

CHAPITRE 11

VARIABLES ALÉATOIRES

PARTIE 11.1 : DÉFINITIONS

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé.

DÉFINITION 11.1 :

Soit E un ensemble. Une **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que :

- L'ensemble image $X(\Omega)$ (univers image) est fini ou dénombrable (c'est le sens de "discret").
- $\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$.

Si de plus $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une **variable aléatoire discrète réelle** sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

DÉFINITION 11.2 :

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $x \in X(\Omega)$ et $U \subset X(\Omega)$:

- On note traditionnellement $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'évènement $X^{-1}(\{x\})$.
- On note communément $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$ l'évènement $X^{-1}(U)$.
- On note $\mathbb{P}(X = x)$ la probabilité de l'évènement $(X = x) = \{X = x\} = X^{-1}(\{x\})$.
- On note $\mathbb{P}(X \in U)$ la probabilité de $X^{-1}(U) = \{X \in U\}$.

Si X est une variable aléatoire discrète réelle, et si $a \in \mathbb{R}$, on notera :

- $(X \leq a)$ l'évènement $(X \leq a) = X^{-1}(]-\infty; a]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$.
- $(X \geq a)$ l'évènement $(X \geq a) = X^{-1}([a; +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq a\}$.
- $(X < a)$ l'évènement $(X < a) = X^{-1}(]-\infty; a[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}$.
- $(X > a)$ l'évènement $(X > a) = X^{-1}(]a; +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 11.1 : Si X est une variable aléatoire discrète, alors $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

PROPOSITION 11.1 :

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète et $f : E \rightarrow F$ une application (ou $f : X(\Omega) \rightarrow F$ au moins), alors l'application $f \circ X : \Omega \rightarrow F$ est une variable aléatoire discrète et on la note $f(X)$ qui est appelée l'image de la variable aléatoire X par l'application f .

DÉFINITION 11.3 :

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi de la variable aléatoire discrète** X l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0; 1]$ définie par $\forall U \subset X(\Omega), \mathbb{P}_X(U) = \mathbb{P}(X \in U)$.

REMARQUE 11.2 : La loi $\mathbb{P}_X$ est entièrement caractérisée par $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ qu'on appelle **distribution de probabilités**, car si $U \subset X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}_X(U) = \sum_{x \in U} \mathbb{P}(X = x)$.

DÉFINITION 11.4 :

On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y suivent la même loi si elles ont le même univers image et si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. On le notera $X \sim Y$.

PROPOSITION 11.2 :

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes de même loi, alors $f(X) \sim f(Y)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 11.3 : Pour connaître la loi d'une variable aléatoire X à valeurs entières, on préfère souvent étudier les valeurs de $\mathbb{P}(X \leq n)$ ou $\mathbb{P}(X \geq n)$ car on dispose des formules :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leq n) - \mathbb{P}(X \leq n-1) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1).$$

DÉFINITION 11.5 :

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $B \in \mathcal{A}$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On définit la **loi conditionnelle de X sachant B** , c'est la loi de la variable aléatoire X pour la probabilité $\mathbb{P}_B$:

$$\mathbb{P}_{X|B} : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0; 1] \text{ avec } \forall A \subset X(\Omega), \mathbb{P}_{X|B}(A) = \mathbb{P}(X \in A | B) = \frac{\mathbb{P}(B, X \in A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

PARTIE 11.2 : VARIABLES INDÉPENDANTES

DÉFINITION 11.6 :

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes**, noté $X \perp Y$, si pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire si l'on a $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)), \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

THÉORÈME 11.3 :

Ces variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si elles vérifient :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

PROPOSITION 11.4 :

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux applications $f : X(\Omega) \rightarrow F, g : Y(\Omega) \rightarrow G$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes : $X \perp Y \implies f(X) \perp g(Y)$.

DÉFINITION 11.7 :

Soit $n \geq 2$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont des **variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes** si pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, si $i \neq j$, on a

$$(\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{P}(X_i(\Omega)) \times \mathcal{P}(X_j(\Omega)), \mathbb{P}(X_i \in A_i, X_j \in A_j) = \mathbb{P}(X_i \in A_i) \times \mathbb{P}(X_j \in A_j)).$$

- On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont des **variables aléatoires discrètes indépendantes** si, $\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket$:

$$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \forall (A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) \in \prod_{j=1}^k \mathcal{P}(X_{i_j}(\Omega)), \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq j \leq k} (X_{i_j} \in A_{i_j})\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_{i_j} \in A_{i_j}).$$

REMARQUE 11.4 :

- Des variables aléatoires discrètes indépendantes sont 2 à 2 indépendantes (la réciproque est fausse).
- Si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes alors toute sous famille de celle-ci est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.

