DS 4.1 : INSPIRÉ DE CCP MP 2012 MATHS2

PSI 1 2025/2026 **samedi 06 décembre 2025**

PARTIE 1 : GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES

1.1 Pour $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\phi_A(\alpha M+\beta N) = A(\alpha M+\beta N)-(\alpha M+\beta N)A = \alpha\phi_A(M)+\beta\phi_A(N)$ donc $\boxed{\phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).}$ $\phi_A(I_n) = AI_n - I_nA = 0$ et $\phi_A(A) = A^2 - A^2 = 0$ donc $\boxed{(I_n, A) \in (\operatorname{Ker}\phi_A)^2.}$

1.2 *Cas* $n = 2$ *:*

1.2.1 Avec des calculs de produits matriciels simples, $\phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{1,2} + cE_{2,1}$, de même $\phi_A(E_{1,2}) = -cE_{1,1} + (a-d)E_{1,2} + cE_{2,2}$, $\phi_A(E_{2,1}) = bE_{1,1} + (d-a)E_{2,1} - bE_{2,2}$ et $\phi_A(E_{2,2}) = bE_{1,2} - cE_{2,1}$.

On a donc, par définition, $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}}.$

1.2.2 ϕ_A est nulle si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$ est nulle, c'est-à-dire que $\phi_A = 0 \iff (b = c = 0 \text{ et } a = d) \iff (A = aI_2)$. Ainsi, $\boxed{\phi_A = 0 \text{ si et seulement si } A \text{ est scalaire.}}$

1.2.3 On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = X^2-(a+d)X+ad-bc$ donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R} \iff \Delta = (a-d)^2+4bc \geqslant 0$ en notant Δ le discriminant de χ_A. Traitons trois cas :

Si $\underline{\Delta < 0}$, alors A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car χ_A n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Si $\underline{\Delta > 0}$, χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $\underline{\Delta = 0}$, alors A admet une valeur propre double λ donc A n'est pas diagonalisable (car sinon elle serait semblable à λI_2 donc on aurait $A = \lambda I_2$ contrairement à l'énoncé).

On en déduit que $\boxed{(A \text{ est diagonalisable}) \iff (a-d)^2 + 4bc > 0.}$

1.2.4 La factorisation de χ_{ϕ_A} étant donnée, il suffit de développer bêtement χ_{ϕ_A} et de vérifier sa factorisation.

Sinon, $\chi_{\phi_A} = \begin{vmatrix} X & c & -b & 0 \\ b & X-a+d & 0 & -b \\ -c & 0 & X-d+a & c \\ 0 & -c & b & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & X \\ b & X-a+d & 0 & -b \\ -c & 0 & X-d+a & c \\ 0 & -c & b & X \end{vmatrix}$ après $L_1 \longleftarrow L_1 + L_4$

puis $\chi_{\phi_A} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 2X \\ b & X-a+d & 0 & 0 \\ -c & 0 & X-d+a & 0 \\ 0 & -c & b & X \end{vmatrix}$ après $C_4 \longleftarrow C_4+C_1$ et on développe par rapport à la dernière colonne pour avoir $\boxed{\chi_{\phi_A} = X^2\left(X^2-(d-a)^2-4bc\right)}$ comme attendu.

1.2.5 ($\Longleftarrow$) Si A est diagonalisable, alors $(d-a)^2+4bc>0$ d'après 1.2.3 donc ϕ_A admet 2 valeurs propres simples $\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}$ et une valeur propre double 0 d'après 1.2.4. De plus, (I_2, A) est libre (car A n'est pas scalaire) de $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ donc $\dim E_0(\phi_A) \geqslant 2 = m_0(\phi_A)$ ce qui montre que $\dim E_0(\phi_A) = 2$ et, toujours d'après le cours, que ϕ_A est diagonalisable.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, si ϕ_A est diagonalisable alors χ_{ϕ_A} est scindé sur $\mathbb{R}$, d'où $(a-d)^2+4bc \geqslant 0$. Si on avait $(a-d)^2+4bc=0$, alors $\mathrm{Sp}(\phi_A)=\{0\}$ donc ϕ_A ne serait pas diagonalisable (sinon la matrice de ϕ_A dans une base de vecteurs propres serait nulle donc on aurait $\phi_A=0$, exclu par l'énoncé et 1.2.2).

