TD 15 : ESPACES NORMÉS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 09 janvier 2026**

15.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$, on pose $\rho(A) = \underset{\lambda \in Sp(A)}{\mathrm{Max}} |\lambda|$ (**rayon spectral de** A).

On va montrer que pour toute norme $||\,.\,||$ de E, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

a. Montrer que si le résultat est vrai pour une norme, alors il est vrai pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Montrer que si le résultat est vrai pour une matrice A alors il est vrai pour toute matrice semblable à A.

Dans la suite, on considère la norme $||A||_\infty = \underset{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}{\mathrm{Max}} |a_{i,j}|$.

c. Montrer que si T est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent 1 alors $\lim\limits_{k \to +\infty} ||T^k||_\infty^{1/k} = 1$. Indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ nilpotente.

d. Si $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ vérifie $|a_{i,j}| \leqslant b_{i,j}$, montrer $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$. Conclure en trigonalisant $\dfrac{A}{\rho(A)}$.

15.2 *Centrale Maths1 PSI 2016* Léo Fusil (note 14)

Si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, soit $||M||_\infty = \underset{1 \leqslant i,j \leqslant n}{\mathrm{Max}} |m_{i,j}|$, $||X||_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i|$.

a. Montrer que $||\,.\,||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $||MX||_\infty \leqslant n||M||_\infty ||X||_\infty$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $\mathrm{Im}\,(A - I_n)$ sont supplémentaires en utilisant $B_p = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.

c. Montrer que la suite $(B_p)_{p \geqslant 0}$ converge vers la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(A - I_n)$.

15.3 *Mines PSI 2018* Florian Gaboriaud I (note 8)

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a + \sqrt{b + \ldots}}}}$ (il y a n radicaux).

Par exemple $u_1 = \sqrt{a}$, $u_2 = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ et $u_3 = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a}}}$.

a. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$. Indication : on pourra s'intéresser au cas $a = b$.

b. Trouver un polynôme de degré 4 (dont les coefficients dépendent de a et b) admettant $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ comme racine.

15.4 *Mines PSI 2018* Claire Raulin I (note 13,5) Soit $(f, g) \in C^0([0;1], [0;1])^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

a. On suppose que $\forall x \in [0;1],\ f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, ici $f^n(x)$ représente $f \circ \cdots \circ f$ composée n fois, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \geqslant n\alpha$. En déduire une contradiction.

b. En déduire qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

15.5 *CCP PSI 2019* Carla Chevillard II (note 15,27) Soit $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$. À toute $f \in E$, on associe les réels $N_0(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$, $N_1(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt$ et $N_2(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right| + \left|\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt\right| + \left|\displaystyle\int_0^1 f''(t)dt\right|$.

a. Donner la définition d'une norme sur un espace vectoriel.

b. Les applications N_0, N_1, N_2 sont-elles des normes sur E ?

c. Montrer que $\forall f \in E,\ \exists c \in [0;1],\ f(c) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

d. Montrer que $\forall f \in E,\ N_0(f) \leqslant N_1(f)$. Existe-t-il $f \in E$ non nulle telle que $N_0(f) = N_1(f)$?

e. Existe-t-il une constante $k > 0$ telle que $\forall f \in E,\ N_1(f) \leqslant kN_0(f)$?

15.6 *X PSI 2020* Louis Carillo II (note 7)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère une famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_m)$ génératrice de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application $\mathsf{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\mathsf{N}(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{Max}} (|(v_i|x)|)$.

a. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Trouver une famille $\mathcal{F}$ telle que N soit la norme infini classique.

c. Trouver une famille $\mathcal{F}$ telle que N soit la norme 1 classique.

d. Montrer que la norme 2 classique n'est pas une norme N obtenue comme ceci.

15.7 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu I (note 6)

Soit C une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

a. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Sup}(C)$.

On pose $X = \{|x-y| \mid (x,y) \in C^2\}$.

b. Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure.

c. Exprimer $\mathrm{Sup}(X)$ en fonction de $\mathrm{Sup}(C)$ et de $\mathrm{Inf}(C)$.

15.8 *Centrale Maths1 PSI 2022* Florian Picq (note 11)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(A,B) \in E^2$ telles que $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on pose $< A, B >= \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$ et $||A|| = \sqrt{< A, A >}$.

a. Montrer que $\forall (A,B) \in E^2,\ < A, B >= \mathrm{Tr}\ (A^T B)$.

b. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^m$. En déduire que $\forall (A,B) \in E^2,\ ||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

Soit $A \in E$ inversible et $F : E \to E$ définie par $F(M) = 2M - MAM$.

On considère une suite de matrices $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $AM_0 = M_0 A$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ M_{p+1} = F(M_p)$.

c. Montrer que si $||I_n - AM_0|| < 1$ alors $\lim\limits_{p \to +\infty} M_p = A^{-1}$.

15.9 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal II (note 12)

Soit f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

On pose $A = \{x \in [0;1] \mid f(x) = x\}$.

a. Montrer que $A \neq \emptyset$ et que A admet un minimum et un maximum.

b. En déduire l'existence d'un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

15.10 *Mines PSI 2024* Mathias Pisch II (note 8,5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et $||\,.\,||$ une norme sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a. Calculer χ_A. Indication : on pourra commencer par l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$.

b. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} ||A^n|| z^n$.

15.11 *CCINP PSI 2024* Lucie Girard II (note 12,09)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ ||u(x)|| \leqslant ||x||$.

Soit $x \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

a. Justifier l'existence d'un vecteur $y \in E$ tel que $u(y) = x + y$.

b. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(y)$ en fonction de n, x et y.

c. Que peut-on en déduire sur x ?

d. Que peut-on dire de $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ dans E ?