

DM 8 : INTÉGRALES DE FRESNEL

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 09 janvier 2026

On rappelle la convergence et la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note aussi $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$.

1 Calcul d'une intégrale

1.1 Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^4 + 1}$. Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^4 + 1}$.

1.2 Montrer par un changement de variables classique que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1}$.

1.3 Quelles sont les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 1$? En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^4 + 1$.

1.4 En effectuant une combinaison linéaire du type $I + \alpha J + I$, déterminer la valeur exacte de I .

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2 + i} dt$.

2 Étude de la fonction F

2.1 Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Établir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ pour $x > 0$.

2.3 Justifier que : $\forall x > 0, |F(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3 Valeur des intégrales de FRESNEL

3.1 En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$ converge et que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + i} = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$.

3.2 Déterminer une valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$ en fonction de π .

3.3 Que valent donc $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$?