Par double implication, ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(a-d)^2+4bc>0$. On a donc bien, d'après 1.2.3, l'équivalence $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable.}}$

1.3 *Cas d'une projection :*

1.3.1 Puisque $A^2=A$, $\phi_A^2(M)=\phi_A(AM-MA)=A(AM-MA)-(AM-MA)A=AM-2AMA+MA$ pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis $\phi_A^3(M)=\phi_A(AM-2AMA+MA)=A(AM-2AMA+MA)-(AM-2AMA+MA)A$ donc $\phi_A^3(M)=AM-2AMA+AMA-AMA+2AMA-MA=AM-MA$ donc $\phi_A^3(M)=\phi_A(M)$ de sorte que $\phi_A^3=\phi_A$, c'est-à-dire que $\boxed{X^3-X \text{ annulateur de } \phi_A.}$

1.3.2 On sait que les valeurs propres d'un endomorphisme font partie des racines de tout polynôme annulateur de celui-ci, ainsi, comme $X^3-X=X(X-1)(X+1)$, $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_A)\subset\{-1,0,1\}.}$

1.3.3 X^3-X est un polynôme annulateur de ϕ_A et il est scindé à racines simples donc, d'après le cours, $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable.}}$ De plus, on a vu que $\phi_A(I_n)=0=0.I_n$ et $I_n\neq 0$ donc $\boxed{0\in\mathrm{Sp}(\phi_A).}$

1.3.4 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, alors u est une symétrie et on sait que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Im}(u)\oplus\mathrm{Ker}(u)=E_1(u)\oplus E_0(u)$. Il existe une base $\mathcal{B}=(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à cette décomposition de $\mathbb{R}^n$ en notant $r=\mathrm{rg}(u)$. Comme $A\neq 0$, $r\geqslant 1$ et $r<n$ car $A\neq I_n$ donc $\mathrm{Ker}(A)\neq\{0\}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$, comme on a $\forall k\in[\![1;r]\!]$, $u(v_k)=v_k$ et $\forall k\in[\![r+1;n]\!]$, $u(v_k)=0$, il vient $\boxed{P\in GL_n(\mathbb{R}),\ r\in[\![1;n-1]\!],\ A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}}$

1.3.5 Avec ces notations, on a $\phi_A(M)=P\left(\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)P^{-1}=P\begin{pmatrix} 0 & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ par calcul matriciel par blocs donc $\boxed{\phi_A(M)=M.}$

1.3.6 Avec $B\neq 0$ dans 1.3.5, ce qui est possible car $r\neq 0$ et $r\neq n$, on a $M\neq 0$ (car P est inversible) qui vérifie $\phi_A(M)=M=1.M$ donc M est vecteur propre associé à la valeur propre 1, d'où $1\in\mathrm{Sp}(\phi_A)$. Par un calcul analogue, si $M=P\begin{pmatrix} 0 & 0\\ B & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $B\neq 0$, ce qui est encore possible, on trouve cette fois $\phi_A(M)=-M=(-1).M$ avec $M\neq 0$ donc M est vecteur propre associé à la valeur propre -1 : $-1\in\mathrm{Sp}(\phi_A)$. Avec l'inclusion inverse déjà justifiée en 1.3.2, la 1.3.3 et ce qui précède, on a $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_A)=\{-1,0,1\}.}$

PARTIE 2 : ÉTUDE DES VALEURS PROPRES DE ϕ_A

Les polynômes caractéristiques de ϕ_A et $\widetilde{\phi}_A$ sont égaux car $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\phi_A(E_{i,j}) = \widetilde{\phi}_A(E_{i,j})$ donc la matrice de ϕ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vaut elle de $\widetilde{\phi}_A$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.1 *Trigonalisabilité de A*

2.1.1 On sait que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$ donc, β étant une valeur propre de A, β est aussi une valeur propre de A^T. Ainsi, par définition, $\boxed{\text{il existe un vecteur colonne } Y \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ tel que } A^T Y = \beta Y.}$

2.1.2 On a $XY^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\widetilde{\phi}_A(XY^T) = AXY^T - XY^T A = (AX)Y^T - X(A^T Y)^T = \alpha XY^T - X(\beta Y)^T = (\alpha - \beta)XY^T$. De plus, si $Y^T = (y_1 \ \dots \ y_n)$, la j-ième colonne de XY^T est $C_j = y_j X$ et comme $Y \neq 0$, un des y_j au moins est non nul, de même $X \neq 0$. Par conséquent, au moins une des colonnes de XY^T est non nulle ce qui prouve que $XY^T \neq 0$ donc que XY^T est un vecteur propre de $\widetilde{\phi}_A$ associé à la valeur propre $\alpha - \beta$. D'après le cours, $\alpha - \beta$ est une racine de $\chi_{\widetilde{\phi}_A}$ donc $\boxed{\alpha - \beta \text{ est une racine de } \chi_{\phi_A}.}$

