable par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

• Si $x = 0$, la fonction $g_0 : t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g_0(0) = 1$ car $\ln(1+t^2) \underset{0}{\sim} t^2$ et on a toujours $g_0(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^{3/2}}\Big)$ donc g_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. On pose $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} -t$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées.
Ainsi, par intégration par parties, on a $f(0) = \frac{2t}{t(1+t^2)}dt = 2[\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \pi$.

c. Pour $u \geqslant 0$, par TAYLOR reste intégral, on a $\ln(1+u) = \ln(1+0) + u + \int_0^u \frac{u-t}{1+t}dt$ donc $\ln(+1+u) \geqslant u$.
Ainsi, pour $x > 0$, $f(0) - f(x) = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\Big)\ln(1+t^2)dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{t^2(x^2+t^2)}\ln(1+t^2)dt$. Or on sait que $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant t^2$ donc $0 \leqslant f(0) - f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+t^2}dt = x\int_0^{+\infty} \frac{(1/x)}{1+(t/x)^2}dt$. Ainsi, on obtient l'encadrement $0 \leqslant f(0) - f(x) \leqslant x\Big[\text{Arctan}\Big(\frac{t}{x}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi x}{2}$. C'est aussi vrai si $x = 0$.

d. Par l'encadrement précédent, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \pi$ ce qui prouve que f est continue à droite en 0.
Comme f est clairement paire, f est continue en 0.
Soit $h : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2}$. Prenons $a > 0$.

- $\forall t > 0,\ x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto h(x,t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x \in [a;+\infty[,\ \forall t > 0,\ |h(x,t)| \leqslant \frac{\ln(1+t^2)}{a^2+t^2} = g_a(t)$ et g_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, par continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité. En conclusion, la fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

8.40 **a.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x,t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$.
• Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ et φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \frac{1}{2}$ par développements limités et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Continuons :
• Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fait ci-dessus). De plus, les

fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))e^{-xt}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Soit $a > 0$, alors pour $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-at} \leqslant ||h||_{\infty,\mathbb{R}_+}e^{-at} = \theta_a(t)$ avec $h : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = 0$ par développements limités et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$ donc h est bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \psi_a(t) = 2e^{-at}$. Comme θ_a et ψ_a sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit du théorème de dérivation sous le signe somme que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}dt$.

c. Soit $x > 0$, avec les fonctions bornées φ et h ci-dessus, on a par inégalité de la moyenne (tout converge), les majorations suivantes : $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |\varphi(t)|e^{-xt}dt \leqslant ||\varphi||_{\infty,\mathbb{R}_+}\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{||\varphi||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{x}$. De même, comme $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}dt$ et $F''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}dt$, on a $|F'(x)| \leqslant \frac{||h||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{x}$ et $|F''(x)| \leqslant \frac{2}{x}$ car $0 \leqslant 1-\cos(t) \leqslant 2$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

d. Pour $x > 0$, on a $F''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}dt = \frac{1}{x} - \text{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{it-xt}dt\right) = \frac{1}{x} - \text{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty}\right)$ donc $F''(x) = \frac{1}{x} - \text{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$. On intègre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + C$. Comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = 0$, on trouve $C = 0$. On intègre à nouveau et on trouve classiquement $F(x) = x\ln(x) - x - \frac{x\ln(1+x^2)}{2} + x - \text{Arctan}(x) + K = K - \frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \text{Arctan}(x)$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, on trouve $K = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} + x\ln(x) - x\ln(\sqrt{1+x^2}) - \text{Arctan}(x)$.

e. Comme F est continue en 0, on a $F(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = K = \frac{\pi}{2}$ par croissances comparées et DL. On effectue dans $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ une intégration par parties en posant $u(t) = 1-\cos(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ (Dirichlet).

8.41 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f_x(t) \underset{0}{=} \frac{1-(1-xt^2+o(t^2))}{t^2} \underset{0}{=} x + o(1)$, la fonction f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = x$ donc f_x est intégrable sur $]0;1]$.

- Si $x = 0$, f_x est la fonction nulle donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $x < 0$, $1-e^{-xt^2} \underset{+\infty}{\sim} -e^{-xt^2}$ donc, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} f_x(t) = +\infty$ car $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-e^{-xt^2}}{t^2}$ et f_x n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.
- Si $x > 0$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ d'après Riemann.

En résumé, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \geqslant 0$, et comme f_x est de signe constant sur son ensemble de définition, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge dans les mêmes conditions. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

b. Définissons $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}_+$ par $g(x,t) = \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ si $x \geqslant 0$.

(H_1) Pour $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = e^{-xt^2}$.

(H_2) Pour $x > 0$, $t \mapsto g(x,t) = f_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu en **a.**).

(H_3) Pour $a > 0$, $x \in [a;+\infty[$ et $t > 0$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at^2} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car, par croissances comparées, $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$. On effectue le changement de variable $t = \psi(u) = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$, licite car ψ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et on a $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ en se rappelant de la très classique intégrale de GAUSS $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, d'après **b.**, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ f'(x) = \sqrt{\pi x} + C$.

<u>Méthode 1</u> : montrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_1) Pour $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.

(H_2) Pour $x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x,t) = f_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu en **a.**).

(H_3) Pour $a > 0$, $x \in [0;a]$, $t > 0$, $|g(x,t)| \leqslant \psi_a(t)$ avec $\psi_a(t) = 1$ si $t \in]0;1]$ car $1-e^{-u} \leqslant u$ par concavité et $\psi_a(t) = \dfrac{1}{t^2}$ si $t \geqslant 1$ car $1 - e^{-xt^2} \leqslant 1$; et ψ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\psi_a(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Méthode 2</u> : Pour $u \in [0;1[$, comme on a classiquement $\forall v > -1,\ \ln(1+v) \leqslant v$, en posant $v = -u$, on a $\ln(1-u) \leqslant -u$ donc, par croissance de l'exponentielle, $1-u \leqslant e^{-u}$. Comme cette inégalité est clairement vraie aussi si $u \geqslant 1$, on a donc $\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ 0 \leqslant 1-e^{-xt^2} \leqslant xt^2$. Ainsi, pour $x > 0$, on a $\forall t > 0,\ f_x(t) \leqslant x$ et on a aussi $f_x(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Par conséquent, $0 \leqslant f(x) = \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{x}} f_x(t)dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} f_x(t)dt \leqslant x \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty}\dfrac{dt}{t^2} = 2\sqrt{x}$. Ceci prouve par encadrement que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, comme $\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{\pi x} + C$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = C = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{\pi x}$.

8.42 **a.** Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}$ de sorte que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ si elle converge.

(H_1) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ et que f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = ix$ car $e^{ixt} - 1 \underset{0}{\sim} ixt$ si $x \neq 0$.

(H_3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = ie^{-t}e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_4) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} ie^{(ix-1)t}dt$.

b. Ainsi, $F'(x) = \left[\dfrac{ie^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{i}{1-ix} = \dfrac{i(1+ix)}{1+x^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{i}{1+x^2}$. Comme $F(0) = 0$ et que $\mathbb{R}$ est un intervalle, en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + i\,\mathrm{Arctan}(x)$.

8.43 **a.** Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ de sorte que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ (si elle converge).

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.
- Pour tout $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 1$ car $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin(t)}{t} = 1$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(e^{-xt}\right)$ (avec $x > 0$).
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour $a > 0$ et $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at} = \psi_a(t)$ et ψ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt$.

Ainsi, $F'(x) = -\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}dt\right) = -\mathrm{Im}\left[\dfrac{e^{(i-x)t}}{(i-x)}\right]_0^{+\infty} = \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{(i-x)}\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

b. La fonction $f_0 : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f_0(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. En posant $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par $1 - \cos(t) \underset{+\infty}{=} O(1)$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ sont donc de même nature. Or $g_0 : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \dfrac{1}{2}$ toujours car $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ et $|g(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ ce qui garantit son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge car elle converge absolument, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge aussi donc $F(0)$ existe et on a $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$.

<u>Méthode 1</u> : pour $x \geqslant 0$, en posant $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties à nouveau, comme $v'(t) = -\dfrac{1+tx}{t^2}e^{-xt}$, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt}dt$.

- Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).
- Posons $h : s \mapsto (1+s)e^{-s}$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(s) = -se^{-s} \leqslant 0$ donc h est positive et maximale en 0 donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall t > 0$, $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \times (1+tx)e^{-xt}\right| \leqslant g_0(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ car $(1+tx)e^{-xt} = h(xt) \leqslant h(0) = 1$ et g_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par continuité sous le signe somme, F est continue sur $\mathbb{R}_+$, notamment en 0.

<u>Méthode 2</u> : Par Chasles, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)e^{-xt}}{t}dt$ et, en posant $t = u + k\pi$ dans chaque intégrale, $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-k\pi x} \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u+k\pi}du$. Posons $u_k : x \mapsto e^{-k\pi x} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u+k\pi}du$. Pour $x \geqslant 0$ fixé, les suites $(e^{-k\pi x})_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u+k\pi}du\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes (car $\sin(u) \geqslant 0$ et $(u+k\pi)_{k\in\mathbb{N}}$ croît), de plus, pour $k \geqslant 1$, $\left|\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)e^{-xu}}{u+k\pi}du\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{u+k\pi}du \leqslant \frac{\pi}{k\pi} = \frac{1}{k}$ donc $(u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, en notant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ ce qui prouve que la série de fonctions continues (la continuité des u_k se montre par application du théorème de continuité sous le signe somme sur un segment) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k u_k$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le cours, F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Par une petite étude de fonction, on montre classiquement que $\forall t > 0$, $|\sin(t)| \leqslant t$. Ainsi, $|f(x,t)| \leqslant e^{-xt}$

et, par inégalité de la moyenne, $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle et que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ f(x) = \lambda - \mathrm{Arctan}(x)$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Par continuité de F en 0, on a aussi $F(0) = \lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ (intégrale de DIRICHLET).

8.44 **a.** Soit $h : \mathbb{R}\times[0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

(H_1) $\forall t \in [0;1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue donc intégrables sur le segment $[0;1]$.

(H_3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ est continue sur $[0;1]$.

(H_4) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0;1]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2|x|e^{-x^2}$. Or $b : x \mapsto 2|x|e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et elle tend vers 0 en $\pm\infty$ par croissances comparées, on en déduit classiquement que b est bornée sur $\mathbb{R}$ et on note $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(2|x|e^{-x^2})$. Ainsi, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) = M$ et φ est intégrable sur le segment $[0;1]$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a la formule de LEIBNIZ, à savoir $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}x\,dt$.

Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $a : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car c'est la primitive de a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{-x^2}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -2\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}x\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}x\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du = -2e^{-x^2}g(x)$ en posant $u = tx = \psi(t)$ si $x \neq 0$ avec ψ qui est une bijection de classe C^1 strictement monotone (croissante si $x > 0$ et décroissante si $x < 0$) de $[0;1]$ dans $\widetilde{[0;x]}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2g'(x)g(x)$. Mais si $x = 0$, on a clairement $f'(0) = 0$ donc $f'(0) = -2e^{-0^2}g(0)$ est encore vrai car $g(0) = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que $(f+g^2)' = 0$ sur $\mathbb{R}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g^2(x) = C$.
Or $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$.

c. Pour $x > 0$, $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant e^{-(1+t^2)x^2} \leqslant e^{-x^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}dt = e^{-x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme g est une fonction positive, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{g(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x)}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = I$.

