

# DM 06 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 12 décembre 2025

## 1 Modes de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$

**1.1** Pour  $x = 0$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n(0) = 0$  donc  $\sum_{n \geq 1} u_n(0)$  converge et  $S(0) = 0$ . De plus, si  $x \neq 0$ , on a  $u_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{xn^{1+\alpha}}$  donc  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car  $1+\alpha > 1$ .

Ainsi,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et, toutes  $u_n$  étant impaires,  $S$  est impaire.

**1.2** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par opérations et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $u'_n(x) = \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$  donc  $u_n$  étant impaire, croissante sur  $[0; \frac{1}{\sqrt{n}}]$  et décroissante sur  $[\frac{1}{\sqrt{n}}; +\infty[$  avec  $u_n(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)$ , il vient  $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$  donc, toujours avec RIEMANN,  $\sum_{n \geq 1} \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$  converge si et seulement si  $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ . Au final,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

**1.3** Si  $0 < a < b$ , posons par exemple  $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{a^2} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$  de sorte que  $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < a$ , alors pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n$  est positive et décroissante sur  $[a; b]$  d'après 1.2 donc  $\|u_n\|_{\infty, [a; b]} = u_n(a)$  et, comme  $a > 0$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 1} u_n(a)$  converge d'après la question 1.1 donc  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur  $[a; b]$ .

On a beau avoir  $\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{0 < a < b} [a; b]$ , la convergence normale ne passe pas à la réunion infinie car, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$  donc la convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} u_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  équivaut à celle sur  $\mathbb{R}$ , ce qui

d'après la question 1.2 donne :  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

**1.4** Soit  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ , alors on a clairement  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|R_n(x)| = |x| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha(1+kx^2)}$ . Puisque tous les termes de cette somme sont positifs,  $|R_n(x)| \geq |x| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha(1+kx^2)}$ . Mais, pour  $k \in [\lceil n+1 \rceil; 2n]$ , comme  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ , on

a  $k^\alpha \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{2n}$  donc, en passant à l'inverse et en sommant, on obtient  $|R_n(x)| \geq \frac{|x|}{\sqrt{2n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+kx^2}$ .

Ainsi,  $|R_n(x)| \geq \frac{|x|}{\sqrt{2n}} \times \frac{n}{1+2nx^2} = \frac{|x|\sqrt{n}}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$ . Pour  $a > 0$ , dès que  $n$  est assez grand, on a  $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0; a]$  donc, comme  $R_n$  est aussi impaire,  $\|R_n\|_{\infty, [-a; a]} = \|R_n\|_{\infty, [0; a]} \geq R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}$  (même si  $R_n$  n'est pas bornée sur  $[-a; a]$ ). Ainsi, la suite  $(\|R_n\|_{\infty, [0; a]})_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne tend pas vers 0. Comme  $[-a; a] \subset \mathbb{R}$ , on minore  $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \geq \|R_n\|_{\infty, [-a; a]}$ . D'où,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge uniformément ni sur  $[0; a]$ , ni sur  $[-a; a]$ , ni sur  $\mathbb{R}$ .

## 2 Continuité et limites de $S$

**2.1** Quel que soit  $\alpha > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et la  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . D'après le théorème de continuité des séries de fonctions,  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme  $S$  est impaire,  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  pour tout  $\alpha > 0$ .

**2.2** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\alpha > 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ . De plus, comme la fonction  $u_n$  est décroissante pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  sur  $[1; +\infty[$  d'après 1.2 ( $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ ), on a  $\|u_n\|_{\infty, [1; +\infty[} = u_n(1)$  et  $\sum_{n \geq 1} u_n(1)$  converge d'après 1.1. Ainsi,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur  $[1; +\infty[$  et d'après le théorème de la double limite, on parvient à  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)$ . On évalue  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$  avec  $v_n(x) = \frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}$  et on recommence. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $v_n$  est positive et croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et car  $\forall x > 0$ ,  $v_n(x) = \frac{1}{n^\alpha \left( n + \frac{1}{x^2} \right)}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$  donc  $\|v_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ . Comme  $1 + \alpha > 1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ . Le théorème de la double limite donne encore  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \lim_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = \lim_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} = \zeta(\alpha + 1) > 0$ .