2.1.3 Si α est une valeur propre complexe de A, comme A est réelle, $\beta = \overline{\alpha}$ est aussi une valeur propre de A. D'après 2.1.2, $\alpha - \overline{\alpha} = 2i\,\mathrm{Im}(\alpha)$ est alors une valeur propre de $\widetilde{\phi}_A$. Or ϕ_A est trigonalisable par hypothèse donc χ_{ϕ_A} est scindé sur $\mathbb{R}$ d'où toutes les valeurs propres de $\widetilde{\phi}_A$ sont réelles car $\chi_{\phi_A} = \chi_{\widetilde{\phi}_A}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$ et donc $\alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent, toutes les valeurs propres α de A sont réelles, ainsi χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et, d'après le cours, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\boxed{A \text{ est trigonalisable si } \phi_A \text{ est trigonalisable.}}$

2.2 *Réciproque*

2.2.1 On montre le résultat par récurrence sur k :

- Initialisation : $A^0 M = I_n M = M = M(A + \lambda I_n)^0 = M I_n = M$.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k M = M(A + \lambda I_n)^k$, alors $A^{k+1} M = A(A^k M) = AM(A + \lambda I_n)^k$ par hypothèse de récurrence et, comme $\widetilde{\phi}_A(M) = \lambda M$, on a $AM = MA + \lambda M = M(A + \lambda I_n)$ et on conclut en remplaçant ci-dessus que $A^{k+1} M = M(A + \lambda I_n)^{k+1}$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ A^k M = M(A + \lambda I_n)^k.}$

2.2.2 On pose $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et on a $P(A)M = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k M = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k M(A + \lambda I_n)^k$ d d'après 2.2.1 donc $\boxed{P(A)M = MP(A + \lambda I_n).}$ En choisissant $P = \chi_A$, avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)M = 0$ donc $M\chi_A(A + \lambda I_n) = 0$ et comme $M \neq 0$, on en déduit que $\boxed{\chi_A(A + \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible.}}$

2.2.3 On a $\det\big(\chi_A(A + \lambda I_n)\big) = \prod\limits_{i=1}^{n} \det(A + \lambda I_n - \alpha_i I_n)$ par multiplicativité du déterminant des matrices carrées donc $\det\big(\chi_A(A + \lambda I_n)\big) = \prod\limits_{i=1}^{n} \Big((-1)^n \chi_A(\alpha_i - \lambda)\Big)$. Comme $\chi_A(A + \lambda I_n)$ n'est pas inversible, il existe un indice $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $\chi_A(\alpha_i - \lambda) = 0$, c'est-à-dire $\alpha_i - \lambda$ est une des valeurs propres de A et il existe $j \in [\![1;n]\!]$ tel que $\alpha_i - \lambda = \alpha_j$. Ainsi, on a $\boxed{\lambda = \alpha_i - \alpha_j \text{ pour } i \in [\![1;n]\!] \text{ et } j \in [\![1;n]\!].}$

2.2.4 Si A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors les α_i sont tous réels puis $\lambda = \alpha_i - \alpha_j$ est aussi réel d'après 2.2.3. Ainsi, toutes les valeurs propres de $\widetilde{\phi}_A$ sont réelles donc $\chi_{\phi_A} = \chi_{\widetilde{\phi}_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit d'après le cours que ϕ_A est trigonalisable. Par conséquent, $\boxed{\phi_A \text{ est trigonalisable si } A \text{ est trigonalisable.}}$

2.3 Si N est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$ donc X^k est annulateur de N. Ainsi, on sait que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(N) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N) \subset \{0\}$ car les valeurs propres de N sont racines de tout polynôme annulateur de N. Mais comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N) \neq \emptyset$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N) = \{0\}$ donc, comme χ_N est de degré n et unitaire, on a $\chi_N = 1.(X-0)^n$ donc $\boxed{\chi_N = X^n.}$

2.4 *Nilpotence de ϕ_A*

2.4.1 On pose $N = A - \alpha I_n$, N est donc nilpotente par hypothèse donc, avec 2.3, $\chi_N = X^n$. Ainsi, $\chi_A = \det(XI_n - A) = \det((X-\alpha)I_n - N) = \chi_N(X-\alpha) = (X-\alpha)^n$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\alpha\}.}$

2.4.2 D'après 2.2.3, la seule valeur propre de ϕ_A est alors $\lambda = \alpha - \alpha = 0$ donc $\mathrm{Sp}(\phi_A) = \{0\}$ ce qui montre que $\chi_{\phi_A} = X^{n^2}$ et le théorème de Cayley-Hamilton permet d'avoir $\phi_A^{n^2} = 0$ donc $\boxed{\phi_A \text{ est nilpotent.}}$

