CHAPITRE 11
ESPÉRANCE, VARIANCE ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES

PARTIE 11.1 : ESPÉRANCE ET VARIANCE

DÉFINITION 11.1 :
• *On définit l'espérance d'une variable aléatoire discrète* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $[0;+\infty]$, *notée* $\mathbb{E}(X)$, *par* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$ *avec la convention* $x\,\mathbb{P}(X = x) = 0$ *lorsque* $x = +\infty$ *et* $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.
• *On dit qu'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est* **d'espérance finie** *si* $\big(x\,\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ *est sommable. Dans ce cas, l'espérance de* X *est définie par* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$.

REMARQUE 11.1 : • *$\mathbb{E}(X)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel les éléments de $X(\Omega)$ sont numérotés.*
- *Si X est à valeurs dans $E = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{C}$ fini, on a $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,\mathbb{P}(X = x_k)$ (somme finie).*
- *Si Ω est fini, X est forcément à valeurs dans un ensemble fini et on a aussi $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)X(\omega)$.*
- *Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs bornées. Alors X est d'espérance finie.*

DÉFINITION 11.2 :
Une variable aléatoire discrète réelle X *admettant une espérance finie est dite* **centrée** *si* $\mathbb{E}(X) = 0$.

PROPOSITION 11.1 :
Si $A \in \mathcal{A}$, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

REMARQUE HP 11.2 : Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille d'évènements :
$\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\Big(\sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big)\Big)$ *(***formule du crible ou de** POINCARÉ*).*

THÉORÈME ÉNORME 11.2 :
Soit X une variable aléatoire discrète usuelle :
- **Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) (loi uniforme) si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$ (avec $p \in]0;1[$) (loi de BERNOULLI).**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$) (loi binomiale).**
- **Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ (avec $p \in]0;1[$) (loi géométrique).**
- **Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$ (avec $\lambda > 0$) (loi de POISSON).**

THÉORÈME 11.3 :
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

REMARQUE 11.3 : Attention à bien commencer cette série à $n = 1$ car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{E}(X) + 1$.

THÉORÈME ÉNORME 11.4 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle ou complexe sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une application f définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles ou complexes. La variable aléatoire discrète $f(X)$ admet une espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X = x)$ (transfert).

REMARQUE 11.4 : • Cette formule permet de calculer $\mathbb{E}\big(f(X)\big)$ sans avoir à calculer la loi de $f(X)$.
• Cette formule s'applique à tout type de variables aléatoires discrètes, notamment aux couples ou n-uplets de variables aléatoires discrètes.

THÉORÈME 11.5 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes complexes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies et un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire discrète complexe d'espérance finie et son espérance vérifie : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y)$.

PROPOSITION 11.6 :
• Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies :
- **Si X est à valeurs positives (si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.**
- **Si $X \leqslant Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.**

• Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes respectivement complexe et réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $|X| \leqslant Y$. Si Y est d'espérance finie alors X est d'espérance finie et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
• Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes complexes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérances finies. Si X et Y sont indépendantes alors XY est d'espérance finie et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 11.5 : Soit un entier $n \geqslant 2$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes réelles ou complexes d'espérances finies, $X_1 \cdots X_n$ aussi et $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots E(X_n)$.

DÉFINITION 11.3 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle et un entier $n \in \mathbb{N}$, on dit que X **admet un moment d'ordre n** *si X^n est d'espérance finie, le* **moment d'ordre n de X** *est alors $\mathbb{E}(X^n)$.*

REMARQUE FONDAMENTALE 11.6 : Soit deux entiers p et q tels que $1 \leqslant p \leqslant q$, si X admet un moment d'ordre q, alors X admet aussi un moment d'ordre p et on a $\mathbb{E}(|X^p|) \leqslant \mathbb{P}(|X| \leqslant 1) + \mathbb{E}(|X^q|)$. Notamment, si X admet un moment d'ordre 2, X est d'espérance finie si on prend $p = 1$ et $q = 2$.