8.45 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $g_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$. La fonction positive g_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ donc g_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $x < 1$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x+1 > 1$. Ainsi, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $0 < x < 1$. Or $f(x)$ existe si et seulement si g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le domaine de définition D de f est $D =]0;1[$.

b. Définissons $g :]0;1[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $g(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ si elle converge.

(H_1) $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0;1[$ par opérations.

(H_2) $\forall x \in]0;1[$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

(H_3) Soit $(a,b) \in]0;1[^2$ tel que $0 < a < b < 1$, $\forall (x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)| = g(x,t) \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ avec

$\varphi_{a,b}(t) = \dfrac{1}{t^b(1+t)}$ si $t \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \dfrac{1}{t^a(1+t)}$ si $t \geqslant 1$. Or $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après RIEMANN car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^b}$ (et $b < 1$) et $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{a+1}}$ (et $a+1 > 1$).

Par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $D =]0;1[$.

c. Si $x \in D =]0;1[$, on a clairement $1 - x \in D$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $t = \dfrac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et, par changement de variable, on a $f(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{u^{-x}(1+(1/u))}\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{1-x}(u+1)}du$ donc $f(1-x) = f(x)$.

d. Méthode 1 : pour $x \in]0;1[$, par CHASLES, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt$. De plus, on majore $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)}dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^x}dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{1-x}\right]_0^1 = \frac{1}{1-x}$ qui garantit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)}dt \underset{0}{=} O(1)$. Dans la seconde intégrale, on pose $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+u^{1/x})}u^{(1/x)-1}du = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})}du$.
Or pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $1 - u^{-1/x} \leqslant \dfrac{1}{1+u^{-1/x}} \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a l'encadrement $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-u^{-1/x}}{u^2}du = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \leqslant x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt \leqslant 1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}du$. Par théorème d'encadrement, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}dt \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$. Par somme, on a $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. D'après **c.**, $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$.
Méthode 2 : comme ci-dessus, on pose $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$ pour $x \in D$, et on obtient $xf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})}du$. Posons $g : (x,u) \mapsto \dfrac{1}{u^2(1+u^{-1/x})} = \dfrac{1}{u(1+u^{1/x})}u^{(1/x)-1}$ de sorte que $xf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,u)du$ si $x \in]0;1[$.

(H_1) Pour $u > 0$, on a $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} g(x,u) = h(u)$ avec $h(u) = 0$ si $u \in]0;1[$, $h(1) = \dfrac{1}{2}$ et $h(u) = \dfrac{1}{u^2}$ si $u > 1$.

(H_2) $\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]$, $u \mapsto g(x,u)$ et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) $\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]$, $\forall u > 0$, $|g(x,u)| \leqslant \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = 1$ si $u < 1$ (car $0 \leqslant u^{1/x} \leqslant u^2$), $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\varphi(u) \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ si $u > 1$ (car $u^{-1/x} \geqslant 0$)) et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^2}$.

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu permet de conclure que $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)du$ ce qui montre que $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{+\infty} = 1$. À nouveau, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

8.46 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $g_x : t \mapsto t^x e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $g_0(0) = 1$ ou $g_x(0) = 0$ si $x > 0$. De plus, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$.

b. Définissons $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $g(x,t) = t^x e^{-t}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.
- $\forall x \geqslant 0$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x,t) \in [0;a] \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)| = g(x,t) \leqslant \varphi_a(t)$ avec $\varphi_a(t) = e^{-t}$ si $t \in]0;1]$ et $\varphi_a(t) = t^a e^{-t}$ si $t \geqslant 1$. Or φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

Par théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Soit $x \geqslant 1$, dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on trouve bien $f(x) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt = xf(x-1)$.

d. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction g_x est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)dt > 0$. Ainsi, d'après **a.**, la fonction $h : u \mapsto \ln(f(u))$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on note H une de ses primitives. Comme $\varphi(x) = [H(u)]_{x-1}^{x} = H(x) - H(x-1)$, la fonction φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et on a la relation $\forall x \geqslant 1,\ \varphi'(x) = H'(x) - H'(x-1) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1)) = \ln(x)$ d'après **c.**.

e. D'après la question précédente, $\varphi(x) = \varphi(1) + \displaystyle\int_1^x \varphi'(t)dt = \varphi(1) + \int_1^x \ln(t)dt = \varphi(1) + [t\ln(t) - t]_1^x$ ce qui montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Comme $v_n = \varphi(n)$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et, avec le critère spécial des séries alternées, on conclut à la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$.

8.47 **a.** Soit $x \geqslant 0$, posons $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{x+t}$. Alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et le crochet $[uv]_0^{+\infty}$ converge car $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ puisque $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$. Ainsi les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature. Or uv' est continue en 0 si $x > 0$ et se prolonge par continuité en 0 si $x = 0$ car $u(t)v'(t) = -\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \to -\dfrac{1}{2}$ donc uv' est intégrable sur $]0;1]$. De plus $u(t)v'(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc uv' est intégrable sur $[1;+\infty[$. Par conséquent, uv' est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ converge donc, tout comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt$ (de même nature). De plus, comme le crochet est nul, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt = -\int_0^{+\infty} (1-\cos(t)) \times \left(-\frac{1}{(x+t)^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}dt$.

b. Soit maintenant $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}$.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu avant).
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ |g(x,t)| = g(x,t) \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu avant).

On peut donc conclure par continuité sous le signe somme que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
L'intégrale de Dirichlet est $f(0)$ et vérifie $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

c. Utilisons le théorème de dérivation sous le signe somme deux fois.

- $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir **a.**).
- $\forall x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{2(1-\cos(t))}{(x+t)^3}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{6(1-\cos(t))}{(x+t)^4}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall a > 0,\ \forall (x,t) \in [a;+\infty \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{4}{(a+t)^3} = \varphi_a(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{12}{(a+t)^4} = \psi_a(t)$ et les fonctions φ_a et ψ_a sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ par Riemann.

Ainsi, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2(1-\cos(t))}{(x+t)^3}dt$ et $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{6(1-\cos(t))}{(x+t)^4}dt$.
Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto -\dfrac{1}{3(x+t)^3}$ et $v : t \mapsto 6(1-\cos(t))$, u et v sont de classe C^1

sur $\mathbb{R}_+$ et $u(0)v(0) = \lim_{t\mapsto+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $f''(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(x+t)^3}dt$. On pose cette fois-ci $u : t \mapsto -\frac{1}{2(x+t)^2}$ et $v = \sin$ et, avec les mêmes arguments, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt$. Par conséquent, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1+1}{(x+t)^2}dt = -f(x) + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} = -f(x) + \Big[-\frac{1}{x+t}\Big]_0^{+\infty} = -f(x) + \frac{1}{x}$ ce qui montre que la fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + y = \frac{1}{x}$.

8.48 **a.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ et $g_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$. D'après le critère de Riemann, g_α est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et g_α est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $1+\alpha > 1$. Comme g_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$ et que g_α est positive, $f(\alpha)$ est définie si et seulement si $\alpha \in]0;1[$. Ainsi, $D =]0;1[$.

b. Soit $h :]0;1[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(\alpha,x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$.

(H_1), pour $x > 0$, $\alpha \mapsto h(\alpha,x)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_2), pour $\alpha \in]0;1[$, $g_\alpha : x \mapsto h(\alpha,x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu en **a.**).

(H_3), soit $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b < 1$, $\forall(\alpha,x) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $|h(\alpha,x)| = \frac{x^{-\alpha}}{1+x} \leqslant \frac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0;1]$ et $|h(\alpha,x)| \leqslant \frac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1;+\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(x) = \frac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(x) = \frac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1;+\infty[$. Alors $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec $\varphi_{a,b}(1) = \frac{1}{2}$) et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0;1[$.

c. Dans $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$, on pose $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$ avec φ qui est bien C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour avoir $f(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big)$ donc $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)} = f(1-\alpha)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

d. La symétrie précédente suggère que c'est en $\frac{1}{2}$ que f atteint une valeur particulière, pourquoi pas son minimum. Soit $\alpha \in D$, alors $f(\alpha) = f(1-\alpha) = \frac{f(\alpha)+f(1-\alpha)}{2} = \int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{2x^\alpha(1+x)} + \frac{1}{2x^{1-\alpha}(1+x)}\Big)dx$ par linéarité de l'intégrale. On l'écrit $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-(1/2)} + x^{(1/2)-\alpha}}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$ et on se rappelle de l'inégalité classique $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ de sorte que $f(\alpha) \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = f(0) = \big[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\big]_0^{+\infty} = \pi$. Ainsi, la valeur minimale prise par f sur D est $f(0) = \pi$.

e. Quand α tend vers 0, c'est au voisinage de $+\infty$ qu'il va y avoir un problème. D'après Chasles, on a $f(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ est certainement "de l'ordre" de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ et, comme $\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$, la quantité $f(\alpha)$ se doit d'être assez proche de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}$. Évaluons la différence, $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)}$. Or on peut encadrer $0 \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{1}{1-\alpha}$ et $0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha} \leqslant 1$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \underset{0}{=} O(1)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \underset{0}{=} O(1)$. Par somme, $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \underset{0}{=} O(1) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)$ donc $f(\alpha) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\alpha}$.

8.49 **a.** Soit $h : \mathbb{R}_+ \times [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 h(x,t)dt$.

(H_1) $\forall t \in [0;1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-(1+t^2)x}$.

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont continues donc intégrables sur le segment $[0;1]$.

(H_3) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0;1]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-x} \leqslant 1 = \varphi(t)$ et φ est constante donc intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de dérivabilité sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}dt$.

b. Classiquement, $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, pour $x > 0$, $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant e^{-(1+t^2)x} \leqslant e^{-x}$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-x}dt = e^{-x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'intégration et $h'(x) = e^{-x^2}$. De plus, d'après **a.**, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Ainsi, la fonction $a : x \mapsto g(x) + h(x)^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\forall x \geqslant 0$, $a'(x) = 2xf'(x^2) + 2h'(x)h(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}dt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Si $x = 0$, $a'(0) = 0$ et, si $x > 0$, on a $a'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2x^2}xdt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt - \int_0^1 e^{-t^2x^2}xdt\right)$. Or par le changement de variable $u = xt$, il est clair que $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^1 e^{-t^2x^2}xdt$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $a'(x) = 0$. Comme $a' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $a(x) = g(x) + h(x)^2 = C \geqslant 0$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit $C = g(0) = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ d'après **a.**.

d. Comme f est une fonction positive, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{f(x)^2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - g(x)}$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ainsi, on a la valeur de l'intégrale de GAUSS, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ qu'on note $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.50 **a.** Pour un réel x, la fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $x < 0$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} h_x(t) = +\infty$ donc h_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $x = 0$, $h_0(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ donc h_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car une primitive de h_0 est Arctan qui admet une limite finie en $+\infty$.
- Si $x > 0$, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ou $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de référence.