2.5 *Réciproque*

2.5.1 D'après la question 2.3, comme ϕ_A est nilpotent, en passant par la matrice de ϕ_A dans une base, on a $\chi_{\phi_A} = X^{n^2}$ donc $\chi_{\phi_A} = \chi_{\widetilde{\phi}_A} = X^{n^2}$ ce qui montre que $\boxed{\mathrm{Sp}(\widetilde{\phi}_A) = \{0\}.}$ Si α et β sont deux valeurs propres de A alors, d'après 2.1.2, $\alpha - \beta$ est une valeur propre de ϕ_A donc $\alpha - \beta = 0$. Ainsi, on peut conclure que

$\boxed{A \text{ ne possède qu'une seule valeur propre complexe.}}$

En effet, il existe une moins une valeur propre complexe de $\widetilde{\phi}_A$ car les valeurs propres de $\widetilde{\phi}_A$ sont les racines de $\chi_{\widetilde{\phi}_A}$ qui est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ par le théorème de D'Alembert-Gauss.

2.5.2 Si $\alpha \notin \mathbb{R}$ alors, comme A est réelle, $\overline{\alpha}$ est aussi une valeur propre de A car $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$. Or $\overline{\alpha} \neq \alpha$ car $\alpha \notin \mathbb{R}$, donc A aurait au moins deux valeurs propres distinctes, ce qui contredirait 2.5.1. Ainsi, $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}.}$ Puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\alpha\}$, on a $\chi_A = (X-\alpha)^n$ car χ_A est unitaire de degré n donc, par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(A - \alpha I_n)^n = 0$ et $\boxed{A - \alpha I_n \text{ est nilpotente.}}$

PARTIE 3 : ÉTUDE DE DIAGONALISABILITÉ

3.1 *Diagonalisabilité de ϕ_A*

3.1.1 Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on a $D = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}$ donc $DE_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k} E_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{k,i} E_{k,j} = \lambda_i E_{i,j}$ et, de même, $E_{i,j} D = \lambda_j E_{i,j}$. Ainsi, $\boxed{DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}.}$

3.1.2 Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $A = PDP^{-1}$ donc $\phi_A(B_{i,j}) = P\left(DE_{i,j} - E_{i,j}D\right)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$. P étant inversible et $E_{i,j} \neq 0$, on a $B_{i,j} \neq 0$, donc $\boxed{B_{i,j} \text{ est un vecteur propre de } \phi_A \text{ associé à la valeur propre } \lambda_i - \lambda_j.}$

3.1.3 L'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire, donc ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\psi(M) = 0 \Longrightarrow M = 0$ car P est inversible donc ψ est injective. D'après le cours, ψ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, en ce titre, transforme une base en une base. Ainsi, $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car image par ψ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de ϕ_A, ce qui est la définition de $\boxed{\phi_A \text{ diagonalisable.}}$

3.2 *Réciproque*

3.2.1 Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on a $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ par définition donc $AP_{i,j}X = (P_{i,j}A + \lambda_{i,j}P_{i,j})X$ et $AP_{i,j}X = P_{i,j}(AX) + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$ donc $\boxed{\mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}.}$

3.2.2 Comme $X \neq 0$, on peut compléter la famille libre (X) de $\mathbb{R}^n$ en une base $\mathcal{B} = (X, X_2, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Il existe donc, d'après le cours, un unique endomorphisme ν de $\mathbb{R}^n$ qui envoie $\mathcal{B}$ sur $(Y, 0, \ldots, 0)$ (par exemple). Ceci se traduit, en notant M la matrice de ν dans la base canonique, par $MX = Y$ et $\forall i \in [\![2;n]\!]$, $MX_i = 0$. Comme $(P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut décomposer $M = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}P_{i,j}$, ce qui donne $Y = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}P_{i,j}X$. Comme ceci est valable pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$, on vient d'établir que la famille $(P_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$, et on peut donc en extraire une base de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de A car les $P_{i,j}X \neq 0$ sont des vecteurs propres de A d'après 3.2.1. Ainsi, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

PARTIE 4 : ÉTUDE DES VECTEURS PROPRES DE ϕ_A ASSOCIÉS À LA VALEUR PROPRE 0

4.1 *Base de* $\mathbb{R}[A]$

4.1.1 $(I_n, A, \ldots, A^m)$ est une famille de $m+1$ vecteurs de $\mathbb{R}[A]$ qui est de dimension m, elle est donc liée par théorème. Il existe donc $m+1$ réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$, non tous nuls, tels que $\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i A^i = 0$, ce qui montre que le polynôme $\boxed{P = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i X^i \text{ est annulateur de } A \text{ avec } P \neq 0 \text{ et } \deg(P) \leqslant m.}$

4.1.2 Procédons par double inclusion :

($\supset$) si $M \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$ tel que $M = \sum\limits_{i=0}^{d-1} \alpha_i A^i = U(A)$ avec $U = \sum\limits_{i=0}^{d-1} \alpha_i X^i$ et on en déduit que $M \in \mathbb{R}[A]$.

