

CHAPITRE 8

INTÉGRALES À PARAMÈTRE

THÉORÈME ÉNORME 8.1 :

Continuité “sous le signe somme” : soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H₁) pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ,
- (H₂) pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- (H₃) $\exists \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, intégrable sur J avec $\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

THÉORÈME ÉNORME 8.2 :

Continuité “sous le signe somme” : soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H₁) pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ,
- (H₂) pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- (H₃) pour tout segment $[a; b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x, t) \in [a; b] \times J, |f(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

THÉORÈME ÉNORME 8.3 :

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ et a une borne de I ($a = \pm\infty$ est possible) telles que :

- (H₁) il existe $h : J \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $t \in J, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = h(t)$,
- (H₂) pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ et h sont continues par morceaux sur J ,
- (H₃) $\exists \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ cont. par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors h est intégrable sur J et la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ admet une limite en a qui est donnée par la relation $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \int_J h$ (TCD à paramètre continu).

THÉORÈME ÉNORME 8.4 :

Dérivation “sous le signe somme” : soit I et J des intervalles et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

- (H₁) pour tout $t \in J, x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur I ,
- (H₂) $\forall x \in I, t \mapsto f(x, t), t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morc. sur J et $t \mapsto f(x, t)$ y est intégrable,
- (H₃) $\exists \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ est C^1 sur I et $\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ (LEIBNIZ).

THÉORÈME ÉNORME 8.5 :

Dérivation “sous le signe somme” : soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H₁) $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur I ,
- (H₂) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morc. sur J et $t \mapsto f(x, t)$ y est intégrable,
- (H₃) pour tout segment $[a; b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x, t) \in [a; b] \times J$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ est C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ (LEIBNIZ).

PROPOSITION 8.6 :

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

- $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^n sur I .
- $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
- $\forall [a; b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b,n} : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x, t) \in [a; b] \times J$, $\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b,n}(t)$.

Alors $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ est C^n sur I et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\forall x \in I$, $g^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$.

PROPOSITION 8.7 :

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H₁) $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^∞ sur I ,
- (H₂) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ,
- (H₃) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- (H₄) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall [a; b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b,n} : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x, t) \in [a; b] \times J$, $\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b,n}(t)$.

Alors $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ est C^∞ sur I et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $g^{(n)}(x) = \int_J \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 8.1 : Soit Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$:

- Γ (fonction “Gamma” d’EULER) est définie sur \mathbb{R}_+^* , et de classe C^∞ sur son ensemble de définition.
- $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}$.

EN PRATIQUE : Pour étudier une fonction définie par $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$:

- On identifie l’intervalle J (on inclut ou pas les bornes a ou b).
- On vérifie que $t \mapsto f(x, t)$ est bien continue par morceaux et on détermine l’ensemble de définition de g qu’on décompose en intervalles I .
- On traite si possible élémentairement la parité, monotonie, limite aux bornes....
- On montre l’aspect C^0 de g avec le théorème ad hoc éventuellement sur tout segment.
- On montre l’aspect C^1 de g avec le théorème ad hoc éventuellement sur tout segment.
- Pour obtenir une nouvelle expression de $g(x)$ (sans intégrale), on peut utiliser la formule de LEIBNIZ pour établir une équation différentielle vérifiée par g qu’on intègre.