Ainsi, le domaine de définition de la fonction f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir ci-dessus). De plus, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{te^{-tx}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$. Enfin, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a > 0$ et $(x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a la majoration $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2e^{-at}}{1+t^2} \leqslant e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, par théorème, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}dt$ par LEIBNIZ. Par conséquent, $f''(x)+f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} + \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

c. Les fonctions $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$ est la même, par intégration par parties, que celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$. Or $\frac{\sin(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge, ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$ converge aussi. De même, $u : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{t\to0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge car elle est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ et $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Comme les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt - \int_1^{x} \frac{\cos(t)}{t}dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt - \int_1^{x} \frac{\sin(t)}{t}dt$, il vient $g'(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt\right)\cos(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\sin(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration donc $g'(x) = -\left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt\right)\cos(x) - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\sin(x)$. De même, g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g''(x) = \frac{\cos^2(x)}{x} + \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt\right)\sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{x} - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\cos(x)$ donc $g''(x) = \frac{1}{x} - g(x)$ car $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$. Par conséquent, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E) \ : \ y''+y = \frac{1}{x}$.

e. $h = f-g$ est C^2 par opérations et $h''(x) = f''(x)-g''(x) = -f(x)+\frac{1}{x}+g(x)-\frac{1}{x} = -(f-g)(x) = -h(x)$ donc $h''+h = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait qu'alors $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ h(x) = A\cos(x)+B\sin(x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x+\theta)$. Or $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$ car $0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En tant que "reste" d'intégrales convergentes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = 0$ donc, comme $\cos$ et $\sin$ sont bornées, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ce qui impose $\sqrt{A^2+B^2} = 0$ donc $A = B = 0$. On déduit donc $f = g$ du fait que $h = 0$.

f. Avec les notations de la question **b.**, comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |h(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et que ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ par continuité sous le signe somme car $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $f(0) = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

En écrivant $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt + \int_x^{1} \frac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt + \int_x^{1} \frac{\cos(t)-1}{t}dt + \int_x^{1} \frac{1}{t}dt$, comme $\int_x^{1} \frac{\cos(t)-1}{t}dt \underset{0}{=} O(1)$ car $t \mapsto \frac{\cos(t)-1}{t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Avec l'intégration par parties de **c.**, on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}dt$. On pose $t = 2u$ dans cette dernière intégrale, facile à justifier, et on a $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(u)}{4u^2}(2du)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}dt=\frac{\pi}{2}$.

8.51 **a.** Si $x\in\mathbb{R}$, $g_x : t\mapsto\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t)\underset{+\infty}{\sim}te^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x\leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-xt}=+\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x>0$, par croissances comparées, $g_x(t)\underset{+\infty}{\sim}te^{-xt}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty}g_x(t)dt$ converge et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D=\mathbb{R}_+^*$. Pour $0<x<y$, on a $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ e^{-xt}\geqslant e^{-yt}$ donc $g_x(t)\geqslant g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x)\geqslant f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $h:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $h(x,t)=\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x)=\int_0^{+\infty}h(x,t)dt$.

(H_1) Pout $t\geqslant 0$, la fonction $x\mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x>0$, la fonction $g_x : t\mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t\mapsto\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\frac{-t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a>0$, $(x,t)\in[a;+\infty[\times\mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}\leqslant t^2e^{-at}=\varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a>0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la formule de Leibniz, $\forall x>0,\ f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$. Pour $0<x<y$, on a $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ e^{-xt}\geqslant e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\leqslant\frac{\partial h}{\partial x}(y,t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x)\leqslant f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc conclure d'après le cours que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, $0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}te^{-xt}dt=\left[-t\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x}dt=\left[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x^2}$ par intégration par parties avec $u:t\mapsto t$ et $v:t\mapsto-\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)v(t)=0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

d. La fonction $t\mapsto t^3e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^3e^{-xt}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $x>0$. Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t=\frac{u}{x}=\varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et avoir $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{u^3}{x^4}e^{-u}du=\frac{\Gamma(4)}{x^4}=\frac{3!}{x^4}=\frac{6}{x^4}$.

Pour $x>0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x)-g(x)|=\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}-t^3e^{-xt}\right)dt\right|$ qu'on écrit aussi $|f(x)-g(x)|=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(\frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt$ et, avec la quantité conjuguée, $|f(x)-g(x)|=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(\frac{(1+t^4)-1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\right)dt=\int_0^{+\infty}t^7e^{-xt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\right)dt$. Or on minore $\forall t\geqslant 0,\ \sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})\geqslant 1$ donc $|f(x)-g(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}t^7e^{-xt}dt=\frac{\Gamma(8)}{x^8}=\frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus. On a donc $f(x)-g(x)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^8}\right)\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^4}\right)\underset{+\infty}{=}o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x)\underset{+\infty}{\sim}g(x)=\frac{6}{x^4}$.

e. Méthode 1 : pour $x \in]0;1]$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^{1/x} h(x,t)dt + \int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt \geqslant \int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt$. Or, on a $\int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty} te^{-xt}dt$ car $\sqrt{1+t^4} \leqslant \sqrt{2}\,t^2$ pour $t \in [1/x;+\infty[\subset [1;+\infty[$, d'où $\sqrt{2}\int_{1/x}^{+\infty} h(x,t)dt \geqslant \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_{1/x}^{+\infty} + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt = \frac{1}{ex^2} + \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_{1/x}^{+\infty} = \frac{2}{ex^2}$ avec la même intégration par parties qu'à la question **c.**. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{ex^2} = +\infty$, par encadrement, on obtient finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Méthode 2 : pour $x > 0$, par CHASLES, $f(x) = \int_0^1 h(x,t)dt + \int_1 +\infty h(x,t)dt \geqslant \int_1^{+\infty} h(x,t)dt$. Or, on a $\int_1^{+\infty} h(x,t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty} \frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt$ car $\forall t \geqslant 1,\ 1+t^4 \leqslant 2t^4$. Ainsi, comme $\int_1^{+\infty} te^{-xt}dt = \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}dt = \frac{e^{-x}}{x} + \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_1^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}$, et que l'on a la limite $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2}\right) = +\infty$, par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pour aller plus loin, avec le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{x}$ avec la fonction φ qui est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}du$ donc la relation $x^2f(x) = \int_0^{+\infty} a(x,u)du$ en posant $a(x,u) = \frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}$.

(H_1) Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} a(x,u) = ue^{-u} = b(u)$.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto a(x,u)$ et $u \mapsto b(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $|a(x,u)| = \left|\frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}\right| \leqslant ue^{-u} = b(u)$ avec b continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme avant.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2f(x) = \int_0^{+\infty} b(u)du = \Gamma(2) = 1$. Par conséquent, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

8.52 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$. D'après RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $x < 1$ et g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $1+x > 1$. Ainsi, g_x étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \in]0;1[$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D =]0;1[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes.

b. Soit $h :]0;1[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x,t)dt$.

(H_1) pour $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_2) pour $x \in]0;1[$, $t \mapsto h(x,t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

(H_3) soit $0 < a < b < 1$, $\forall (x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $|h(x,t)| = \frac{t^{-x}}{1+t} \leqslant \frac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0;1]$ et $|h(x,t)| \leqslant \frac{t^{-a}}{1+t}$ si $t \in [1;+\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(t) = \frac{t^{-b}}{1+t}$ si $t \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = \frac{t^{-a}}{1+t}$ si $t \in [1;+\infty[$ et $\forall (x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $|h(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ d'après ce qui précède. La fonction $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec $\varphi_{a,b}(1) = \frac{1}{2}$) et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^b}$ avec $b < 1$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{a+1}}$ avec $1+a > 1$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0;1[$.

c. Si $x \in]0;1[$, on a clairement $1-x \in]0;1[$. De plus, en effectuant dans $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ le changement de variable $t = \dfrac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ est de classe C^1, bijective et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{1}{u^{-x}(1+u^{-1})}\Big(-\frac{du}{u^2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-x}(1+u)} = f(1-x)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. De plus, $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \Big[2\,\text{Arctan}(\sqrt{x})\Big]_0^{+\infty} = \pi$.

d. Méthode 1 : quand x tend vers 0, c'est au voisinage de $t = +\infty$ qu'il va y avoir un problème et que l'intégrale va être grande. Or $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc on approche $f(x)$ par $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}$. Évaluons la différence entre ces quantités, $f(x) - \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)}$.
Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{1}{1-x}$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2+x}} = \frac{1}{1+x} \leqslant 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} \underset{0}{=} O(1)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}(1+t)} \underset{0}{=} O(1)$. Par somme : $f(x) - \dfrac{1}{x} \underset{0}{=} O(1) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Méthode 2 : on pouvait aussi poser $t = u^{1/x} = \varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1 et une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a la relation $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}du$. Soit $a :]0;1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $a(x,u) = \dfrac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}$ de sorte que $xf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} a(x,u)du$.

- (H_1) si $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} a(x,u) = d(u)$ avec $d(u) = 0$ si $u < 0$, $d(u) = \dfrac{1}{2}$ si $u = 1$ et $d(u) = \dfrac{1}{u^2}$ si $u > 1$.
- (H_2) si $x \in]0;1[$, les fonctions $g_x : t \mapsto g(x,t)$ et d sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_3) si $(x,u) \in]0;1[\times \mathbb{R}_+^*$, on a $|a(x,u)| \leqslant \varphi(u)$ avec $\varphi(u) = 1$ si $u < 1$, $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\varphi(u) = \dfrac{1}{u^2}$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par Riemann.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xf(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} a(x,u)du$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xf(x) = \int_0^{+\infty} d(u)du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \Big[-\frac{1}{u}\Big]_0^{+\infty} = 1$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

8.53 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ avec un prolongement par continuité $f_x(0) = x$ en 0 car $\text{Arctan}(xt) \underset{0}{\sim} xt$ si $x \neq 0$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^3}\Big)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann ($3 > 1$). Ainsi, g est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

- (H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.
- (H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).
- (H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\Big|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| = \Big|\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\Big| \leqslant \varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq \pm 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2(1+t^2)-(1+x^2t^2)}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ en réduisant au même dénominateur, $\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)}+\dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}=\dfrac{x^2-1}{(x^2-1)(1+t^2)(1+x^2t^2)}=\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.

d. Si on prend $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, d'après **c.**, $g'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)}+\frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\right)dt$ donc $g'(x)=\dfrac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty}+\dfrac{1}{(1-x^2)}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty}$ et, comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{Arctan}(xt)=\frac{\pi}{2}$, cela donne $g'(x)=\dfrac{x\pi}{2(x^2-1)}+\dfrac{\pi}{2(1-x^2)}=\dfrac{(x-1)\pi}{2(x^2-1)}=\dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme la fonction g' est continue en 1 d'après **b.**, on a $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}g'(x)=\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2(1+1)}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x)=\dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x)=\dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}+\lambda$. Or $g(0)=0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x)=\dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}$.

e. Par imparité de F, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ g(x)=-g(-x)=-\dfrac{\pi\ln(1-x)}{2}$ d'après **d.**.

8.54 Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0)=x$ car $\sin(xt)\underset{0}{=}xt+o(t)$ donc $h_x(t)\underset{0}{=}x+o(1)$ et $h_x(t)\underset{+\infty}{=}o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison à des intégrales de référence. Ainsi, la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit l'application $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t)=e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$.

(H_1) Pour tout $t>0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\cos(xt)e^{-t}$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=|\cos(xt)|e^{-t} \leqslant e^{-t}=\psi(t)$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, avec la formule de Leibniz, il vient $\varphi'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{ixt-t}dt\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right)=\frac{1}{1+x^2}$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ implique l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=C+\mathrm{Arctan}(x)$. Or $g(0)=0$, d'ailleurs g est clairement impaire, donc $C=0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=\mathrm{Arctan}(x)$.