($\subset$) Si $M \in \mathbb{R}[A]$, il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = U(A)$. On écrit la division euclidienne de U par P et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ tels que $U = PQ + R$ car $\deg(R) < \deg(P)$. En notant $R = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i X^i$, on a $M = U(A) = (PQ+R)(A) = Q(A)P(A) + R(A) = R(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i A^i$ donc $M \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$.

Par double inclusion, on a bien établi que $\boxed{\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \text{ où } d = \deg(P).}$

4.1.3 La famille $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est génératrice de $\mathbb{R}[A]$ d'après 4.1.2 donc $m = \dim(\mathbb{R}[A]) \leqslant d$. De plus, on a vu en 4.1.1 que $d = \deg(P) \leqslant m$ et on a donc $m = d$. La famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est donc génératrice de $\mathbb{R}[A]$, constituée de $m = \dim(\mathbb{R}[A])$ vecteurs donc $\boxed{d = m \text{ et } \left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A].}$

4.2 Pour tout $k \in [\![0; m-1]\!]$, on a $\phi_A(A^k) = AA^k - A^kA = A^{k+1} - A^{k+1} = 0$ donc tous les vecteurs de la base $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ de $\mathbb{R}[A]$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ qui est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ainsi $\boxed{\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Ker}(\phi_A)}$ d'où $\dim(\mathbb{R}[A]) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(\phi_A))$ ce qui montre que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\phi_A)) \geqslant m.}$

4.3 *Cas où* u *est diagonalisable*

4.3.1 Raisonnons par double implication :

($\Longrightarrow$) Supposons $B \in \mathrm{Ker}(\phi_A)$, donc $AB - BA = 0$ d'où $u \circ v = v \circ u$. Comme u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v. En effet, soit $k \in [\![1; p]\!]$ et $x \in E_{\lambda_k}(u)$, alors $u(x) = \lambda_k x$ donc $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$ donc $v(x) \in E_{\lambda_k}(u)$.

($\Longleftarrow$) Supposons $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ tous stables par v. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ qu'on écrit $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $x_k \in E_{\lambda_k}(u)$ pour $k \in [\![1; p]\!]$ car $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$. Par linéarité de u et de v et comme $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $v(x_k) \in E_{\lambda_k}(u)$, on a $u \circ v(x) = u\Big(\sum_{k=1}^{p} v(x_k)\Big) = \sum_{k=1}^{p} u(v(x_k)) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(x_k) = v\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\Big) = v(u(x)) = v \circ u(x)$ donc $u \circ v = v \circ u$ ce qui devient, au niveau matriciel, $AB = BA$ donc $B \in \mathrm{Ker}(\phi_A)$.

On a montré par double implication que $\boxed{B \in \mathrm{Ker}(\phi_A) \Longleftrightarrow (\forall k \in [\![1; p]\!],\ E_{\lambda_k}(u) \text{ est stable par } v).}$

4.3.2 Soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$, la question précédente se traduit, d'après le cours, par $\boxed{B \in \mathrm{Ker}(\phi_A) \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{ est diagonale par blocs.}}$

4.3.3 Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$ (car u est diagonalisable), définissons l'application $\theta : (B_1, \ldots, B_p) \mapsto \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_p)$ qui va de $\prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. θ est linéaire et clairement injective car $\theta(B_1, \ldots, B_p) = \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_p) = 0$ implique $(B_1, \ldots, B_p) = (0, \ldots, 0)$. D'après la question précédente, son image est exactement l'ensemble des matrices $\{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \mid B \in \mathrm{Ker}(\phi_A)\}$ (v toujours l'endomorphisme canoniquement associé à B). Ainsi, θ induit un isomorphisme entre $\prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ et

$\mathsf{Ker}(\phi_A)$ (car $v \mapsto \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est aussi un isomorphisme). On en déduit $\dim(\mathsf{Ker}(\phi_A)) = \dim\left(\prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})\right)$ donc $\dim(\mathsf{Ker}(\phi_A)) = \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}))$ et on obtient $\boxed{\dim(\mathsf{Ker}(\phi_A)) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2.}$