Comme  $S$  est impaire,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) = 0$ ,  $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}$  et  $S(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}$ .

On pouvait aussi, en anticipant le résultat, écrire  $|S(x) - \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} - \frac{1}{n^{1+\alpha}x} \right) \right|$  qui se simplifie, car  $1 + nx^2 \geq nx^2$ , en  $|S(x) - \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}x(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}x^3} = \frac{\zeta(\alpha + 2)}{x^3}$  ce qui prouve qu'on a bien  $S(x) - \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x} \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$  donc à nouveau que  $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}$ .

**2.3** Si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , on a vu en question 1.3 que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on déduit du théorème du cours que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**2.4** Si  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sum_{n=1}^p u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^\alpha \left(1 + \frac{n}{p}\right)}$  or, pour  $n \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $n^\alpha \leq p^\alpha$  et  $1 + \frac{n}{p} \leq 2$ .

Ainsi,  $\sum_{n=1}^p u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{p}} \times \frac{p}{2p^\alpha} = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha}$ . Comme  $s\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \sum_{n=1}^p u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$  (tous les termes de cette somme sont positifs), on a donc  $s\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha}$ .

- Si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $s\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha} = \frac{1}{2}$  interdit, puisque  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} = 0^+$ , d'avoir  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0 = S(0)$ .
- Si  $\alpha < \frac{1}{2}$ , comme  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha} = +\infty$ , on ne peut pas avoir non plus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0 = S(0)$ .

Dans les deux cas,  $S$  n'est pas continue à droite en 0 donc  $S$  n'est pas continue en 0.

**2.5** Si  $\alpha < \frac{1}{2}$  et  $x \in ]0; 1[$ , comme  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < x \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$   $\iff k \leq \frac{1}{x^2} < k+1$ , l'unique entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{\sqrt{p+1}} < x \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$  est, par propriété de la partie entière,  $p = \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$ . Comme en 2.4, on a  $S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(1+nx^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{p+1}} \sum_{n=1}^p \frac{1}{p^\alpha(1+(n/p))} \geq \frac{1}{\sqrt{p+1}} \times p^2 p^\alpha = \frac{p^{1-\alpha}}{2\sqrt{p+1}}$ . Or, quand  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $p$  tend vers  $+\infty$  et on a  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p^{1-\alpha}}{2\sqrt{p+1}} = +\infty$  car  $1-\alpha > \frac{1}{2}$ .

Par encadrement, on a donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty}$ . Et comme  $S$  est impaire,  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = -\infty}$ .

### 3 Dérivabilité de $S$

**3.1** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, après calculs,  $u_n''(x) = \frac{2nx(nx^2-3)}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$ . La fonction  $u'_n$  est paire,  $u'_n(0) = \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $u'_n$  est décroissante sur  $[0; \frac{3}{\sqrt{n}}]$ ,  $u'_n\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right) = -\frac{1}{8n^\alpha}$ ,  $u'_n$  est croissante sur  $[\frac{3}{\sqrt{n}}; +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'_n(x) = 0$ . Ainsi,  $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = u'_n(0) = \frac{1}{n^\alpha}$  donc, par comparaison aux séries de RIEMANN,  $\boxed{\sum_{n \geq 1} u'_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \alpha > 1}$ .

On pouvait dire aussi que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|u'_n(x)| = \left| \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2} \right| \leq \frac{1+nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$  par inégalité triangulaire donc que  $|u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $u'_n(0) = \frac{1}{n^\alpha}$ . Ceci prouve plus aisément que  $\|u'_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = u'_n(0) = \frac{1}{n^\alpha}$ .