8.55 **a.** Clairement, la fonction f_x est continue sur $]0;1[$ et elle est de signe constant sur $]0;1[$: f_x est positive si $x<0$ et f_x est négative si $x>0$. De plus, si $x \neq 0$, comme $t^x-1=e^{x\ln(t)}-1$ et que $\lim\limits_{t\to1^-}\ln(t)=0$, on a $t^x-1\underset{1^-}{\sim}x\ln(t)$ donc $f_x(t)\underset{1^-}{\sim}x$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1)=x$. Ainsi, la fonction f_x est toujours intégrable sur le segment $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

- Si $x=0$, alors $f_0=0$ donc f_0 est intégrable sur $]0;1]$.
- Si $x>0$, $f_x(t)\underset{0}{\sim}-\dfrac{1}{\ln(t)}$ et $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{\ln(t)}=0$ donc f_x se prolonge par continuité en 0 en posant $f_x(0)=0$. f_x est donc intégrable car elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.
- Si $x<0$, $f_x(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{t^{-x}\ln(t)}$ donc $f_x(t)\underset{0}{=}o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$ car $\lim\limits_{t\to0^+}\ln(t)=-\infty$ et, d'après Riemann, f_x est intégrable sur $]0;1]$ car $-x<1$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $]0;1]$ pour tout réel $x \in D$.

b. Soit $g : D\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t)=\dfrac{t^x-1}{\ln(t)}$. Alors :

(H_1) $\forall t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur D.

(H_2) $\forall x \in D$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = t^x$ est continue sur $]0;1[$.

(H_3) Soit $a \in D$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = t^x \leqslant t^a = \varphi_a(t)$ et φ_a intégrable sur $]0;1[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur D et $\forall x > -1,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.
Comme D est un intervalle et que $f(0) = 0$, en intégrant, on a donc $\forall x > -1,\ f(x) = \ln(1+x)$.

8.56 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{x^2} \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ par croissances comparées et $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{3/2}}\Big)$ donc f_x est intégrable sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, $F(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction F est bien définie.
Soit $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2}$.

(H_1) $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{2x\ln(t)}{(x^2+t^2)^2}$.

(H_2) $\forall x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après ce qui précède et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x|\ln(t)|}{(x^2+t^2)^2} \leqslant \dfrac{2b|\ln(t)|}{(a^2+t^2)^2} = \varphi_{a,b}(t)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{2b|\ln(t)|}{a^4} \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2b|\ln(t)|}{t^4} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Dans $F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}du$, on effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t} = \psi(t)$ avec ψ qui est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour avoir $F(1) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/t)}{1+(1/t)^2}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big)$ donc $F(1) = -F(1)$ et $F(1) = 0$.

<u>Méthode 1</u> : par la formule de Leibniz et **a.**, on obtient $\forall x > 0$, $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x\ln(t)}{(x^2+t^2)^2}dt$ qu'on écrit $F'(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{-2t}{(x^2+t^2)^2}dt$ et on pose $u : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{x^2+t^2} - \dfrac{1}{x^2}$ (pour que la fonction v s'annule en 0) de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$.
Comme $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^3}$ et $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{-t\ln(t)}{x^2}$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées ce qui montre, par intégration par parties, que $F'(x) = x[u(t)v(t)]_0^{+\infty} - x\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ qu'on écrit $F'(x) = -x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\ln(t)}{t^2} \times \frac{-t^2}{x^2(x^2+t^2)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\ln(t)}{x(x^2+t^2)}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} - \frac{F(x)}{x}$ (les deux intégrales convergent). De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} = \Big[\frac{1}{x}\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{t}{x}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$ donc $\forall x > 0$, $F'(x) + \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{\pi}{2x^2}$.
On résout cette équation différentielle classiquement par variation de la constante pour avoir l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ F(x) = \dfrac{\pi\ln(x)}{2x} + \dfrac{\lambda}{x}$. Or $F(1) = 0$ donc $\lambda = 0$ et on a $\forall x > 0,\ F(x) = \dfrac{\pi\ln(x)}{2x}$.

<u>Méthode 2</u> : pour $x > 0$, on effectue le changement de variable $t = ux = \varphi(u)$ avec φ qui est bien une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a donc $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+x^2u^2}x du$ d'où la relation $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(1+u^2)}du$ (les deux intégrales convergent comme en **a.**) de sorte que $F(x) = \dfrac{F(1)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}[\mathrm{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \dfrac{F(1)}{x} + \dfrac{\pi\ln(x)}{2x}$. Ceci prouve aussi que la fonction F est de

classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ sans théorème de dérivation mais ce n'est pas l'esprit de l'exercice. Comme $F(1) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0,\ F(x) = \dfrac{\pi \ln(x)}{2x}$.

8.57 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 donné par $f_x(0) = x$ car $\mathrm{Arctan}(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $f_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $3 > 1$. F est donc définie sur $D = \mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

(H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).

(H_3) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in [-a;a]$ et $t > 0$, $\left|f(x,t)\right| = \dfrac{|\mathrm{Arctan}(xt)|}{t} \times \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \varphi_a(t) = \dfrac{a}{1+t^2}$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car Arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car $0 \leqslant \mathrm{Arctan}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ donc $|\mathrm{Arctan}(xt)| = |\mathrm{Arctan}(xt) - \mathrm{Arctan}(0)| \leqslant 1 \times |xt - 0| = |x|t \leqslant at$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, F est continue sur $\mathbb{R}$.

b. On souhaite maintenant dériver.

(H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \psi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme φ_a ci-dessus.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq 1$, $x > 0$, on décompose $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ en éléments simples donc $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\right)$ et comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Arctan}(xt) = \dfrac{\pi}{2}$, cela donne $F'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{(1-x^2)}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{x\pi}{2(x^2-1)} + \dfrac{\pi}{2(1-x^2)} = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme F' est continue en 1, on a $F'(1) = \displaystyle\lim_{x\to1} F'(x) = \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2(1+1)}$. Ainsi, la relation $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En intégrant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{2} + C$. Comme F est continue en 0 d'après **a.** et que $F(0) = 0$, on a $F(0) = 0 = \displaystyle\lim_{x\to0^+} F(x) = \dfrac{\pi\ln(1+0)}{2} + C = C$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}$ et, par imparité de F, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{sgn}(x)\dfrac{\pi\ln(1+|x|)}{2}$.

8.58 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 donné par $f_x(0) = x$ car $\mathrm{Arctan}(xt) \underset{0}{\sim} xt + o(t)$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN $(2 > 1)$. F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. On va utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ si $t > 0$ et $f(x,0) = x$.

(H$_1$) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H$_2$) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (déjà vu).

(H$_3$) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ et la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Par le fameux théorème, F est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x > 0$ et $x \neq 1$, on décompose $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ en éléments simples donc $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\right)$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne $F'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\Big[\text{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{1-x^2}\Big[\text{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty}$ d'où $F'(x) = \dfrac{x\pi}{2(x^2-1)} + \dfrac{\pi}{2(1-x^2)} = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme F' est continue en 0 et en 1 d'après **b.**, on a $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} F'(x) = \frac{\pi}{2}$ et $F'(1) = \lim\limits_{x\to 1} F'(x) = \frac{\pi}{4}$ ce qui montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, en intégrant, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \dfrac{\pi\ln(1+x)}{2} + \lambda$. Mais $F(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}$. Puisque F est impaire, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ F(x) = -F(-x) = -\dfrac{\pi\ln(1-x)}{2}$, ce qu'on peut résumer en $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \text{sgn}(x)\dfrac{\pi\ln(1+|x|)}{2}$.

d. La fonction $h : \theta \mapsto \ln\big(\sin(\theta)\big)$ est continue sur l'intervalle $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et, comme $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$, on a $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \ln\left(\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}\right) = 1$ donc $\ln\big(\sin(\theta)\big) \underset{0}{=} \ln(\theta) + o(1)$ ce qui implique que $\ln\big(\sin(\theta)\big) \underset{0}{=} \ln(\theta) + o\big(\ln(\theta)\big)$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln(\theta) = -\infty$ d'où $h(\theta) \underset{0}{\sim} \ln(\theta) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$ donc h est intégrable sur I par comparaison aux intégrales de RIEMANN donc J existe. On pose $t = \tan(\theta)$, ou $\theta = \text{Arctan}(t) = \psi(t)$ avec ψ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \times \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$. Posons maintenant $u : t \mapsto \ln\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ et $v : t \mapsto \text{Arctan}(t)$, u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ et $v(t) \underset{0}{\sim} t$ donc $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} t\ln(t)$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 1$ car $\sqrt{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Par intégration par parties, comme $u(t) = \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ donc $u'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{1}{t(1+t^2)}$, on a $J = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t(1+t^2)} dt = -F(1) = -\frac{\pi\ln(2)}{2} \sim -1{,}09$ d'après **c.**.

8.59 **a.** Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, comme $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) > 0$ car $\sin(\theta) > 0$ si $\theta \in]0;\pi[$ et que $(x - \cos(\theta))^2 > 0$ si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ car $x \neq \pm 1$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc $I(x)$ existe.

b. Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $(x-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = (x - \cos(\theta) - i\sin(\theta))(x - \cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |x - e^{i\theta}|^2$ pour $\theta \in [0;\pi]$ donc $f_x(\theta) = 2\ln(|x - e^{i\theta}|)$ de sorte que, par linéarité de l'intégrale, $I(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\theta}|\right) d\theta$.

c. Par propriété du logarithme, on a $S_n(x) = \dfrac{2\pi}{n} \ln\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} |x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|\right) = \dfrac{\pi}{n} \ln\left(\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right|^2\right)$ donc

$S_n(x)=\frac{\pi}{n}\ln\left((x-1)^2\left|\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(x-e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)\right|\right)=\frac{\pi}{n}\ln\left((x-1)^2\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{2n-1}\left(x-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right|\right)$. Or on connaît les $2n$ racines distinctes de $X^{2n}-1$ qui sont les éléments de $\mathbb{U}_{2n}=\left\{e^{\frac{ik\pi}{n}}\mid k\in[\![0;2n-1]\!]\right\}$, ainsi on factorise $X^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}\left(X-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$. Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n(x)=\frac{\pi}{n}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(x)=\frac{\pi-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f_x\left(0+\frac{k(\pi-0)}{n}\right)$ associée à la fonction f_x continue sur le segment $[0;\pi]$. D'après le cours, $\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=\int_0^\pi f_x(\theta)d\theta$. Or, avec la question **b.**, on a $R_n(x)=\frac{\pi-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(|x-e^{\frac{ik\pi}{n}}|^2\right)$ donc $R_n(x)=S_n(x)$ et $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\int_0^\pi\ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)d\theta=I(x)$.