4.3.4 Prenons ici $n = 5$ et traitons tous les cas possibles. On a $1 \leqslant p \leqslant n$ et $n = \sum_{k=1}^{p} m_k$ dans tous les cas car u est diagonalisable. On calcule alors $\dim(\mathsf{Ker}(\phi_A))$ en fonctions des valeurs de p (l'ordre des valeurs propres n'a pas d'influence sur la valeur de $\dim(\mathsf{Ker}(\phi_A))$) :

- Si $p = 1$, on a forcément $m_1 = 5$ donc $\dim(\mathsf{Ker}(\Phi_A)) = 25$ (en fait $\mathsf{Ker}(\Phi_A) = \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ car A scalaire).
- Si $p = 2$ et $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, on a $\dim(\mathsf{Ker}(\Phi_A)) = 1 + 16 = 17$.
- Si $p = 2$ et $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, on a $\dim(\mathsf{Ker}(\Phi_A)) = 4 + 9 = 13$.
- Si $p = 3$ et $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 3$, on a $\dim(\mathsf{Ker}(\Phi_A)) = 1 + 1 + 9 = 11$.
- Si $p = 3$ et $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, on a $\dim(\mathsf{Ker}(\Phi_A)) = 1 + 4 + 4 = 9$.
- Si $p = 4$ et $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $m_4 = 2$, on a $\dim(\mathsf{Ker}(\Phi_A)) = 1 + 1 + 1 + 4 = 7$.
- Si $p = 5$, on a forcément $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1$ donc $\dim(\mathsf{Ker}(\Phi_A)) = 1+1+1+1+1 = 5$ (dans ce cas, χ_A est scindé à racines simples).

$\boxed{\text{Lorsque } n = 5\text{, les dimension possibles de } \mathsf{Ker}(\phi_A) \text{ sont } 5, 7, 9, 11, 13, 17, 25.}$

4.4 *Cas où u est nilpotent d'indice n*

4.4.1 Supposons $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ liée et soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. L'ensemble $\{i \in [\![1;n]\!] \mid \alpha_i \neq 0\}$ est non vide par hypothèse et majoré, il admet donc un maximum qu'on note k. On a donc $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u^{n-i}(y) = 0$, relation à laquelle on applique u^{k-1} et, comme $u^n = 0$, on a $\alpha_k u^{n-1}(y) = 0$ alors que $\alpha_k \neq 0$ par construction et que $u^{n-1}(y) \neq 0$ par hypothèse. NON. Ainsi, la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est libre et elle admet n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ de dimension n donc $\boxed{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$

4.4.2 On a $AB = BA$ donc $u \circ v = v \circ u$ et, par une récurrence facile, $\forall j \in \mathbb{N}$, $u^j \circ v = v \circ u^j$. Posons $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$, w est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et il s'agit de montrer que $v = w$. Pour cela, il suffit de vérifier que v et w coïncident sur la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a $v(e_k) = v \circ u^{n-k}(y) = u^{n-k} \circ v(y)$. De même, $w \in \mathbb{R}[u]$ donc u et w commutent, ce qui donne $w(e_k) = w \circ u^{n-k}(y) = u^{n-k} \circ w(y)$ et comme on a $v(y) = w(y)$, on a bien $v(e_k) = w(e_k)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. On en déduit $\boxed{v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}.}$

4.4.3 On vient de voir que si $B \in \mathsf{Ker}(\phi_A)$ alors $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}$ donc $B \in \mathsf{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{n-1}) \subset \mathbb{R}[A]$. L'inclusion inverse a déjà été prouvée au 4.2 donc $\boxed{\mathsf{Ker}(\phi_A) = \mathbb{R}[A].}$ De plus, $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est génératrice de $\mathbb{R}[A]$ d'après 4.4.2 et elle est libre car si $\sum_{k=1}^{n} a_k A^k = 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} a_k u^k = 0$ donc $\sum_{k=1}^{n} a_k u^k(y) = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k v_{n-k} = 0$ donc $a_1 = \ldots = a_n = 0$. Ainsi, $n = m$ et $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathsf{Ker}(\Phi_A)$.

PARTIE 5 : VECTEURS PROPRES DE ϕ_A ASSOCIÉS AUX VALEURS PROPRES NON NULLES

5.1 On montre le résultat par récurrence sur k :

- Initialisation : $\phi_A(B^0) = \phi_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = 0 = \alpha \times 0B^0$.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on suppose $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$ alors $\phi_A\left(B^{k+1}\right) = AB^{k+1} - B^{k+1}A$ qu'on écrit $\phi_A\left(B^{k+1}\right) = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) = \phi_A\left(B^k\right)B + B^k\phi_A(B)$ donc, par hypothèse de récurrence, on parvient à $\phi_A(B^{k+1} = k\alpha B^k + B^k\alpha B = (k+1)\alpha B^k$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \phi_A\left(B^k\right) = k\alpha B^k.}$

