TD 18 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 30 janvier 2026**

18.1 *Mines PSI 2016* Matthieu Cadiot II (note 17) Soit un sac de billes de n couleurs différentes réparties équitablement. On tire avec remise de façon indépendante. Le processus s'arrête lorsqu'on tire 2 billes de la même couleur successivement. On note X le premier entier k tel que le tirage k donne la même couleur que le tirage $k-1$, et $X = +\infty$ si une telle répétition n'intervient jamais.

a. Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$. Le processus s'arrête-t-il presque sûrement ?

b. Calculer l'espérance et la variance de X.

18.2 *Centrale Maths1 PSI 2019* Romain Cornuault (note 15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. On pose $E = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid BC^T = 0 \text{ ou } BC^T \text{ non diagonalisable}\}$.

a. Donner le rang de BA^T. Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

On prend maintenant $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B^T = (1\ 1\ \dots\ 1)$. On se donne une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$.

On pose enfin la variable aléatoire matricielle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X^T = (X_1\ X_2\ \dots\ X_n)$.

b. On note l'évènement $U =$ "BX^T diagonalisable". Calculer $\mathbb{P}(U)$.

18.3 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne I (note 19)

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n. On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

a. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.

b. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

18.4 *Mines PSI 2022* Paul Lafon II (note 18) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et des urnes notées $U_0, \cdots, U_p$ telles que U_i contient i boules blanches et $p - i$ boules noires. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit une urne au hasard et on effectue n tirages dans cette urne avec remise. La variable aléatoire N_p correspond au nombre de boules blanches tirées et, pour tout entier $i \in [\![0; p]\!]$, on définit l'évènement $A_i =$ "on choisit l'urne U_i".

a. Calculer $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)$ pour $i \in [\![0; p]\!]$ et $k \in [\![0; n]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(N_p)$ sous réserve d'existence.

b. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathbb{P}(N_p = k) = \dbinom{n}{k} \displaystyle\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx$ avec a et b à déterminer.

18.5 *CCINP PSI 2022* Lola Belle Wangue I (note 10,98) On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Soit :

- X le nombre de lancers pour obtenir la première séquence "pile-face".
- Y le numéro du premier lancer où on tombe sur "pile".

Déterminer la loi conjointe de (X, Y). Trouver la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

18.6 *CCINP PSI 2022* Manon Odelot I (note 14,47) Soit $p \in]0; 1[$ et X, Y deux variables aléatoires entières telles que, pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \dbinom{n}{k} \dfrac{p}{2^n} (1-p)^n$ si $k \leqslant n$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = 0$ sinon.

a. Déterminer la loi de Y. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[,\ \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} x^{n-k} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

b. Déterminer la loi de X. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Déterminer la loi de $Z = Y - X$. Déterminer la loi de X sachant $(Y = n)$.

18.7 *Mines-Télécom PSI 2022* Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n jetons et n urnes $U_1, \cdots, U_n$. Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on place le k^e jeton de manière équiprobable dans l'une des urnes $U_1, \cdots, U_k$. On note X_n le nombre d'urnes n'ayant pas de jetons à la fin de ce processus. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on définit la variable aléatoire B_k par $B_k = 1$ si U_k est vide et $B_k = 0$ sinon.
a. Déterminer $X_n(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$.
b. Déterminer la loi de B_k pour $k \in [\![1;n]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(B_k)$ et $\mathbb{V}(B_k)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.
c. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$. Calculer aussi $\mathbb{V}(X_n)$.

18.8 *Centrale Maths1 PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais

Dans une marche aléatoire symétrique (autant de chance d'aller à gauche qu'à droite) sur $\mathbb{Z}$ démarrant en 0, on note X_n la variable aléatoire désignant l'abscisse du marcheur après le n-ième pas. On a donc $X_0 = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $E_k =$ " le marcheur est revenu à l'origine au moins k fois au cours de la marche entière".

Soit B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le marcheur est revenu en 0 après le i-ième pas et 0 sinon.
a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = 0)$.
b. Déterminer la loi de B_i et, pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big)$.
c. Trouver un lien entre $\Big(\sum\limits_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big)$ et E_k. En déduire que $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(E_k)$ diverge.
d. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(E_k)$ et $\mathbb{P}(E_1)$. En déduire que $\mathbb{P}(E_1) = 1$.
e. Quelle est la probabilité que le marcheur revienne une infinité de fois à l'origine ?

18.9 *Mines PSI 2024* Thomas Favant II (note 12) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que chaque X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_n \geqslant 0$ et $S : \Omega \to [0; +\infty]$ définie par $S(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)$. Déterminer la loi de S. Indication : commencer par $\mathbb{P}(S = 0)$.

18.10 *Mines PSI 2024* Bilal Mrani I Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$ avec $p \in]0;1[$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $S_k = X_1 + \cdots + X_{2k}$. On note $p(k) = \mathbb{P}(S_k = 0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
a. Déterminer l'expression de $p(k)$ et en donner un équivalent quand k tend vers $+\infty$.
b. On suppose dans cette question $p \neq 1/2$. Montrer que le nombre de retour à l'origine (le nombre d'indices n tels que $S_n = 0$) est presque sûrement fini. Indication : on pourra commencer par traduire mathématiquement le fait qu'il existe une infinité de retour à l'origine.

18.11 *Mines PSI 2024* Arya Tabrizi II (note 17) Dans une urne, il y a une boule blanche et une boule noire. On prend une boule : - si elle est blanche, stop - si elle est noire, on la remet et on ajoute une blanche. On note Y le rang du tirage d'une boule blanche en convenant que $Y = 0$ si on n'obtient jamais de boule blanche. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

18.12 *CCINP PSI 2024* Tom Sanchez I (note 10,85) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1;N]\!]$. On considère une urne avec $N - r$ boules blanches et r boules noires. On tire une boule successivement et sans remise dans cette urne, on note X_N le numéro du tirage lors duquel on retire la dernière boule noire.
a. Donner la loi de X_N et l'espérance de X_N dans les cas particuliers $r = 1$ et $r = N$.
b. On suppose dorénavant que $1 < r < N$. Pour $k \in [\![1;N]\!]$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X_N = k)$.
c. En déduire $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N et r.

18.13 *Mines-Télécom PSI 2024* Mattéo Aumaitre I (note 10) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $S = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ et $\lambda < \mu$ ses deux valeurs propres.
a. Calculer λ et μ en fonction de X et Y.
b. Quelle est la probabilité pour que S soit inversible ?
c. Quelle est la probabilité pour que S soit définie positive (c'est-à-dire $\lambda > 0$ car $\mu > 0$) ?