TD 16 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 16 janvier 2026**

16.1 *Mines PSI 2016* Owain Biddulph I (note 8) Nature et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{4n}}{4n+1}$.

16.2 *Centrale Maths1 PSI 2017* Bastien Lamagnère (note 12) Soit $\theta \in]0;\pi[$.

a. Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Quel est le rayon R de $\sum \sin(n\theta)z^n$?
b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$. Y a-t-il convergence de $\sum \sin(n\theta)z^n$?
c. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n$.

16.3 *Mines PSI 2017* Vincent Bouget II (note 16,5) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n)!}$.

16.4 *ENS Cachan PSI 2015 et Mines PSI 2017* Jean-Baptiste Biehler et Roland Tournade II

On pose $A_0(0) = 1$ par convention et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, on note $A_n(k)$ le nombre des permutations de $[\![1;n]\!]$ laissant exactement k éléments invariants.

a. Montrer que $A_n(k) = \dbinom{n}{k} A_{n-k}(0)$, et que $n! = \sum_{k=0}^{n} A_n(k)$.

b. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_n(0)}{n!} z^n$, montrer que $f(z)$ existe si $|z| < 1$.

c. Montrer que $e^z f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, en déduire le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{A_n(0)}{n!} z^n$ et la valeur de $A_n(0)$.

d. Donner la probabilité p_n qu'une permutation de $[\![1;n]\!]$ soit un dérangement. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

16.5 *X PSI 2022* Olivier Courmont III (note 15) Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2n^2+5n+3}{2^n}$.

16.6 *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Lafon (note 8)

a. Donner un exemple de série entière de rayon 1 et dont la fonction somme est majorée sur $[0;1[$.

Soit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b. Montrer que f est définie sur $]-1;1[$ et que $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$.

c. Soit une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est définie sur $]-1;1[$ et $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$.
La suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend-elle vers 0 ? Indication : reprendre la question **a.**.

16.7 *Mines PSI 2022* Peio Lanot II (note 8,5)

a. Déterminer le rayon R de $\sum \dbinom{2n}{n} x^n$ et le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dbinom{2n}{n} x^n$.
b. Montrer que f est solution d'une équation différentielle (E).
c. Résoudre (E) et en déduire une expression simple de $f(x)$.

16.8 *Mines PSI 2022* Camille Pucheu II (note 10) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

a. Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Qu'en déduire sur le rayon R de $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$?

On pose dans la suite de l'exercice la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

b. Trouver l'expression de $f''(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour $x \in]-R;R[$.
c. En déduire une expression de a_n sous forme de somme.

16.9 *CCINP PSI 2022* Marius Desvalois II (note 10,83) Soit $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

a. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$.
c. Pour $x \in]-R;R[$, trouver a, b et c tels que : $\forall t \in [0\,;1]$, $\frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{a}{1-xt} + \frac{bt}{1+t^2} + \frac{c}{1+t^2}$.
d. En déduire une expression compacte de $S(x)$ pour $x \in]-R;R[$.
e. Montrer que S est continue sur $[-1;0]$ et en déduire $S(-1)$.

16.10 *CCINP PSI 2022* Paul Mayé I (note 15,04) Soit $F : x \mapsto -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$. Rappel : $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de F.
b. Montrer que $\forall x \in [0;1],\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
c. Montrer que $\forall x \in]0;1[,\ F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

16.11 *Centrale Maths1 PSI 2024* Émile Gauvrit Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $a_n = n! \prod_{k=1}^{n} (\alpha+k)^{-1}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)\right) - \alpha\ln(n)$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
b. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} (v_n - v_{n-1})$ converge. En déduire l'existence de $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
c. Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ pour $x = \pm R$.

16.12 *Centrale Maths1 PSI 2022 et 2024* Achille Domens et Mathias Pisch (note 10 et ?)

Soit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

a. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.
b. Montrer que F est définie et développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement.
c. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que Re $\left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.
d. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

16.13 *Mines PSI 2024* Yasmine Azzaoui I (note 18)

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

16.14 *Mines-Télécom PSI 2024* Émile Gauvrit II (note 13) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Sur quelle domaine peut-on prolonger f ? f est-elle continue, dérivable, de classe C^1 ? De classe C^∞ ?

16.15 *Mines-Télécom PSI 2024* Eva Rojo I (note 8) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ si $n \geqslant 2$. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

a. Montrer que $\forall x \in]-R;R[,\ S(x) = x + S(x)^2$.
b. En déduire $S(x)$ pour $x \in]-R;R[$ et la valeur de R.
c. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.