TD 19 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 06 février 2026**

19.1 *Mines PSI 2017* Sam Mamers II (note 13) Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x$.

a. Montrer que e^{uN} admet une espérance finie pour tout réel $u > 0$.

b. Montrer que pour tout $y > 0$, on a $\underset{u>0}{\text{Inf}}\left(\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})\right) = e^{-\lambda h(y)}$.

c. En déduire que $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant e^{-\lambda h(y)}$.

19.2 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Elio Garnaoui II (note 10,5)

Déterminer les lois de X et Y, non presque sûrement constantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, telles que $\mathbb{P}(X+Y > 4) = \mathbb{P}(X+Y = 3) = \mathbb{P}(X+Y = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(X+Y=0) = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X+Y=2) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X+Y=4) = \dfrac{1}{3}$.

19.3 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Courmont I (note 20)

Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire les n boules successivement et sans remise. On note X_k le numéro de la boule obtenue au tirage $k \in [\![1;n]\!]$. On dit qu'on a un pic au tirage k si $\forall i \in [\![1;k-1]\!]$, $X_i < X_k$. En particulier, on a toujours un pic au tirage 1. On note S_n le nombre de pics lors de ce tirage. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note T_k la variable de Bernoulli valant 1 s'il y a un pic au tirage k.

a. Calculer $\mathbb{P}(S_n = n)$ et $\mathbb{P}(S_n = 1)$. Donner la loi de T_k.

b. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(S_n)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(T_i = 1, T_j = 1) = \dfrac{1}{i\,j}$ si $1 \leqslant i < j \leqslant n$. T_i et T_j sont-elles indépendantes ?

d. Calculer $\mathbb{V}(S_n)$ et en donner un équivalent.

19.4 *Centrale Maths1 PSI 2022* Amandine Darrigade (note 14)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ qui suivent la loi $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre S_n ?

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1)$, $\mathbb{P}(|S_n| = 2)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k)$, $\mathbb{P}(|S_n| = k+1)$ et $\mathbb{P}(|S_n| = k-1)$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

e. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

f. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|S_n|) = +\infty$.

g. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(|S_n|)$ quand n tend vers $+\infty$.

19.5 *Centrale Maths1 PSI 2022* Camille Pucheu (note 18)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes suivant toutes la même loi. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $M_n = \text{Max}(X_1, \cdots, X_n)$.

a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(M_n \leqslant k-1) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1)^n$.

b. Soit ici un réel $\alpha > 1$ tel que la variable aléatoire X_1^α admette une espérance finie notée m_α. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1) \geqslant 1 - \dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$. En déduire que M_n admet une espérance finie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On suppose ici que X_1 suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Montrer que M_n admet une espérance finie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\mathbb{E}(M_n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1 - (1-2^{-k})^n\right)$.

d. En déduire une expression de $\mathbb{E}(M_n)$ sous forme de somme finie.

19.6 *Centrale Maths1 PSI 2022* Matis Viozelange (note 15)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, des réels $x_1, \cdots, x_n$ distincts et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = x_k) > 0$. On définit aussi la fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\Phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.
a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\Phi(t)| \leqslant 1$. Établir que $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} 1 - \mathbb{V}(X)t^2 + o(t^2)$.
b. On suppose que $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\exists t_0 \in \mathbb{R}^*,\ |\Phi(t_0)| = 1$.
c. On suppose dorénavant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi(t_0)| = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{i(x_k t_0 - \alpha)} p_k$. En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$.

19.7 *ENS Cachan PSI 2022 et Centrale Maths1 PSI 2024* Lucas Lacampagne, Tristan Cheyrou (note 11 et ?)

a. Donner le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} \dfrac{x^{2n}}{4^n}$. Montrer : $\forall x \in]-R; R[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{x^{2n}}{4^n} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = \pm 1) = 1/2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $T = \mathrm{Min}(\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\})$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \neq \emptyset$ et $T = +\infty$ sinon.
b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = \dfrac{1 + X_k}{2}$. Donner la loi de Y_k, puis celle de $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
c. En déduire la loi de S_n, son espérance et sa variance. Que représente S_n ?
On pose $p_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On pose aussi $q_k = \mathbb{P}(T = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
d. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$. On pose alors $p(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.
e. Montrer que $p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$ si $n \geqslant 1$, puis $G_T(x) = \dfrac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$ si $|x| < 1$. En déduire la loi de T et $\mathbb{E}(T)$.

19.8 *Mines PSI 2024* Tristan Cheyrou I (note 11) Soit deux réels $q \in]0; 1[$ et $a \in \mathbb{R}_+$ et deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que l'on ait $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = aq^{i+j}$.
a. Exprimer a en fonction de $p = 1 - q$. Trouver les lois de X et Y. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
b. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de $U = \mathrm{Max}(X, Y)$ sachant $X + Y = 2n + 1$.

19.9 *Mines PSI 2024* Olivier Farje II (note 14) Soit $p \in]0; 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $A = \left\{\omega \in \Omega \ \middle|\ \sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{X_k(\omega)}{k} \text{ converge}\right\}$. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

19.10 *CCINP PSI 2024* Mattéo Aumaitre I (note 19,16) Soit $p \in]0; 1[$, $q = 1 - p$ et $r \in \mathbb{N}$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $p_n = q^r p^n \binom{n + r - 1}{r - 1}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p_n$.
a. Rappeler le développement en série entière de $\dfrac{1}{1 - x}$. En déduire celui de $\dfrac{1}{(1 - x)^r}$.
b. Vérifier que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilité.
c. Déterminer la fonction génératrice de X. Calculer l'espérance et la variance de X.

19.11 *CCINP PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais I (note 16,03) On tire avec remise dans une urne de $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. On note X_n le premier rang tel qu'une autre boule que la première soit tirée.
a. Montrer que X_n est une variable aléatoire discrète et déterminer la loi de X_n.
b. Montrer que X_n admet une espérance et la calculer. Trouver la limite de $(\mathbb{E}(X_n))$. Interpréter.
Soit Y_n le premier rang tel que toutes les boules de l'urne aient été tirées au moins une fois.
c. Déterminer la loi de Y_2. Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $i < j$, trouver $\mathbb{P}_{(X_3 = i)}(Y_3 = j)$. En déduire la loi de Y_3.

19.12 *CCINP PSI 2024* Émile Gauvrit II (note 14,24) Soit $\lambda > 0$ et une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
Montrer $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, puis $\forall a > 0,\ \forall t \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a}$. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.