- Si $|x|<1$, $\lim_{n\to+\infty}x^{2n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)=\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$ ce qui montre avec ce qui précède (pas d'indétermination) que $\lim_{n\to+\infty}\frac{2\pi}{n}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)=0$ d'où $I(x)=0$.
- Si $|x|>1$, on a $S_n(x)=\frac{\pi}{n}\ln\left(|x|^{2n}.|1-x^{-2n}|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)=2\pi\ln(|x|)+\frac{\pi}{n}\ln\left(|1-x^{-2n}|\right)+\frac{\pi}{n}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$ et, avec les mêmes arguments, $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=2\pi\ln(|x|)$ donc $I(x)=2\pi\ln(|x|)$.

d. Soit $h:\left(\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\right)\times[0;\pi]\to\mathbb{R}$ définie par la relation $h(x,\theta)=\ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)$ de sorte que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I(x)=\int_0^\pi h(x,\theta)d\theta$.

(H_1) $\forall\theta\in[0;\pi]$, la fonction $x\mapsto h(x,\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(H_2) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, la fonction $f_x:\theta\mapsto h(x,\theta)$ est continue et intégrable sur $[0;\pi]$ (on l'a vu en question **a.**) et $\theta\mapsto\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)=\frac{2(x-\cos(\theta))}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$ est continue sur $[0;\pi]$.

(H_3) - Soit $x\in[a;b]\subset]1;+\infty[$ et $\theta\in[0;\pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right|=\frac{2(x-\cos(\theta))}{|x-e^{i\theta}|^2}\leqslant\frac{2(b+1)}{(a-1)^2}=\varphi_{a,b}(\theta)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;\pi]$.

- Soit $x\in[a;b]\subset]-\infty;-1[$ et $\theta\in[0;\pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right|=\frac{2(\cos(\theta)-x)}{|x-e^{i\theta}|^2}\leqslant\frac{2(-a+1)}{(b-1)^2}=\psi_{a,b}(\theta)$ et $\psi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;\pi]$.
- Soit $x\in[-a;a]\subset]-1;1[$ et $\theta\in[0;\pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right|=\frac{2|x-\cos(\theta)|}{|x-e^{i\theta}|^2}\leqslant\frac{2(a+1)}{(1-a)^2}=\Theta_a(\theta)$ et Θ_a est continue donc intégrable sur le segment $[0;\pi]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et, d'après la formule de LEIBNIZ, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I'(x)=\int_0^\pi\frac{2(x-\cos(\theta))}{x^2-2x\cos(\theta)+1}d\theta$.

On pose $\theta=2\,\mathrm{Arctan}(u)=\varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $[0;+\infty[$ dans $[0;\pi[$ et, par changement de variable, comme $\cos(\theta)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\varphi'(u)=\frac{2}{1+u^2}$, on obtient la relation $I'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2(x(1+u^2)-(1-u^2))}{(1+x^2)(1+u^2)-2x(1-u^2)}\left(\frac{2}{1+u^2}\right)du=4\int_0^{+\infty}\frac{(x-1)+(x+1)u^2}{(1+u^2)((x-1)^2+(1+x)^2u^2)}du$. Pour $x\neq0$, on décompose $\frac{(x-1)+(x+1)U}{(1+U)((x-1)^2+(1+x)^2U)}=\frac{\alpha}{1+U}+\frac{\beta}{(x-1)^2+(1+x)^2U}$ en éléments simples et, classiquement, $\alpha=\frac{1}{2x}$ et $\beta=\frac{x^2-1}{2x}$. Ainsi, $I'(x)=\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}+\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2+(1+x)^2u^2}\right)du$. Les deux intégrales convergent donc, par linéarité, on a $I'(x)=\frac{2}{x}\Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big]_0^{+\infty}+\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}+\frac{\frac{x+1}{x-1}}{1+\left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right)^2}du$ donc

$I'(x) = \frac{2}{x}\Big[\operatorname{Arctan}(u)\Big]_0^{+\infty} + \frac{2}{x}\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{(x+1)u}{x-1}\Big)\Big]_0^{+\infty}$.

- Si $|x| > 1$, $\frac{x+1}{x-1} > 0$ donc $\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{(x+1)u}{x-1}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x) = \frac{2\pi}{x}$.
- Si $|x| < 1$ et $x \neq 0$, $\frac{x+1}{x-1} < 0$ donc $\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{(x+1)u}{x-1}\Big)\Big]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x) = 0$. Par continuité de I' en 0, on a aussi $I'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} I'(x) = 0$ donc $\forall x \in]-1;1[,\ I'(x) = 0$.

En intégrant sur les trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$, il existe trois constantes C_1, C_2, C_3 réelles telles que $\forall x \in]-\infty;-1[,\ I(x) = 2\pi\ln(|x|)+C_1$, $\forall x \in]-\infty;-1[,\ I(x) = C_2$ et $\forall x \in]1;+\infty[,\ I(x) = 2\pi\ln(x)+C_3$. Comme $I(0) = 0$, on a $C_2 = 0$. Pour $|x| > 1$, on a $I(x) - 2\pi\ln(|x|) = \int_0^{\pi}\big(\ln(x^2-2x\cos(\theta)+1) - \ln(|x|^2)\big)d\theta$. Ainsi, $I(x) - 2\pi\ln(|x|) = \int_0^{\pi}\ln\Big(1 - \frac{2\cos(\theta)}{x} + \frac{1}{x^2}\Big)d\theta = I\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0$ donc $I(x) = 2\pi\ln(|x|)$ ce qui montre que $C_1 = C_3 = 0$. On retrouve, comme avant, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I(x) = 2\pi\ln(|x|)$ si $|x| < 1$ et $I(x) = 0$ si $|x| < 1$.

8.60 **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x \leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-xt} = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x > 0$, par croissances comparées, $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ converge et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D = \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ donc $g_x(t) \geqslant g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x,t)dt$.

(H_1) Pout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x > 0$, la fonction $g_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a > 0$, $(x,t) \in [a;+\infty[\times\mathbb{R}_+$, $\Big|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\Big| = \frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant t^2e^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a > 0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la formule de Leibniz, $\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$. Pour $0 < x < y$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \leqslant \frac{\partial h}{\partial x}(y,t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x) \leqslant f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc conclure d'après le cours que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-xt}dt = \Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x}dt = \Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$ par intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)v(t) = 0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d. La fonction $t \mapsto t^3e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^3e^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées car $x > 0$. Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et avoir $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{u^3}{x^4}e^{-u}du=\frac{\Gamma(4)}{x^4}=\frac{3!}{x^4}=\frac{6}{x^4}$.

Pour $x>0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x)-g(x)|=\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}-t^3e^{-xt}\right)dt\right|$ qu'on écrit aussi $|f(x)-g(x)|=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(\frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt$ et, avec la quantité conjuguée, $|f(x)-g(x)|=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(\frac{(1+t^4)-1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\right)dt=\int_0^{+\infty}t^7e^{-xt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\right)dt$. Or on minore $\forall t\geqslant 0$, $\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})\geqslant 1$ donc $|f(x)-g(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}t^7e^{-xt}dt=\frac{\Gamma(8)}{x^8}=\frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus. On a donc $f(x)-g(x)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^8}\right)\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^4}\right)\underset{+\infty}{=}o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x)\underset{+\infty}{\sim}g(x)=\frac{6}{x^4}$.

e. <u>Méthode 1</u> : pour $x\in]0;1]$, par Chasles, $f(x)=\int_0^{1/x}h(x,t)dt+\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt\geqslant\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt$. Or, on a $\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt=\int_{1/x}^{+\infty}\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty}\frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty}te^{-xt}dt$ car $\sqrt{1+t^4}\leqslant\sqrt{2}\,t^2$ pour $t\in[1/x;+\infty[\subset[1;+\infty[$, d'où $\sqrt{2}\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt\geqslant\left[-t\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{1/x}^{+\infty}+\int_{1/x}^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x}dt=\frac{1}{ex^2}+\left[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\right]_{1/x}^{+\infty}=\frac{2}{ex^2}$ avec la même intégration par parties qu'à la question **c.**. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{ex^2}=+\infty$, par encadrement, on obtient finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

<u>Méthode 2</u> : pour $x>0$, par Chasles, $f(x)=\int_0^1 h(x,t)dt+\int_1+\infty h(x,t)dt\geqslant\int_1^{+\infty}h(x,t)dt$. Or, on a $\int_1^{+\infty}h(x,t)dt=\int_1^{+\infty}\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty}\frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt$ car $\forall t\geqslant 1$, $1+t^4\leqslant 2t^4$. Ainsi, comme $\int_1^{+\infty}te^{-xt}dt=\left[-t\frac{e^{-xt}}{x}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x}dt=\frac{e^{-x}}{x}+\left[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\right]_1^{+\infty}=\frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^{-x}}{x^2}$, et que l'on a la limite $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)=+\infty$, par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

<u>Pour aller plus loin</u>, avec le changement de variable $t=\varphi(u)=\frac{u}{x}$ avec la fonction φ qui est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $f(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}du$ donc la relation $x^2f(x)=\int_0^{+\infty}a(x,u)du$ en posant $a(x,u)=\frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}$.

- (H_1) Pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{x\to0^+}a(x,u)=ue^{-u}=b(u)$.
- (H_2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $u\mapsto a(x,u)$ et $u\mapsto b(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- (H_3) Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $u\in\mathbb{R}_+$, $|a(x,u)|=\left|\frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}\right|\leqslant ue^{-u}=b(u)$ avec b continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme avant.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim\limits_{x\to0^+}x^2f(x)=\int_0^{+\infty}b(u)du=\Gamma(2)=1$. Par conséquent, $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

8.61 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}$, soit $g_x:]0;1[\to\mathbb{R}$ définie par $g_x(t)=|\ln(t)|^x=e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. La fonction g_x est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $\ln(t)\underset{1^-}{\sim}t-1$, on a $g_x(t)\underset{1^-}{\sim}(1-t)^x=\frac{1}{(1-t)^{-x}}$. Traitons plusieurs cas :

- Si $x<0$, $\lim\limits_{t\to0^+}|\ln(t)|=+\infty$ donc $\lim\limits_{t\to0^+}g_x(t)=0$ et g_x se prolonge par continuité en 0 avec $g_x(0)=0$.
- Si $x\geqslant 0$, par croissances comparées, $g_x(t)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc g_x est intégrable en 0.

• Comme $g_x(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^x = \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_x est intégrable en 1 si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$.

Ainsi, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $x > -1$. Comme la fonction g_x est positive sur $]0;1[$, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $\int_0^1 g_x$ converge. Par conséquent, $D =]-1;+\infty[$.

b. Posons $g :]1;+\infty[\times]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = |\ln(t)|^x = e^{x\ln(|\ln(t)|)}$ de sorte que $f(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$.

(H_1) Pour $t \in]0;1[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^∞ sur D et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k g(x,t)$.

(H_2) Pour $x \in D$, $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après **a.**.

(H_3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_4) Pour $[a;b] \subset D$, $t \in]0;1[$ et $x \in [a;b]$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. Comme on a $\ln(|\ln(t)|) \leqslant 0 \iff t > \dfrac{1}{e}$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ en définissant $\varphi_{k,a,b} :]0;1[\to \mathbb{R}_+$ par $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{b\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \leqslant \dfrac{1}{e}$ et $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{a\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \geqslant \dfrac{1}{e}$. La fonction $\varphi_{k,a,b}$ est continue par morceaux sur $]0;1[$ et elle y est intégrable car on a comme à la question **a.** $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ par croissances comparées et $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k}{(1-t)^{-b}}$ d'où $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\big|\ln(1-t)\big|^k}{(1-t)^{-b}} \underset{1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{1-b}{2}}}\right)$ par croissances comparées et $\dfrac{1-b}{2} < 1$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^∞ sur D et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in D$, on a $f^{(k)}(x) = \int_0^1 \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k e^{x\ln(|\ln(t)|)}dt$.

c. Pour $x > -1$, dans l'expression de $f(x)$, on pose $t = e^{-u} = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$ et, par changement de variable, $f(x) = \int_{+\infty}^0 e^{x\ln(u)}(-e^{-u})du$ donc $f(x) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u}du = \Gamma(x+1)$. Ainsi, comme on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = (n+1-1)! = n!$ (puisque par intégration par parties, on montre que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n!$.