PROPOSITION 11.5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si $\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket$:

$$\forall (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \prod_{j=1}^k X_{i_j}(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq j \leq k} (X_{i_j} = x_{i_j})\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_{i_j} = x_{i_j}).$$

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $f_1, \dots, f_n$ des applications idoine, alors les variables aléatoires $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

DÉFINITION 11.8 :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que :

- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes** si elles vérifient $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m \implies X_n \text{ et } X_m \text{ sont indépendantes}$.
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de variables aléatoires discrètes indépendantes** si toute sous famille finie de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de variables aléatoires i.i.d.** (ou suite i.i.d.) signifiant **indépendante et identiquement distribuée** si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et si $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim X_0$.

REMARQUE 11.5 :

- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes si et seulement si pour tout entier naturel n , $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes 2 à 2 indépendantes mais la réciproque est fausse.

PROPOSITION 11.6 :

Si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes, $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et f et g adéquates, on a $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ indépendantes (lemme des coalitions).

REMARQUE 11.6 : On peut bien sûr étendre ce résultat au cas de plusieurs coalitions.

PARTIE 11.3 : LOIS USUELLES**DÉFINITION 11.9 :**

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0; 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit :

- la **loi de uniforme** de paramètre n (noté $X \sim \mathcal{U}(n)$) si $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et si $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$.
- la **loi de BERNOULLI de paramètre p** (noté $X \sim \mathcal{B}(p)$) si $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- la **loi binomiale de paramètres n et p** (noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) si $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et que pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
- la **loi géométrique de paramètre p** (noté $X \sim \mathcal{G}(p)$) si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.
- la **loi de POISSON de paramètre λ** (noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

PROPOSITION 11.7 :

Soit un entier $n \geq 2$, un réel $p \in]0; 1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant toutes une loi $\mathcal{B}(p)$ alors $S = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

REMARQUE HP 11.7 : Plus généralement, si on fixe $A \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0; 1[$ tel que $pA \in \mathbb{N}^*$ et $qA \in \mathbb{N}^*$ si $q = 1 - p$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, alors on considère une urne avec pA boules gagnantes et qA boules perdantes, on en tire n simultanément (sans remise) et on note X la variable qui compte le nombre de boules gagnantes, alors X suit la **loi hypergéométrique de paramètre A, n, p** . On note $X \sim \mathcal{H}(A, n, p)$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}. \text{ D'où la formule de VANDERMONDE : } \sum_{k=0}^n \binom{b}{k} \binom{c}{n-k} = \binom{a}{n} \text{ si } b + c = a.$$

PROPOSITION 11.8 :

Soit $p \in]0; 1[$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{B}(p)$. On définit la variable aléatoire discrète T par $T = +\infty$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k = 0$ et $T = \min \left(\left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 1 \right\} \right)$ sinon. Alors T suit (presque) la loi $\mathcal{G}(p)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 11.8 : • Si X suit $\mathcal{G}(p)$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$.

• Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, X suit une loi géométrique si et seulement si $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k) \in]0; 1[$ (X est dite sans mémoire).

PROPOSITION 11.9 :

Soit deux réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, et X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Alors la variable aléatoire discrète $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

PROPOSITION 11.10 :

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0; 1[^\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$ alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

REMARQUE 11.9 : On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X suivant la loi de POISSON de paramètre λ . La loi de POISSON est dite la loi des événements rares.

PARTIE 11.4 : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITION 11.10 :

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et F respectivement.

On appelle **couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y) la variable aléatoire discrète $Z : \Omega \rightarrow E \times F$, définie par $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$.

REMARQUE 11.10 : • On vérifie que Z est bien une variable aléatoire discrète.

• Par σ -additivité, on vérifie que $\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$.

DÉFINITION 11.11 :

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la loi $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{(X, Y)}$ du couple $Z = (X, Y)$ est appelée **loi conjointe du couple** $(X, Y) : \forall U \subset X(\Omega), \forall V \subset Y(\Omega), \mathbb{P}_Z(U, V) = \mathbb{P}((X \in U) \cap (Y \in V))$.

DÉFINITION 11.12 :

Soit Z une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E \times F$.

Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$. Les applications X et Y sont alors deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **lois marginales de Z** les lois des variables aléatoires discrètes X et Y .

REMARQUE 11.11 : • On vérifie que X et Y sont bien des variables aléatoires discrètes

• Si la loi de $Z = (X, Y)$ est visualisée par le tableau $(\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$:

– $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ (somme de la ligne x du tableau).

– $\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ (somme de la colonne y du tableau).

• La connaissance des lois marginales ne permet pas de recomposer la loi du couple.