

DM 06 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 12 décembre 2025

1 Modes de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$

1.1 Pour $x = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n(0)$ converge et $S(0) = 0$. De plus, si $x \neq 0$, on a $u_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{xn^{1+\alpha}}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car $1 + \alpha > 1$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et, toutes u_n étant impaires, S est impaire.

1.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur \mathbb{R} par opérations et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{n^\alpha(1 + nx^2)^2}$ donc u_n étant impaire, croissante sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}; +\infty\right[$ avec $u_n(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)$, il vient $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ donc, toujours avec RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ converge si et seulement

si $\alpha + \frac{1}{2} > 1$. Au final, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R} si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

1.3 Si $0 < a < b$, posons par exemple $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{a^2} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < a$, alors pour $n \geq n_0$, u_n est positive et décroissante sur $[a; b]$ d'après 1.2 donc $\|u_n\|_{\infty, [a; b]} = u_n(a)$ et, comme $a > 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(a)$ converge d'après la question 1.1 donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

On a beau avoir $\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{0 < a < b} [a; b]$, la convergence normale ne passe pas à la réunion infinie car, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ donc la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur \mathbb{R}_+^* équivaut à celle sur \mathbb{R} , ce qui

d'après la question 1.2 donne : $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

1.4 Soit $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, alors on a clairement $\forall x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| = |x| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha(1 + kx^2)}$. Puisque tous les termes

de cette somme sont positifs, $|R_n(x)| \geq |x| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha(1 + kx^2)}$. Mais, pour $k \in [n+1; 2n]$, comme $\alpha \leq \frac{1}{2}$, on

a $k^\alpha \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{2n}$ donc, en passant à l'inverse et en sommant, on obtient $|R_n(x)| \geq \frac{|x|}{\sqrt{2n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1 + kx^2}$.

Ainsi, $|R_n(x)| \geq \frac{|x|}{\sqrt{2n}} \times \frac{n}{1 + 2nx^2} = \frac{|x|\sqrt{n}}{\sqrt{2}(1 + 2nx^2)}$. Pour $a > 0$, dès que n est assez grand, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0; a]$

donc, comme R_n est aussi impaire, $\|R_n\|_{\infty, [-a; a]} = \|R_n\|_{\infty, [0; a]} \geq R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}$ (même si R_n n'est pas bornée sur $[-a; a]$). Ainsi, la suite $(\|R_n\|_{\infty, [0; a]})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0. Comme $[-a; a] \subset \mathbb{R}$, on minore

$\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \geq \|R_n\|_{\infty, [-a; a]}$. D'où, $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge uniformément ni sur $[0; a]$, ni sur $[-a; a]$, ni sur \mathbb{R} .

2 Continuité et limites de S

2.1 Quel que soit $\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur \mathbb{R}_+^* et la $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* . D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue sur \mathbb{R}_+^* . Comme S est impaire, S est continue sur \mathbb{R}^* pour tout $\alpha > 0$.

2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. De plus, comme la fonction u_n est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[1; +\infty[$ d'après 1.2 ($\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$), on a $\|u_n\|_{\infty, [1; +\infty[} = u_n(1)$ et $\sum_{n \geq 1} u_n(1)$ converge d'après 1.1. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$ et d'après le théorème de la double limite, on parvient à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)$. On évalue $\forall x \in \mathbb{R}$, $xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ avec $v_n(x) = \frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}$ et on recommence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est positive et croissante sur \mathbb{R}_+ et car $\forall x > 0$, $v_n(x) = \frac{1}{n^\alpha \left(n + \frac{1}{x^2} \right)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ donc $\|v_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. Comme $1 + \alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ . Le théorème de la double limite donne encore $\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} = \zeta(\alpha + 1) > 0$.

Comme S est impaire, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) = 0$, $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}$ et $S(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}$.

On pouvait aussi, en anticipant le résultat, écrire $\left| S(x) - \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} - \frac{1}{n^{\alpha+1}x} \right) \right|$ qui se simplifie, car $1 + nx^2 \geq nx^2$, en $\left| S(x) - \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}x(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}x^3} = \frac{\zeta(\alpha + 2)}{x^3}$ ce qui prouve qu'on a bien $S(x) - \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc à nouveau que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}$.

2.3 Si $\alpha > \frac{1}{2}$, on a vu en question 1.3 que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur \mathbb{R} , on déduit du théorème du cours que S est continue sur \mathbb{R} .

2.4 Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{n=1}^p u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^\alpha \left(1 + \frac{n}{p}\right)}$ or, pour $n \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $n^\alpha \leq p^\alpha$ et $1 + \frac{n}{p} \leq 2$.

Ainsi, $\sum_{n=1}^p u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{p}} \times \frac{p}{2p^\alpha} = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha}$. Comme $S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \sum_{n=1}^p u_n\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ (tous les termes de cette somme sont positifs), on a donc $S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha}$.

- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha} = \frac{1}{2}$ interdit, puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} = 0^+$, d'avoir $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0 = S(0)$.
- Si $\alpha < \frac{1}{2}$, comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}-\alpha} = +\infty$, on ne peut pas avoir non plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0 = S(0)$.

Dans les deux cas, S n'est pas continue à droite en 0 donc S n'est pas continue en 0.

2.5 Si $\alpha < \frac{1}{2}$ et $x \in]0; 1[$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < x \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \iff k \leq \frac{1}{x^2} < k+1$, l'unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{p+1}} < x \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ est, par propriété de la partie entière, $p = \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$. Comme en 2.4, on a $S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(1+nx^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{p+1}} \sum_{n=1}^p \frac{1}{p^\alpha(1+(n/p))} \geq \frac{1}{\sqrt{p+1}} \times p 2p^\alpha = \frac{p^{1-\alpha}}{2\sqrt{p+1}}$. Or, quand x tend vers 0^+ , p tend vers $+\infty$ et on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p^{1-\alpha}}{2\sqrt{p+1}} = +\infty$ car $1-\alpha > \frac{1}{2}$.

Par encadrement, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$. Et comme S est impaire, $\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = -\infty$.

3 Dérivabilité de S

3.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et, après calculs, $u_n''(x) = \frac{2nx(nx^2-3)}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$. La fonction u_n' est paire, $u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$, u_n' est décroissante sur $\left[0; \frac{3}{\sqrt{n}}\right]$, $u_n'\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{8n^\alpha}$, u_n' est croissante sur $\left[\frac{3}{\sqrt{n}}; +\infty\right]$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n'(x) = 0$. Ainsi, $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} u_n'$ converge normalement sur \mathbb{R} si et seulement si $\alpha > 1$.

On pouvait dire aussi que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|u_n'(x)| = \left| \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2} \right| \leq \frac{1+nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$ par inégalité triangulaire donc que $|u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ avec $u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$. Ceci prouve plus aisément que $\|u_n'\|_{\infty, \mathbb{R}} = u_n'(0) = \frac{1}{n^\alpha}$.

3.2 Si $\alpha > 1$, comme $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} d'après 1.1, que toutes les u_n sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et que $\sum_{n \geq 1} u_n'$ converge normalement sur \mathbb{R} d'après 3.1, le théorème de dérivation des séries de fonctions permet d'affirmer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R} si $\alpha > 1$.

3.3 Si $\alpha \in]0; 1]$, soit $a > 0$, dès que n est assez grand, c'est-à-dire dès que $\sqrt{\frac{3}{n}} \leq a$, la fonction u_n' est négative et croissante sur $[a; +\infty[$ d'après la question 3.1 donc $\|u_n'\|_{\infty, [a; +\infty[} = |u_n'(a)| = \frac{na^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2} \sim \frac{1}{a^2n^{\alpha+1}}$ donc, puisque $\alpha+1 > 1$ et d'après RIEMANN, $\sum_{n \geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Comme à la question précédente, on en déduit que S est de classe C^1 sur l'intervalle $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$ donc sur \mathbb{R}_+^* . Mais comme S est impaire, S est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* si $\alpha \in]0; 1]$.

Si on voulait prouver la convergence normale sur tout segment de \mathbb{R}_+^* , on pouvait prendre $0 < a < b$ et majorer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a; b]$, $|u_n'(x)| = \left| \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2} \right| \leq \frac{|1-nx^2|}{n^\alpha(1+na^2)^2} \leq \frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2}$ dès que n est assez grand pour que $x \mapsto 1-nx^2$ soit négative sur $[a; b]$. Ainsi, on aura $\|u_n'\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2}$ avec la même conclusion de convergence normale de $\sum_{n \geq 1} u_n'$ sur $[a; b]$ car $\frac{nb^2-1}{n^\alpha(1+na^2)^2} \sim \frac{b^2}{a^4n^{\alpha+1}}$.

3.4 Si $\alpha \in]0; \frac{1}{2}]$, on sait d'après 2.4 que S n'est pas continue en 0, a fortiori pas dérivable en 0.

Si $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1]$ et $x > 0$, on a $\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(1 + nx^2)}$. Notons $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$, alors pour $n \leq n_0$, on a $n \leq n_0 \leq \frac{1}{x^2}$ donc $nx^2 \leq 1$ et $1 + nx^2 \leq 2$ donc, comme encore une fois on ne somme que des termes positifs, $\frac{S(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^\alpha(1 + nx^2)} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^\alpha}$. Si on note $S_{\alpha,n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ la somme partielle d'ordre n de la série de RIEMANN divergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\alpha,n} = +\infty$, or on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} S_{n_0} = +\infty$. Puisque, $\frac{S(x)}{x} \geq S_{n_0}$, on en déduit par encadrement que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$ donc que le graphe de S admet en 0, où elle est continue d'après 2.3, une tangente verticale.

