TD 17 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 23 janvier 2026**

17.1 *Mines PSI 2017* Vincent Meslier III (note 13,5) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$.
Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et exprimer $f(x)$ avec des fonctions usuelles.

17.2 *Mines PSI 2017* Antoine Romero-Romero II (note 10) On note S la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$.

a. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière. Calculer $\lim\limits_{x\to R^-} S(x)$.

b. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers R^-.

17.3 *Mines PSI 2018* Julien Langlais II (note 10,5) Soit $a \in]-1;1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(a^n x)$. En cas de convergence, on pose $F_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
Montrer que F_a est définie et développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.
Indication : on pourra montrer d'abord que F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

17.4 *Mines PSI 2019* Thomas Crété I (note 14)

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

b. Pour $x \in]-R;R[$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

17.5 *Mines PSI 2019* Florian Guyomard II (note 10) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \text{sh}\,(xt)e^{-t^2}\,dt$.

a. Justifier l'existence de F.

b. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

17.6 *Centrale Maths1 PSI 2022* Peio Lanot (note 8)

Soit $A \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, $f : I =]-A;A[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-A;A[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur I. Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor reste intégral sur les intervalles $]-A;0[$ et $]0;A[$.

b. Montrer que $g = e^f$ est aussi développable en série entière sur I.

c. Montrer que $\tan$ est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

17.7 *Mines PSI 2022* Olivier Baesen I (note 15,5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2 - 2\text{ch}\,(\alpha)x + 1}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f_α.

b. Déterminer le développement en série entière de f_α au voisinage de 0.

17.8 *Mines PSI 2022* Lola Belle Wangue I (note 14) Soit $a \in]0;1[$ et f dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que f est égale à sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$.

17.9 *CCINP PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne I et Anatole Rousset I (note 5,68 et 12,46)

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$.

a. Donner le domaine de définition I de f et le domaine de dérivabilité de f.

b. Trouver un équivalent de f en 1^-.

c. (rajoutée, Centrale 2012) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de façons d'écrire n comme somme de 2 carrés (d'entiers naturels), ou encore $a_n = \text{card}\left(\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; p^2+q^2=n\right\}\right)$. Déterminer, pour $x \in I$, une relation entre $f(x)$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En déduire le rayon R' de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

17.10 *CCINP PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I (note 19,25) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

a. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$. Montrer que f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$.

b. Prouver que f est solution de $(E)\ :\ y' = y^2$ sur I. En déduire u_n en fonction de n.

17.11 *Centrale Maths1 PSI 2024* Lucie Girard Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

a. Montrer la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, c'est-à-dire l'existence du réel S.

b. Quel est le domaine de définition D de la fonction $I : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1}$?

c. Donner une expression simple de $I(x)$ pour certains x et en déduire la valeur de S.

d. Calcul de $\int_0^1 I(x)dx$ de deux manières différentes.

17.12 *Mines PSI 2024* Edward Bauduin II (note 12,5)

a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

b. Que dire du rayon de convergence du développement de la question précédente ?

17.13 *Mines PSI 2024* Axel Corbière I (note 14,5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $[\![1;n]\!]$ et $I_n = \text{card}\,(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Montrer que le rayon R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geqslant 1$. On définit $\varphi :]-1;1[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

c. Montrer que $\forall x \in]-1;1[,\ \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.

d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

17.14 *Mines PSI 2024* Valentine Girard I (note 12,5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un carré quadrillé avec $(n+1)^2$ cases numérotées $(x,y) \in [\![0;n]\!]^2$. On cherche à aller de la case $(0,0)$ à la case (n,n) avec pour seuls déplacement autorisés les mouvements $(0,1)$ et $(1,0)$ (vers la droite ou vers en haut).
On note d_n (avec convention $d_0 = 1$) le nombre de chemins qui vont de $(0,0)$ à (n,n) (avec ces contraintes) mais en restant toujours au-dessus (au sens large) de la diagonale $x = y$. Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$.

a. Déterminer le nombre c_n de chemins possibles (avec ces contraintes) pour aller de $(0,0)$ à (n,n).

b. Calculer d_1, d_2, d_3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$.

c. Justifier que $0 \leqslant d_n \leqslant \binom{2n}{n}$. Minorer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} d_n x^n$.

d. Donner une relation entre $xf(x)^2$ et $f(x)$ pour $x \in]-R;R[$.

e. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. Que vaut R ?

f. Donner une expression de d_n en fonction de n. Si tous les chemins allant de $(0,0)$ à (n,n) sont équiprobables, quelle est la probabilité p_n qu'un chemin reste au-dessus de la diagonale ?