8.62 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = x$ car $\sin(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} \dfrac{(1+o(1))(xt+o(t))}{t} \underset{0}{=} x + o(1)$. De plus, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison. Ainsi la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$ de sorte que $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$.

(H_1) pour $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) pour $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Soit $a > 0$, $\forall (x,t) \in [-a;a]\times\mathbb{R}_+^*$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{e^{-t}|x|t}{t} = |x|e^{-t} \leqslant ae^{-t} = \varphi_a(t)$ car $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et φ_a est continue et clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, φ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

Utilisons maintenant le théorème de dérivation sous le signe somme :

(H_1) pour $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H2) pour $x \in \mathbb{R}$, $h_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.

(H3) $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t} = \psi(t)$ et ψ est continue et clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Avec Leibniz, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{ixt-t}\right)dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t}dt\right)$ donc on a $\varphi'(x) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+ix}{(1-ix)(1+ix)}\right) = \frac{1}{1+x^2}$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ implique l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = C + \mathrm{Arctan}(x)$. Or φ est clairement impaire et $\varphi(0) = 0$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

8.63 **a.** Pour $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle vérifie $f_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc f_x est intégrable en 0 par comparaison aux intégrales de Riemann et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_x est aussi intégrable en $+\infty$ toujours par critère de Riemann. Ainsi, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\Gamma(x)$ existe : Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f_x est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) \geqslant 0$.

De plus, si on avait $\Gamma(x) = 0$, comme f_x est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait $f_x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui est absurde car f_x reste strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$:

(H1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H2) Pour $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir).

(H3) Pour $x > 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)t^{x-1}e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H4) Pour $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a;b]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ avec $\varphi_{a,b}(t) = (\ln(t))^2 t^{a-1}e^{-t}$ si $t \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(t) = (\ln(t))^2 t^{b-1}e^{-t}$ si $t \in [1;+\infty[$ et $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $\varphi_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} (\ln(t))^2 t^{a-1} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ avec $1 - \frac{a}{2} < 1$ et $\varphi_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o(t^b e^{-t}) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a les expressions des dérivées $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Γ est de classe C^2 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la question **a.**, $\forall x > 0$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt \geqslant 0$ donc, d'après le cours, Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, comme Γ et $\ln$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, $g = \ln \circ \Gamma$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ donc $g''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma^2(x)}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, comme $|\Gamma'(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |\ln(t)|t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{|\ln(t)|t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}} \times \sqrt{t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}}dt$, on a par inégalité triangulaire $|\Gamma'(x)|^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{|\ln(t)|t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}}\right)^2 dt\right) \times \left(\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}}\right)^2 dt\right)$ ce qui donne $|\Gamma'(x)|^2 = \Gamma'(x)^2 \leqslant \Gamma''(x) \times \Gamma(x)$ puis $g'(x) \geqslant 0$. Ainsi, $g = \ln \circ \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $g_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ si $t \in [0;n]$ et $g_n(t) = 0$ si $t > n$. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc g_n est intégrable en 0 donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN car g_n est nulle au voisinage de $+\infty$. De plus, on a $J_n = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

(H_1) La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ car $g_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)$ dès que $n \geqslant t$, que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) = -t$ puisque $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.

(H_2) Les fonctions g_n et la fonction f_x sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, si $t \leqslant n$, $|g_n(t)| = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leqslant f_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$ car $\exp$ est croissante et que, par concavité de $\ln$, on a $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$. De plus, f_x est bien continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

d. Dans l'intégrale convergente $\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$, on pose $t = nu = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0;1]$ dans $]0;n]$ et on a $J_n = \int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n n du$ par changement de variable donc $J_n = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

e. Posons $K_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ (elle existe même si $n = 0$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, dans l'intégrale $K_n(x)$, on pose $a : u \mapsto \frac{u^x}{x}$ et $b : u \mapsto (1-u)^n$ de sorte que a et b sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et que $a(1)b(1) = \lim\limits_{u\to0^+} a(u)b(u) = 0$ car $x > 0$. Par intégration par parties, on a donc $K_n(x) = -\int_0^1 \frac{u^x}{x}(-n(1-u)^{n-1})du = \frac{n}{x}K_{n-1}(x+1)$. Par une récurrence facile, comme $K_0(x) = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$, on a $K_n(x) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} \times \cdots \times \frac{1}{x+n-1} \times K_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$. Ainsi, comme $J_n = n^x K_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$ avec **d.** et que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ avec **c.**, on obtient la relation $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ pour tout $x > 0$.

8.64 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$, la fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t}$. De plus, comme $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$, on a $\lim\limits_{t\to0^+} f_x(t) = 1$ quelle que soit la valeur de x ce qui fait que f_x est toujours intégrable en 0^+.

- Si $x \leqslant -1$, on a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f_x(t) = +\infty$ et f_x n'est donc pas intégrable en $+\infty$.
- Si $x > -1$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_x est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > -1$, et comme f_x est positive, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si $x > -1$. Par conséquent, le domaine de définition D de f est $D =]-1;+\infty[$.

b. <u>Méthode 1</u> : la fonction $g : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La convexité de la fonction exponentielle montre que $\forall t > 0,\ e^t > t+1$ donc $e^t - 1 > t$ et on a $\forall t > 0,\ g(t) \leqslant 1$. Par conséquent, par croissance de l'intégrale, comme $e^{-xt} > 0$, $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Ainsi, puisque $\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{te^{-xt}}{e^t - 1}$ de sorte que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$:

(H_1) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x,t) = 0 = h(t)$.

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et h l'est aussi.

(H_3) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{t}{e^t - 1} = f_0(t)$ et on a vu que f_0 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} h(t)dt = 0$.

c. Pour $x > 0$, $x - 1 \in D$ donc $f(x-1)$ et $f(x)$ existent et, par linéarité de l'intégrale, on a la relation $f(x-1) - f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t(e^{-(x-1)t} - e^{-xt})}{e^t - 1}dt = \int_0^{+\infty} te^{-xt}dt$. On pose $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-xt}}{x}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $f(x-1)-f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ donc $f(x-1) - f(x) = \dfrac{1}{x}\Big[-\dfrac{-e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{x^2}$.

d. Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(f(x+k-1) - f(x+k)\big) = f(x) - f(x+n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$ par télescopage donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x+n) = 0$ d'après **b.** et que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(x+k)^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

e. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_x(t) = \dfrac{te^{-xt}}{e^t - 1} = \dfrac{te^{-(x+1)t}}{1 - e^{-t}} = te^{-(x+1)t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n$ car $|e^{-t}| < 1$ (série géométrique).

Ainsi, $f_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$ avec $g_n(t) = te^{-(x+1+n)t}$.

(H_1) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f_x (on vient de le voir).

(H_2) Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car elles se prolongent par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 0$ et qu'on a $g_n(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées.

(H_3) La fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ en posant $u : t \mapsto -\dfrac{e^{-(x+1+n)t}}{x+1+n}$ et $v : t \mapsto t$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées car $x+1+n > 0$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1+n)t}}{x+1+n}dt = \frac{1}{(x+1+n)^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |g_n(t)|dt$ converge par comparaison car $\dfrac{1}{(x+1+n)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on le savait déjà) et on a $\forall x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+n)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$ en posant $k = n+1$.

8.3 Officiel de la Taupe

8.65 Posons $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ qui est C^∞ sur son domaine de définition.

Pour $x \geqslant 0$, $f(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue et $f(x,t) = O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ quand t tend vers $+\infty$.

Pour $x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,.)$ sont intégrables car $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$ (cette fois-ci $x > 0$ est primordial).

- Pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $(f,.,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $f(x,.)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $a > 0$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{-te^{-at}}{1+t^2} = \varphi_a(t)$ et φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de LEIBNIZ, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt$.

On recommence (en s'éloignant de 0), et g est de classe C^2 (d'ailleurs C^∞) et $g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

$\forall x > 0,\ g''(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$. Les solutions de l'équation homogène sont $y = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.

On effectue une double variation des constantes : $\lambda'\cos(x) + \mu'\sin(x) = 0$, $-\lambda'\sin(x) + \mu'\cos(x) = \frac{1}{x}$ et on trouve $\lambda' = -\frac{\sin(x)}{x}$ et $\mu' = \frac{\cos(x)}{x}$. On peut prendre, comme les convergences de ces deux intégrales sont classiques par IPP : $\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\mu(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$. Les solutions de l'équation sont les $y = \lambda\cos(x)+\mu\sin(x)+\cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt-\sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt = \lambda\cos(x)+\mu\sin(x)+\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt$.

Par le changement de variable $u = t-x$, on trouve $y = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}du$.

Mais $|g(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$ car $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

De plus, pour $b > 0$, $\int_0^b \frac{\sin(u)}{u+x}du = \left[-\frac{\cos(u)}{u+x}\right]_0^b - \int_0^b \frac{\cos(u)}{(u+x)^2}du$. On fait tendre b vers $+\infty$ et on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}du = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{(u+x)^2}du$ or $\left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{(u+x)^2}du\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+x)^2} = \left[-\frac{1}{u+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}du = 0$. Comme $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0,\ g(x) = \lambda\cos(x)+\mu\sin(x)+\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}du$, on en déduit par soustraction que $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) = 0$ ce qui ne se peut que si $\lambda = \mu = 0$.

Enfin, on peut affirmer que : $\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x}du$.

$\boxed{\textbf{8.66}}$ **a.** Soit $g_y : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$.

- Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto g_y(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto g_y(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $e^{-xt} - e^{-yt} \underset{0}{=} (y-x)t + o(t)$ donc g_y se prolonge par continuité en 0 avec $g_y(0) = y - x$; $g_y(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et on conclut avec RIEMANN.
- $t \mapsto \frac{\partial g_y}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour $a > 0$, $x \in [a;+\infty[$ et $t > 0$, $\left|\frac{\partial g_y}{\partial(}x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi_a(t)$ avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit d'après le théorème de dérivation sous le signe somme que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Et on a la formule de LEIBNIZ : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = -\frac{1}{x}$ d'après ce qui précède.

c. $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle donc il existe $K(y) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ F(x,y) = -\ln(x) + K(y)$.
Comme $F(y,y) = 0$, $K(y) = \ln(y)$ d'où : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ F(x,y) = \ln(y) - \ln(x)$.

(8.67) **a.** Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'analyse avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x^2}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc $g(x)$ est bien défini. Soit $h : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$. Alors :

- Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \to e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{\cos^2(t)} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}$ sont continues sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc y sont intégrables.
- Soit $a > 0$, et $(x,t) \in [-a; a] \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, alors $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 4a$ car $\cos(t) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}} \leqslant 1$.