**3.2** Si  $\alpha > 1$ , comme  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  d'après 1.1, que toutes les  $u_n$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  d'après 3.1, le théorème de dérivation des séries de fonctions permet d'affirmer que  $\boxed{S \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si } \alpha > 1}$ .

**3.3** Si  $\alpha \in ]0; 1[$ , soit  $a > 0$ , dès que  $n$  est assez grand, c'est-à-dire dès que  $\sqrt{\frac{3}{n}} \leq a$ , la fonction  $u'_n$  est négative et croissante sur  $[a; +\infty[$  d'après la question 3.1 donc  $\|u'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = |u'_n(a)| = \frac{na^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2 n^{\alpha+1}}$  donc, puisque  $\alpha+1 > 1$  et d'après RIEMANN,  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$ . Comme à la question précédente, on en déduit que  $S$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $[a; +\infty[$  pour tout  $a > 0$  donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Mais comme  $S$  est impaire,  $\boxed{S \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ si } \alpha \in ]0; 1[}$ .

Si on voulait prouver la convergence normale sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ , on pouvait prendre  $0 < a < b$  et majorer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [a; b]$ ,  $|u'_n(x)| = \left| \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2} \right| \leq \frac{|1-nx^2|}{n^\alpha(1+na^2)^2} \leq \frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2}$  dès que  $n$  est assez grand pour que  $x \mapsto 1-nx^2$  soit négative sur  $[a; b]$ . Ainsi, on aura  $\|u'_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2}$  avec la même conclusion de convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  sur  $[a; b]$  car  $\frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b^2}{a^4 n^{\alpha+1}}$ .

**[3.4]** Si  $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$ , on sait d'après 2.4 que  $S$  n'est pas continue en 0, a fortiori pas dérivable en 0.

Si  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  et  $x > 0$ , on a  $\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (1 + nx^2)}$ . Notons  $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$ , alors pour  $n \leq n_0$ , on a  $n \leq n_0 \leq \frac{1}{x^2}$  donc  $nx^2 \leq 1$  et  $1 + nx^2 \leq 2$  donc, comme encore une fois on ne somme que des termes positifs,  $\frac{S(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^\alpha (1 + nx^2)} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^\alpha}$ . Si on note  $S_{\alpha, n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  la somme partielle d'ordre  $n$  de la série de RIEMANN divergente  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\alpha, n} = +\infty$ , or on sait que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor = +\infty$  donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S_{n_0} = +\infty$ . Puisque,  $\frac{S(x)}{x} \geq S_{n_0}$ , on en déduit par encadrement que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$  donc que le graphe de  $S$  admet en 0, où elle est continue d'après 2.3, une tangente verticale.

Toujours est-il que  $S$  n'est pas dérivable en 0 si  $\alpha \in ]0; 1]$ .

#### 4 Équivalent en 0

**[4.1]** Si  $\alpha > 1$ ,  $S$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  d'après 3.2 avec  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - nx^2}{n^\alpha (1 + nx^2)^2}$ ,  $S(0) = 0$  et  $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) > 0$ . On sait alors, d'après TAYLOR-YOUNG, que  $S(x) \underset{0}{\sim} \zeta(\alpha)x$  si  $\alpha > 1$ .

**[4.2]** Si  $0 < \alpha \leq 1$  et  $x > 0$ , la fonction  $f_x$  est continue sur  $[1; +\infty[$  et  $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{xt^{1+\alpha}}$  avec  $1 + \alpha > 1$  donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN,  $f_x$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ . De plus, la fonction  $f_x$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$  car  $t \mapsto t^\alpha$  et  $t \mapsto t^{-y}$  sont croissantes donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\int_n^{n+1} f_x(t) dt \leq f_x(n) = u_n(x)$ . En sommant pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme l'intégrale et la série convergent,  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$ . De la même façon, pour  $n \geq 2$ , on a aussi  $u_n(x) = f_x(n) \leq \int_{n-1}^n f_x(t) dt$  puis, en sommant pour  $n \geq 2$ , comme tout converge,  $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leq \int_1^{+\infty} f_x(t) dt$ . En ajoutant  $u_1(x)$  de part et d'autre, on obtient donc  $S(x) = u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t) dt$ .