5.2 Si B n'était pas nilpotente, on aurait $\forall k \in \mathbb{N},\ B^k \neq 0$ donc, avec la question précédente, B^k serait un vecteur propre de ϕ_A associé à la valeur propre $k\alpha$. Mais comme $\alpha \neq 0$, cela ferait une infinité de valeurs propres de ϕ_A qui est un endomorphisme en dimension finie car $\mathrm{dim}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$. C'est impossible car les valeurs propres de ϕ_A sont les racines de χ_{ϕ_A} qui est de degré n^2. Ainsi, par l'absurde, $\boxed{B \text{ est nilpotente.}}$

DS 4.2 : INSPIRÉ DE CCP PSI 2008 MATHS1

PSI 1 2025/2026 **samedi 06 décembre 2025**

PARTIE 1 : ÉTUDE DE LA FONCTION η

1.1 Il est clair que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0 \text{ si } x > 0, \text{ puis } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 \text{ si } x = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty \text{ si } x < 0.}$

1.2 Traitons deux cas :

Si $x \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 d'après 1.1 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 d'après 1.1 donc, puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est alternée, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge.

Ainsi, $\boxed{\text{le domaine de définition de la fonction } \eta \text{ est }]0\,;+\infty[.}$

1.3 On applique le théorème de continuité :

(H_1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux.

(H_2) Si $a > 0$, alors $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$ car u_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $\sum_{n\geqslant 1} u_n(a)$ converge d'après 1.2, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $\boxed{\eta \text{ est continue sur }]0\,;+\infty[.}$

1.4 D'après 1.2 et le critère spécial des séries alternées, si $x > 0$, $R_1(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(x) = \eta(x) - S_1(x)$ du signe de $u_2(x)$ donc négatif et $R_2(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} u_k(x) = \eta(x) - S_2(x) = \eta(x) - 1 + \frac{1}{2^x}$ du signe de $u_3(x)$ donc positif. Ainsi, $\boxed{1 - \frac{1}{2^x} \leqslant \eta(x) \leqslant 1 = S_1(x) \text{ si } x > 0}$ donc, $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ et $\boxed{\text{la fonction } \eta \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+^*}$. De plus, par le théorème d'encadrement, comme $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1$, on a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = 1.}$

1.5 On a vu dans le cours que $\eta(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$ et, en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Alors $\eta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\boxed{\eta(1) = \ln(2) \text{ et } \eta(2) = \frac{\pi^2}{12}.}$

PARTIE 2 : ÉTUDE DE LA FONCTION f

2.1 Pour tout réel $x > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ et que $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx} = (e^{-x})^n$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge absolument donc converge. Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2.2 On applique le théorème de continuité :

(H_1) Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux ($1 + e^{-nx} > 0$ pour $x > 0$).

(H_2) Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, alors $||u_n||_{\infty,[a;b]} = u_n(a)$ car u_n est clairement décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(a)$ converge d'après 2.1, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$ De plus, si on prend deux réels x et y tels que $0 < x < y$, on a $f(x) - f(y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n(x) - u_n(y)) < 0$ car toutes les fonctions u_n sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $n \geqslant 1$, donc que $u_n(x) - u_n(y) < 0$ et que la somme de quantités strictement négatives est strictement négative. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2.3 E est l'image de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ par une fonction continue donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, E est un intervalle. Si on veut le prouver ici, on prend deux réels $y_1 < y_2$ dans E et $y \in [y_1; y_2]$, il existe donc $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ par définition de l'image directe. Ensuite, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier sur $[\widetilde{x_1; x_2}]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [\widetilde{x_1; x_2}]$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in f(\mathbb{R}_+^*) = E$ donc E est un convexe d'où, d'après le cours, un intervalle. Toujours est-il que $\boxed{E = f(]0\,;+\infty[) \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.}$

2.4 On applique le théorème de double limite en $+\infty$:

(H_1) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} u_0(x) = \ln(2) = \ell_0$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0 = \ell_n$.