DÉFINITION 11.4 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle qui admet un moment d'ordre 2, on définit la **variance de X**, *notée $\mathbb{V}(X)$, par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$ et son* **écart type** *par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.*
Dans ce cas, on dit que X est une **variable réduite** *si $\mathbb{V}(X) = \sigma(X) = 1$.*

THÉORÈME ÉNORME 11.7 :
Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi usuelle :
- **Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$ (loi uniforme).**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$ (loi de BERNOULLI).**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$ (loi binomiale).**
- **Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$ (loi géométrique).**
- **Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{V}(X) = \lambda$ (loi de POISSON).**

PROPOSITION 11.8 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2.
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geqslant 0$ **(König-Huygens) donc** $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.
- **Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire discrète $aX+b$ admet une variance et $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.**

<u>REMARQUE 11.7</u> : Si X est une variable aléatoire réelle admettant une variance, en notant $m = \mathbb{E}(X)$ (sa moyenne) et $\sigma = \sigma(X) > 0$ (son écart-type), la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ est centrée réduite.

PROPOSITION 11.9 :
Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec des moments d'ordre 2. Alors $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2) \times \mathbb{E}(Y^2)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si X et Y sont presque sûrement colinéaires.

DÉFINITION 11.5 :
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant des moments d'ordre 2. On définit la **covariance de X et Y**, *notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$ par* $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big)$.

PROPOSITION 11.10 :
Soit X, Y des variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec des moments d'ordre 2 :
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
- **Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$.**
- $\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X) \times \mathbb{V}(Y)$ **donc** $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.

<u>REMARQUE 11.8</u> : On peut avoir $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y soient indépendantes.

PROPOSITION 11.11 :
Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2. Alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ admet un moment d'ordre 2 : $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
Si on suppose de plus que les X_i sont deux à deux indépendantes : $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$.

PROPOSITION 11.12 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle <u>positive</u> sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance finie. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$ (inégalité de Markov).

THÉORÈME 11.13 :
Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

<u>REMARQUE 11.9</u> : Cette inégalité permet de contrôler la probabilité que X s'écarte de sa moyenne.

THÉORÈME 11.14 :
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes et suivant toutes la même loi. Si X_1 admet un moment d'ordre 2, avec $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (loi faible des grands nombres).

PARTIE 11.2 : FONCTIONS GÉNÉRATRICES

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

DÉFINITION 11.6 :
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle **série génératrice de la variable aléatoire** X *la série entière de la variable réelle* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n)t^n$.
On note G_X la fonction somme de la série génératrice (là où elle converge absolument) qu'on appelle **fonction génératrice de la variable aléatoire** X. *On a donc, quand cela existe :* $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$.

PROPOSITION 11.15 :
Avec ces notations, si $G_X(t)$ existe : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

PROPOSITION 11.16 :
La série génératrice de X converge normalement sur $[-1;1]$ et $G_X(1) = 1$.
Son rayon de convergence R_X vérifie donc $R_X \geqslant 1$.
La fonction G_X est donc continue sur $[-1;1]$ (au moins).

REMARQUE 11.10 : La loi de X et la fonction génératrice de X se caractérisent l'une et l'autre.

- *Si on connaît la loi de X :* $\forall t \in [-1;1],\ G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$.
- *Si on connaît G_X sur $[-1;1]$, on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même fonction génératrice $\Longleftrightarrow$ elles ont même loi.

THÉORÈME 11.17 :
- **Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ (uniforme) : $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \dfrac{t(1-t^n)}{n(1-t)}$ si $t \neq 1$ avec $R_X = +\infty$.**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0;1[$ (Bernoulli), alors $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p)+pt$ avec $R_X = +\infty$.**
- **Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0;1[$ (binomiale), alors $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p+pt)^n$ avec $R_X = +\infty$.**
- **Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[$, alors $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ avec $R_X = \dfrac{1}{1-p} > 1$.**
- **Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ avec $R_X = +\infty$.**

THÉORÈME 11.18 :
X admet une espérance finie $\Longleftrightarrow$ G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, on a $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

REMARQUE 11.11 : La dérivabilité de G_X en 1 est clairement vérifiée si $R_X > 1$.

PROPOSITION 11.19 :
Si $R_X > 1$, la variable X admet un moment d'ordre 2 (une variance) et on a $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$, c'est-à-dire $G''_X(1) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$. On a donc $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

THÉORÈME 11.20 :
Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

REMARQUE 11.12 : Par récurrence, si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ supposées indépendantes, alors en notant $S = X_1 + \cdots + X_n$, on a $G_S = \prod\limits_{k=1}^{n} G_{X_k}$.