Comme $t \mapsto 4a$ est intégrale sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, le théorème de dérivation sous le signe somme nous permet d'affirmer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x \int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}}{\cos^2(t)} dt$.

b. $\psi = f^2 + g$ est paire. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du - 2x \int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}}{\cos^2(t)} dt$. On a $\psi'(0) = 0$. Si $x \neq 0$, on pose $v = x\tan(t) = \varphi(t)$ avec φ qui de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ dans la seconde intégrale et on a $\int_0^{\pi/4} x \frac{e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}}}{\cos^2(t)} dt = \int_0^{\pi/4} e^{-x^2(1+\tan^2 t)} \varphi'(t) dt = e^{-x^2} \int_0^{\pi/4} e^{-\varphi(t)^2} \varphi'(t) dt = e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} dv$. Ainsi, $\psi'(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc ψ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et comme $\psi(0) = \frac{\pi}{4}$, on a finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 + \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}} dt = \frac{\pi}{4}$. Mais $0 \leqslant \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(t)}} dt \leqslant \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} dt = \frac{\pi e^{-x^2}}{4}$, d'où $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x)^2 = \frac{\pi}{4}$ avec ce qui précède. Mais comme $f(x) > 0$, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ qui nous redonne la classique l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(8.68) **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 $f_x(0) = x$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN $(2 > 1)$. F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ si $t > 0$ et $f(x,0) = x$.

- Pour $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ (donc f_x) est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (déjà vu).
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.
Si $x \neq 1$, $x > 0$, on décompose en éléments simples : $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ donc $F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\right)$ et comme $\lim_{t \to +\infty} \text{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne

$F'(x)=\frac{x}{x^2-1}\Big[\text{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty}+\frac{1}{(1-x^2)}\Big[\text{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty}$ d'où $F'(x)=\frac{x\pi}{2(x^2-1)}+\frac{\pi}{2(1-x^2)}=\frac{1}{2(1+x)}$.
Comme F' est continue en 1, on a $F'(1)=\lim\limits_{x\to 1}F'(x)=\frac{1}{4}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F(x)=\frac{\ln(1+x)}{2}$ ($\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle). Au final, par imparité de F, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\text{sgn}(x)\frac{\ln(1+|x|)}{2}$.

8.69 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t\mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et $0\leqslant f_x(t)\leqslant \frac{1}{1+t^2}\underset{+\infty}{=}O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après Riemann ($2>1$). F est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,t)=\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$.

- Pour $t\geqslant 0$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ (donc f_x) est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (déjà vu).
- Pour $x\in\mathbb{R}_+$, $\big|f(x,t)\big|=\frac{1}{1+t^2}\leqslant\varphi(t)=\frac{1}{1+t^2}$ avec φ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Passons maintenant à la dérivabilité mais on doit s'éloigner de 0 :

- Pour $t\geqslant 0$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ (donc f_x) est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (déjà vu).
- Pour $a>0$, $x\in[a;+\infty[$ et $t\geqslant 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right|\leqslant\varphi(t)=e^{-at^2}$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt^2}dt}{1+t^2}$.

c. Si $x>0$, on a donc $F'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2-1)e^{-xt^2}dt}{1+t^2}=-\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt+F(x)$. On effectue le changement de variable $u=t\sqrt{x}$ dans cette intégrale et on a donc $F'(x)-F(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$ et on reconnaît l'intégrale de Gauss : $F'(x)-F(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$. On résout cette équation différentielle avec la méthode de variation de la constante : $F(x)=\lambda(x)e^x$ avec $\lambda'(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}e^{-x}$. Ainsi, on peut prendre $\lambda(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ (car cette intégrale converge classiquement) et on pose $t=u^2$ pour avoir $\lambda(x)=\sqrt{\pi}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}e^{-u^2}du$.

Par conséquent : $\exists\alpha\in\mathbb{R},\ \forall x>0,\ F(x)=\Big(\alpha+\sqrt{\pi}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}e^{-u^2}du\Big)e^x$.

Mais F est continue en 0 et $F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$, ainsi $\alpha=0$ (toujours avec l'intégrale de Gauss) :

$\forall x\geqslant 0,\ F(x)=\sqrt{\pi}\Big(\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du-\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}du\Big)e^x=\sqrt{\pi}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(\sqrt{x})\Big)e^x$. Alors $F(x)=\frac{\pi}{2}\big(1-\theta(\sqrt{x})\big)e^x$.

8.70 Pour $x>0$, la fonction $t\mapsto\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ est continue sur $[0;x[$ et $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\underset{x^-}{=}O\Big(\frac{1}{\sqrt{x-t}}\Big)$ avec $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{x-t}}$ qui est intégrable sur $[0;x[$ d'après Riemann. Par comparaison, $I_{1/2}f(x)$ est défini si $x>0$.
On effectue le changement de variable affine (simple à justifier) $t=\varphi(u)=ux$ dans l'intégrale et on obtient $\forall x>0,\ I_{1/2}f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}du$. Soit $g:\mathbb{R}_+\times[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,u)=\frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}$.

- pour $u\in[0;1[$, $x\mapsto g(x,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• pour $x \geqslant 0$, $u \mapsto g(x,u)$ est continue et intégrable sur $[0;1[$.
• pour $a > 0$ et $(x,u) \in [0;a] \times [0;1[$, $|g(x,u)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-u}} = \psi_a(u)$ avec $M = \underset{[0;a]}{\mathrm{Max}}|f|$ (continuité sur un segment) et ψ_a est intégrable sur $[0;1[$.
Alors par théorème de continuité sous le signe somme, $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} = F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. On peut conclure que $I_{1/2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ si on pose $I_{1/2}(0) = 0$ car $I_{1/2}f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}F(x)$.
On pose $t = x - u$ dans la définition de $I_{1/2}f(x)$ pour obtenir $I_{1/2}f(x) = -\displaystyle\int_x^0 \frac{f(x-u)}{\sqrt{u}}du = \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}}dt$.
• pour $u \in [0;1[$, $x \mapsto g(x,u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
• pour $x \geqslant 0$, $u \mapsto g(x,u)$ est intégrable sur $[0;1[$ et $u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,u) = \dfrac{uf'(ux)}{\sqrt{1-u}}$ est continue sur $[0;1[$.
• pour $a > 0$ et $(x,u) \in [0;a] \times [0;1[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \underset{[0;a]}{\mathrm{Max}}|f'|$ (continuité sur un segment).
Alors par théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^1 sur R_+ et on a la formule de Leibniz : $\forall x > 0,\ F'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{uf'(ux)}{\sqrt{1-u}}du = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}}(xf'(ux))du$. On peut conclure que $I_{1/2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car $I_{1/2}f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}F(x)$. De plus $\forall x > 0,\ D_{1/2}f(x) - I_{1/2}f'(x) = \big(I_{1/2}f\big)'(x) - I_{1/2}f'(x)$ qui vaut donc aussi $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi x}}F(x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}F'(x) - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(ux)}{\sqrt{1-u}}du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left[\int_0^1 \left(\frac{f(ux)}{2\sqrt{1-u}} + \frac{uxf'(ux)}{\sqrt{1-u}} - \frac{xf'(ux)}{\sqrt{1-u}}\right)du\right]$.
Ainsi $D_{1/2}f(x) - I_{1/2}f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}\Big[-\sqrt{1-u}f(ux)\Big]_0^1 = \dfrac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}$. On a bien $\forall x > 0,\ D_{1/2}f(x) = I_{1/2}f'(x) + \dfrac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}$.
Posons $f_n(x) = x^n$, alors $I_{1/2}f_n(x) = \dfrac{x^n\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u}}du$ d'après l'expression précédente et on effectue le changement de variable $u = \sin^2 t$ pour avoir $I_{1/2}f_n(x) = \dfrac{2x^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}$.
Posons $g_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}$, alors, comme avant, $I_{1/2}g_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}du$ et on pose à nouveau le changement de variable $u = \sin^2 t$ pour avoir $I_{1/2}g_n(x) = \dfrac{2x^{n+1}}{\sqrt{\pi}}W_{2n+2} = \dfrac{(2n+2)!x^{n+1}\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $I_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}I_{1/2}g_n(x)$ d'après ce qui précède et par linéarité de $I_{1/2}$. On en déduit que $I_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}\dfrac{(2n+2)!x^{n+1}\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ après simplification. Comme $\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, on a $I_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$. Par linéarité des opérateurs "primitive" et $I_{1/2}$, la relation $I_{1/2}I_{1/2}f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ montrée pour les monômes est vrai pour les polynômes.
De même, soit $n \in \mathbb{N}$, $D_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}D_{1/2}g_n(x) = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}\Big(I_{1/2}g_n(x)\Big)'$ qu'on transforme en $D_{1/2}I_{1/2}f_n(x) = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}\dfrac{(2n+2)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\Big(x^{n+1}\Big)' = x^n$ après simplification. Encore une fois, une formule vraie pour les monômes et linéaire est donc vraie pour tous les polynômes f : $D_{1/2}I_{1/2}f = f$.
Supposons maintenant que f est DSE : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$, puisque $I_{1/2}f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}du$, il vient $I_{1/2}f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_nu^nx^n}{\sqrt{1-u}}\Big)du$. On pose $h_n(xu) = \dfrac{a_nu^nx^n}{\sqrt{1-u}}$ pour $x \geqslant 0$:

• la série $\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} h_n$ converge simplement vers $u \mapsto \dfrac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}$ sur $[0;1[$ (on en vient).

• toutes les fonctions h_n sont intégrables sur $[0;1[$, de plus $\displaystyle\int_0^1 |h_n| = 2|a_n|x^{n+1/2}\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}|a_n|x^n$ car on a l'expression $\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2}{3}\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{2n}{2n+1} < 1$.

• la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}|a_n|x^n$ converge (convergence absolue dans l'intervalle ouvert de convergence).

On déduit du TITT que $I_{1/2}f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \frac{u^n x^n}{\sqrt{1-u}}du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{1/2}f_n(x)$.

On recommence pour obtenir $I_{1/2}I_{1/2}f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)dt$.

Montrer que cette relation est aussi vraie pour les fonctions continues requiert le théorème de WEIERSTRASS qui est hors programme : approximation uniforme de $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par une suite de fonctions polynomiales sur un segment et l'inégalité $\forall x \in [0;a]$, $\left|I_{1/2}f(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \frac{||f||_{\infty,[0;a]}}{\sqrt{x-t}}dt \leqslant \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}||f||_{\infty,[0;a]}$.

8.71 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha(1+x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$. D'après le critère de RIEMANN, g est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et g est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $1+\alpha > 1$ donc f est définie sur $]0;1[$.

Soit $h :]0;1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(\alpha,x) = \dfrac{1}{x^\alpha(1+x)}$.

• pour $x > 0$, $\alpha \mapsto h(\alpha,x)$ est continue sur $]0;1[$.
• pour $\alpha \in]0;1[$, $x \mapsto h(\alpha,x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Soit $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b < 1$, $\forall(\alpha,x) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+^*$, $|h(\alpha,x)| = \dfrac{x^{-\alpha}}{1+x} \leqslant \dfrac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0;1]$ et $|h(\alpha,x)| \leqslant \dfrac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1;+\infty[$. Soit $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,b}(x) = \dfrac{x^{-b}}{1+x}$ si $x \in]0;1]$ et $\varphi_{a,b}(x) = \dfrac{x^{-a}}{1+x}$ si $x \in [1;+\infty[$. Alors $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec $\varphi_{a,b}(1) = \frac{1}{2}$) et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $]0;1[$.