Au final, on a bien l'encadrement souhaité, à savoir  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t) dt$  si  $x > 0$ .

**[4.3]** Si  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $x > 0$ , on a  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{xt}{\sqrt{t}(1+tx^2)} = \left[ 2 \operatorname{Arctan}(x\sqrt{t}) \right]_1^{+\infty} = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$ . D'après la question 4.2, on a  $\pi - 2 \operatorname{Arctan}(x) \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$  donc, par encadrement, comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Arctan}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x^2} = 0$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \pi$ .

**[4.4]** Si  $\alpha = 1$  et  $x > 0$ , comme  $x = x(1+tx^2) - x^3 t$ , on a  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt = \int_1^{+\infty} \left( \frac{x}{t} - \frac{x^3}{1+tx^2} \right) dt$  donc  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt = \left[ x \ln(t) - x \ln(1+tx^2) \right]_1^{+\infty} = \left[ x \ln \left( \frac{t}{1+tx^2} \right) \right]_1^{+\infty} = x \left( \ln \left( \frac{1}{x^2} \right) - \ln \left( \frac{1}{1+x^2} \right) \right) \underset{0^+}{\sim} -2x \ln(x)$ .

Comme  $\frac{x}{1+x^2} \underset{0^+}{\sim} x = o(-x \ln(x))$ , l'encadrement de la question 4.2 montre que  $S(x) \underset{0^+}{\sim} -2x \ln(x)$ .

**4.5** Pour  $\alpha \in ]0; 1[$ , la fonction  $g : u \mapsto \frac{1}{u^\alpha(1+u)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec  $g(u) \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^\alpha}$  et  $g(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\alpha+1}}$  donc  $g$  est intégrable sur  $]0; 1]$  et sur  $[1; +\infty[$  d'après RIEMANN car  $\alpha < 1$  et  $1 + \alpha > 1$ . Par conséquent,  $g$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  donc, a fortiori,  $I_\alpha$  converge pour  $\alpha \in ]0; 1[$ .

Pour  $x > 0$ , on effectue dans l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt$  le changement de variable  $t = \varphi(u) = \frac{u}{x^2}$  avec  $\varphi$  qui est de classe  $C^1$ , bijective de  $[x^2; +\infty[$  dans  $[1; +\infty[$  et strictement croissante, pour avoir la relation  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{x^{2\alpha+1}}{u^\alpha(1+u)} \frac{du}{x^2} = x^{2\alpha-1} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)} = I_\alpha > 0$  d'après ce qui précède (intégrale d'une fonction strictement positive). Ainsi,  $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt \underset{+\infty}{\sim} I_\alpha x^{2\alpha-1}$ . Comme  $\frac{x}{1+x^2} \underset{0^+}{\sim} x = o(x^{2\alpha-1})$  car  $2\alpha - 1 < 1$ , l'encadrement de la question 4.2 montre que  $S(x) \underset{0^+}{\sim} I_\alpha x^{2\alpha-1}$ .

**4.6** Si  $0 < \alpha < 1$ , par CHASLES,  $I_\alpha = \int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1+u)} + \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)}$  et on pose  $u = \psi(v) = \frac{1}{v}$ , avec  $\psi$  de classe  $C^1$ , bijective de  $]0; 1]$  dans  $[1; +\infty[$  et strictement décroissante, dans la seconde intégrale pour avoir  $I_\alpha = \int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1+u)} + \int_1^0 \frac{v^{\alpha+1}}{1+v} \frac{-dv}{v^2} = \int_0^1 \frac{u^{-\alpha} + u^{\alpha-1}}{1+u} du$ . D'après le rappel de l'énoncé, on a donc

$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$  car  $\alpha \in ]0; 1[$ . Ainsi, d'après la question 4.5, il vient  $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} x^{2\alpha-1}$ .