Toujours est-il que S n'est pas dérivable en 0 si $\alpha \in]0; 1]$.

4 Équivalent en 0

4.1 Si $\alpha > 1$, S est C^1 sur \mathbb{R} d'après 3.2 avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - nx^2}{n^\alpha(1 + nx^2)^2}$, $S(0) = 0$ et $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) > 0$. On sait alors, d'après TAYLOR-YOUNG, que $S(x) \sim \zeta(\alpha)x$ si $\alpha > 1$.

4.2 Si $0 < \alpha \leq 1$ et $x > 0$, la fonction f_x est continue sur $[1; +\infty[$ et $f_x(t) \sim \frac{1}{xt^{1+\alpha}}$ avec $1 + \alpha > 1$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$. De plus, la fonction f_x est décroissante sur $[1; +\infty[$ car $t \mapsto t^\alpha$ et $t \mapsto t$ y sont croissantes donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_n^{n+1} f_x(t)dt \leq f_x(n) = u_n(x)$. En sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme l'intégrale et la série convergent, $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$. De la même façon, pour $n \geq 2$, on a aussi $u_n(x) = f_x(n) \leq \int_{n-1}^n f_x(t)dt$ puis, en sommant pour $n \geq 2$, comme tout converge, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leq \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$. En ajoutant $u_1(x)$ de part et d'autre, on obtient donc $S(x) = u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$.

Au final, on a bien l'encadrement souhaité, à savoir $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$ si $x > 0$.

4.3 Si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $x > 0$, on a $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{xdt}{\sqrt{t}(1 + tx^2)} = \left[2 \operatorname{Arctan}(x\sqrt{t}) \right]_1^{+\infty} = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$. D'après la question 4.2, on a $\pi - 2 \operatorname{Arctan}(x) \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$ donc, par encadrement, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Arctan}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x^2} = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \pi$.

4.4 Si $\alpha = 1$ et $x > 0$, comme $x = x(1 + tx^2) - x^3t$, on a $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{t} - \frac{x^3}{1 + tx^2} \right) dt$ donc $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \left[x \ln(t) - x \ln(1 + tx^2) \right]_1^{+\infty} = \left[x \ln \left(\frac{t}{1 + tx^2} \right) \right]_1^{+\infty} = x \left(\ln \left(\frac{1}{x^2} \right) - \ln \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) \right) \sim_{0^+} -2x \ln(x)$. Comme $\frac{x}{1+x^2} \sim_{0^+} x = o(-x \ln(x))$, l'encadrement de la question 4.2 montre que $S(x) \sim_{0^+} -2x \ln(x)$.

4.5 Pour $\alpha \in]0; 1[$, la fonction $g : u \mapsto \frac{1}{u^\alpha(1+u)}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* avec $g(u) \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^\alpha}$ et $g(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\alpha+1}}$ donc g est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$ d'après RIEMANN car $\alpha < 1$ et $1 + \alpha > 1$. Par conséquent, g est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc, a fortiori, I_α converge pour $\alpha \in]0; 1[$.

Pour $x > 0$, on effectue dans l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt$ le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{x^2}$ avec φ qui est de classe C^1 , bijective de $[x^2; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ et strictement croissante, pour avoir la relation $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{x^{2\alpha+1}}{u^\alpha(1+u)} \frac{du}{x^2} = x^{2\alpha-1} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)} = I_\alpha > 0$ d'après ce qui précède (intégrale d'une fonction strictement positive). Ainsi, $\int_1^{+\infty} f_x(t) dt \underset{+\infty}{\sim} I_\alpha x^{2\alpha-1}$. Comme

$$\frac{x}{1+x^2} \underset{0^+}{\sim} x = o(x^{2\alpha-1}) \text{ car } 2\alpha - 1 < 1, \text{ l'encadrement de la question 4.2 montre que } S(x) \underset{0^+}{\sim} I_\alpha x^{2\alpha-1}.$$

4.6 Si $0 < \alpha < 1$, par CHASLES, $I_\alpha = \int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1+u)} + \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+u)}$ et on pose $u = \psi(v) = \frac{1}{v}$, avec ψ de classe C^1 , bijective de $]0; 1]$ dans $[1; +\infty[$ et strictement décroissante, dans la seconde intégrale pour avoir $I_\alpha = \int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1+u)} + \int_1^0 \frac{v^{\alpha+1}}{1+v} \frac{-dv}{v^2} = \int_0^1 \frac{u^{-\alpha} + u^{\alpha-1}}{1+u} du$. D'après le rappel de l'énoncé, on a donc

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \text{ car } \alpha \in]0; 1[. \text{ Ainsi, d'après la question 4.5, il vient } S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} x^{2\alpha-1}.$$