Quand $\alpha \to 0$, c'est au voisinage de $+\infty$ qu'il va y avoir un problème. On approche $f(\alpha)$ par $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}$.
Évaluons la différence, $f(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)}$. Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{1}{1-\alpha}$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha} \leqslant 1$. Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \underset{0}{=} O(1)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}(1+x)} \underset{0}{=} O(1)$. Par somme : $f(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha} \underset{0}{=} O(1) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ donc $f(\alpha) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\alpha}$.

On pouvait aussi poser $x = u^{1/\alpha}$ dans l'intégrale et $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{1/\alpha}}{u^2(1+u^{1/\alpha})}du$. Si $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs et inférieurs à $\dfrac{1}{2}$ qui tend vers 0, alors $\alpha_n f(\alpha_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{1/\alpha_n}}{u^2(1+u^{1/\alpha_n})}du$.

On pose $f_n(u) = \dfrac{u^{1/\alpha_n}}{u^2(1+u^{1/\alpha_n})}$, alors les f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) = 0$ si $u < 1$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(u) = \dfrac{1}{u^2}$ si $u > 1$. Or f est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n \leqslant g$ où $g(u) = \dfrac{1}{u^2}$ si $u > 1$, $g(1) = \dfrac{1}{2}$ et

$g(u) = 1$ si $u < 1$. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n f(\alpha_n) = \int_0^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1$.
Puis la caractérisation séquentielle des limites permet de conclure que $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha f(\alpha) = 1$ donc $f(\alpha) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\alpha}$.

On effectue le changement de variable $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$ (φ est bien C^1 et bijective) dans $f(\alpha)$ pour avoir $f(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^{-\alpha}(1+t^{-1})}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)} = f(1-\alpha)$. Ainsi la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

De plus, $f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \Big[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\Big]_0^{+\infty} = \pi$.

8.72 Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h : t \mapsto e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = x$ et $h(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ donc h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x,t) = e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}$.

- pour $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \mathrm{Re}\Big(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t}dt\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-ix}\Big) = \frac{1}{1+x^2}$ d'après le théorème de dérivation sous le signe somme. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ implique : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C + \mathrm{Arctan}(x)$. Or g est clairement impaire donc $C = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

8.73 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

- pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et φ est classiquement intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi par le théorème de continuité sous le signe somme : g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est clair que g est paire, on n'étudie sa dérivabilité que sur $\mathbb{R}_+$.

- pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x)$ existe.
- si $0 < a < b$ et $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+$, $\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant \Psi_{a,b}(t) = 2be^{-(1+t^2)a^2}$ et $\Psi_{a,b}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi par le théorème de dérivabilité sous le signe somme : g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$\forall x > 0$, $g'(x) = -2\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}x\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}x\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du = -2e^{-x^2}h(x)$.

On en déduit alors que $\forall x > 0$, $g'(x) = -2h'(x)h(x)$ car $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle et que $(g+h^2)' = 0$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $g(x) + h^2(x) = C \geqslant 0$.
Comme $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}dt = e^{-x^2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \sqrt{C}$. Mais on a $g + h^2$ continue en 0 donc $g(0) + h^2(0) = C = g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.74 Soit $f : \mathbb{R} \times [0;\pi]$ définie par $f(x,t) = \cos(x\sin t)$.

- pour tout $t \in [0;\pi]$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- si $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0;\pi]$ donc intégrable et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin t \sin(x\sin t)$ est continue.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;\pi]$, $\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0;\pi]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction Φ_0 est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_0'(x) = -\int_0^{\pi} \sin t \sin(x \sin t)dt$. Si $x \in [0;\pi]$, alors $\forall t \in [0;\pi]$, on a $x \sin t \in [0;\pi]$ donc $\sin(x \sin t) \geqslant 0$ et, comme $\sin t \geqslant 0$, on a $\phi_0'(x) \leqslant 0$. Alors Φ_0 est décroissante sur $[0;\pi]$. De plus $\Phi_0(0) = 1$ et $\Phi_0(\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\pi \sin t)dt$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\Phi_0(\pi)$ est négatif.

Or par le changement de variable $t = \pi - \theta$, on a $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x \sin t)dt$ ce qui fait que $\Phi_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)dt$. De nouveau, dans cette intégrale, on effectue le changement $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ et $\Phi_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \Big(\cos(x \sin t) + \cos(x \cos t)\Big)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{x(\sin t + \cos t)}{2}\right) \cos\left(\frac{x(\sin t - \cos t)}{2}\right)dt$.

Ainsi $\Phi_0(\pi) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi(\sin t + \cos t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(\sin t - \cos t)}{2}\right)dt$.

- $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin(t) + \cos(t) \in [1; \sqrt{2}]$ donc $\cos\left(\frac{\pi(\sin t + \cos t)}{2}\right) \leqslant 0$.
- $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin(t) - \cos(t) \in [-1; 0]$ donc $\cos\left(\frac{\pi(\sin t - \cos t)}{2}\right) \geqslant 0$.

Par conséquent, $\Phi_0(\pi) \leqslant 0$ et $\Phi_0(0) \geqslant 0$ donc Φ_0 s'annule une fois et une seule sur $[0;\pi]$.

8.75 Pour a, b, x réels, soit $h_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $h_x(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)$. Par DL, la fonction h_x se prolonge par continuité en 0 en posant $h_x(0) = b - a$.
Bien sûr, si $a = b$, la fonction h_x est nulle donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $F(x) = 0$.
On peut imposer l'ordre entre a et b par symétrie : par exemple $0 < a < b$.
Alors $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$ car $\frac{\cos(xt)}{t} \underset{+\infty}{=} o(1)$ et $e^{-bt} \underset{+\infty}{=} o(e^{-at})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $t \mapsto e^{-at}$ l'est. Par conséquent, F est définie sur $\mathbb{R}$, et elle y est clairement paire, par $F(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ avec $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,0) = b - a$ et $g(x,t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)$ si $t > 0$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (e^{-bt} - e^{-at})\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at} - e^{-bt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at})\sin(xt)dt = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at})e^{ixt}dt\right)$ donc $F'(x) = \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-b+ix)t}}{-b+ix} - \frac{e^{(-a+ix)t}}{-a+ix}\right]_0^{+\infty}\right) = \operatorname{Im}\left(\left[\frac{1}{b-ix} - \frac{1}{a-ix}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}$. On intègre et il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C$.

Or $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt$ mais, puisque les deux intégrales convergent : $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}dt$ et on pose $t = \frac{u}{a}$ dans la première et $t = \frac{u}{b}$ dans la seconde intégrale pour avoir $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}du$. Or $\forall u \geqslant 0,\ 1 - u \leqslant e^{-u} \leqslant 1$ donc $\ln\left(\frac{b}{a}\right) - (b-a)\varepsilon = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u}du - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} du \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}du \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u}du = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
En passant à la limite : $F(0) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ donc $C = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$.

8.76 Pour $x > 0$, soit la fonction continue $h_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h_x(t) = \frac{1 - e^{-xt}}{1+t^2}$. Comme $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, la

fonction h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt}}{1+t^2}$.

- Pour $t \geqslant 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir). De plus, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-xt}}{t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-xt})$ et $x > 0$.

Enfin, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -\dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $a > 0$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi_a(t)$ et φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($a > 0$).

Par le théorème de dérivation sous le signe somme appliqué deux fois, la fonction $\theta : x \mapsto xf(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0$, $\theta''(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$. Par conséquent $f : x \mapsto \dfrac{\theta(x)}{x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le calcul précédent montre que $\theta''(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{(t^2+1-1)e^{-xt}}{1+t^2}dt = -\dfrac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = -\dfrac{1}{x} - \theta(x) + \dfrac{\pi}{2}$.

On peut scinder l'intégrale : $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}dt - \dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = \dfrac{\pi}{2x} - \dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

Comme $0 \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \leqslant \dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

Par continuité sous le signe somme, θ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (en dominant $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$) et $\theta(0) = 0$.

On résout l'équation différentielle $\theta''(x) + \theta'(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x}$. Les solutions de l'équation homogène sont les $y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ et, par méthode variation des constantes (hors programme depuis quelques années), on résout le système $A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) = -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x}\right) = 0$ pour avoir $A(x) = -\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x}\right)\sin(x) + \lambda$ et $B(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x}\right)\cos(x) + \mu$. Ainsi, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que $\forall x > 0$, $\theta(x) = \left(\lambda + \displaystyle\int_0^x \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin(t)dt\right)\cos(x) + \left(\mu + \dfrac{\pi}{2}\int_0^x \cos(t)dt - \int_1^x \dfrac{\cos(t)}{t}dt\right)\sin(x)$.

Comme $\displaystyle\int_1^x \dfrac{\cos(t)}{t}dt = \int_1^x \dfrac{\cos(t)-1+1}{t}dt = \ln(x) - \int_1^x \dfrac{1-\cos(t)}{t}dt$. Or $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ se prolonge en une fonction continue donc bornée sur $[0;1]$ ce qui montre que $\displaystyle\int_1^x \dfrac{1-\cos(t)}{t}dt \underset{0}{=} O(1)$. Ainsi $\displaystyle\int_1^x \dfrac{\cos(t)}{t}dt \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

De même $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\int_0^x \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin(t)dt \underset{0}{=} O(1)$. On trouve finalement $\theta(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

8.77 Soit $g : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{1}{1+x^3+t^3}$. Alors :

- $\forall t \geqslant 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $g(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$.
- $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est $t \mapsto g(0,t)$).

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $1+x^3 = (1+x)(x^2-x+1)$, on sait qu'il existe trois réels a, b, c tels que $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$.
$1 = a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1) \iff (a+b=0,\ b+c-a=0,\ a+c=1) \iff \left(a = \dfrac{1}{3},\ b = -\dfrac{1}{3},\ c = \dfrac{2}{3}\right)$ en procédant par identification. Ainsi $\displaystyle\int_0^a \dfrac{dt}{1+t^3} = \int_0^a \left(\dfrac{1}{3(t+1)} - \dfrac{2t-1}{6(t^2-t+1)} + \dfrac{1}{2(t^2-t+1)}\right)dt$ qu'on intègre classiquement $\displaystyle\int_0^a \dfrac{dt}{1+t^3} = \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{(a+1)^2}{a^2-a+1}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\dfrac{2a-1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Par conséquent $f(0) = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{6}\ln(1) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \sim 1,21$.

Posons $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+n^3+t^3}$ de sorte que $f(n) = \int_0^{+\infty} f_n$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ (intégrables sur $\mathbb{R}_+$) converge simplement la fonction nulle et toutes les f_n sont dominées par f_0 qui est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \int_0^{+\infty} 0 = 0$. Or la fonction f est clairement décroissante (car $x \leqslant y \implies \frac{1}{1+x^3+t^3} \geqslant \frac{1}{1+y^3+t^3}$) et positive donc elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$, on a $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) = \int_0^x g(x,t)dt + \int_x^{+\infty} g(x,t)dt \geqslant \int_0^x \frac{dt}{1+x^3} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{x}{1+x^3} + \frac{1}{2x^2}$ en majorant directement et on conclut à nouveau que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.