

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 13

PSI 1 2025-2026

du lundi 05/01 au vendredi 09/01

1 Espaces préhilbertiens réels :

- définition d'une forme bilinéaire symétrique définie positive ;
- forme quadratique associée, identités de polarisation, du parallélogramme ;
- inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, de MINKOWSKI, cas d'égalité ;
- produit scalaire et norme associée dans un espace préhilbertien réel ;
- angle non orienté entre deux vecteurs non nuls ;

2 Orthogonalité :

- vecteurs unitaires et orthogonaux dans un espace préhilbertien réel ;
- famille libre de vecteurs orthogonaux non nuls, relation de PYTHAGORE ;
- sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace (en somme directe) ;
- relation entre les orthogonaux et la somme, l'intersection ;

3 En dimension finie :

- espaces euclidiens, bases orthonormales ;
- procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT, existence de bases orthonormales ;
- relations entre les coordonnées et le produit scalaire, la norme dans une B.O.N. ;
- supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien ;

4 Intégration à paramètre :

- théorème de convergence dominée (retour) - exemples ;
- théorème de continuité sous le signe somme + version "sur tout segment" ;
- théorème de dérivation sous le signe somme + version "sur tout segment" ;
- théorème de convergence dominée à paramètre continu ;
- récurrence pour montrer qu'une fonction définie comme une intégrale à paramètre est de classe C^∞ ;
- exemple de la fonction Γ d'EULER ; valeurs particulières de cette fonction ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est un produit scalaire et la norme euclidienne associée dans un espace réel (déf. 7.3)
- 2 énoncer le théorème sur l'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT (th. 7.8)
- 3 énoncer les relations entre les coordonnées des vecteurs et les produit scalaire, norme (th. 7.10)
- 4 énoncer le résultat sur la projection orthogonale sur F de dimension finie dans E préhilb. (prop. 7.14)
- 5 énoncer le théorème sur la distance d'un vecteur à un sous-espace (th. 7.15)
- 6 énoncer le théorème de représentation d'une forme linéaire dans E euclidien (th. 7.16)
- 7 prouver l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans un espace préhilbertien réel (prop. 7.1 et th. 7.4)
- 8 prouver l'inégalité de MINKOWSKI (triangulaire) dans un espace préhilbertien (prop. 7.2 et th. 7.3)
- 9 prouver que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = {}^tP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (rem. 7.16)
- 10 prouver la relation sur la distance d'un vecteur à un hyperplan dans E euclidien (prop. 7.17)

Prévision pour la prochaine semaine : tout sur les espaces préhilbertiens et intégrales à paramètre