(H_2) Comme u_n est une fonction positive et décroissante sur $[1; +\infty[$, il vient $||u_n||_{\infty,[1;+\infty[} = u_n(1)$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(1)$ converge d'après 2.1 donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda = \ln 2.}$

2.5 *Calcul d'intégrales :*

2.5.1 La fonction φ et toutes les fonctions φ_k (pour $k \in \mathbb{N}$) sont continues sur $]0\,;1]$ par théorèmes généraux. De plus, $\lim\limits_{y\to 0^+} \varphi(y) = 1$, $\varphi_0(y) = \ln(y) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)$ et, par croissances comparées, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{y\to 0^+} \varphi_k(y) = 0$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann ou prolongement par continuité $\varphi(0) = 1$ et $\varphi_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ et les } \varphi_k \text{ sont est intégrables sur }]0\,;1].}$

Les fonctions $u : y \mapsto \ln(1+y)$ et $v : y \mapsto \ln(y)$ sont de classe C^1 sur $]0\,;1]$ et $u(y)v(y) \underset{0}{\sim} y\ln(y)$ donc $\lim\limits_{y\to 0^+} u(y)v(y) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties et puisque $u(1)v(1) = 0$, on en déduit que $\boxed{\int_0^1 \varphi(y)dy = -\int_0^1 \frac{\ln y}{1+y}dy.}$ Pour $k \in \mathbb{N}$, les fonctions $u : y \mapsto \ln(y)$ et $v_k : y \mapsto \frac{y^{k+1}}{k+1}$ sont de classe C^1 sur $]0\,;1]$ et $\lim\limits_{y\to 0} u(y)v_k(y) = 0$ par croissances comparées car $k+1 > 0$. Ainsi, par intégration par parties, $\int_0^1 \varphi_k(y)dy = \big[u(y)v(y)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{y}dy$ donc $\boxed{\int_0^1 \varphi_k(y)dy = -\frac{1}{(k+1)^2}.}$

2.5.2 Si $y \in]0\,;1[$, on sait que $\frac{\ln y}{1+y} = \ln(y)\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-y)^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\varphi_k(y)$. On intervertit alors la série et l'intégrale (par théorème d'intégration terme à terme vu que $]0\,;1[$ n'est pas un segment) :

(H_1) on vient de voir $\sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k\varphi_k$ converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction $S : y \mapsto \frac{\ln y}{1+y}$.

(H_2) les fonctions φ_k et la fonction S sont continues sur $]0\,;,1[$.

(H_3) les fonctions $(-1)^k\varphi_k$ sont intégrables sur $]0\,;1]$ d'après 2.5.1 (car $(-1)^k$ est une constante).

(H_4) $\int_0^1 |(-1)^k\varphi_k(y)|dy = -\int_0^1 \varphi_k(y)dy = \frac{1}{(k+1)^2}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{1}{(k+1)^2}$ converge car $2 > 1$ donc $\sum\limits_{k\geqslant 0}\int_0^1 |(-1)^k\varphi_k(y)|dy$ converge.

On en déduit que $\int_0^1 \frac{\ln y}{1+y}dy = \int_0^1 S(y)dy = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^k\varphi_k(y)dy = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^2}$ donc, après changement d'indice et avec 1.5, $\boxed{\int_0^1 \varphi(y)dy = \eta(2) = \frac{\pi^2}{12}.}$

2.5.3 Soit $x > 0$, la fonction ψ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ par théorèmes généraux et, comme $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-xt} = 0$ donc $\psi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-xt}$. Comme $x > 0$, la fonction de référence $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\boxed{\psi_x \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$

2.5.4 Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)dt$, on pose alors $y = e^{-xt}$ ou plutôt $t = -\frac{\ln y}{x} = \alpha_x(y)$ et la fonction α_x est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et réalise une bijection de $]0\,;1]$ dans $\mathbb{R}_+$ donc, comme $\alpha_x'(y) = -\frac{1}{xy}$, on a $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)dt = \int_1^0 \frac{-\ln(1+y)dy}{xy}$ donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \psi_x(t)dt = \frac{\eta(2)}{x}.}$

2.6 La fonction $t \mapsto \psi_x(t)$ est décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+$. Effectuons donc une comparaison série-intégrale. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}(x) \leqslant \int_n^{n+1} \psi_x(t)dt \leqslant u_n(x)$ donc, en sommant ces inégalités pour $n \geqslant 0$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \psi_x(t)dt \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ ce qui donne, avec la question précédente $\frac{\eta(2)}{x} \leqslant f(x) \leqslant \ln 2 + \frac{\eta(2)}{x}$, pour tout $x > 0$. On en déduit, par encadrement, que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = \eta(2).}$ Comme $\eta(2) > 0$ d'après 1.5, on a $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\eta(2)}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Comme f est strictement décroissante et continue d'après 2.2, que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$ d'après 2.4, $\boxed{E =]\ln(2)\,;+\infty[}$ avec le théorème de la bijection.

$\boxed{\textbf{2.7}}$ *Un dernier équivalent :*

$\boxed{\textbf{2.7.1}}$ Par concavité de $a : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0\,;1]$ car $a''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, on a $\forall x \in [0\,;1],\ \ln(1+x) \leqslant x$. On peut aussi étudier les deux fonctions $b : x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $c : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$, elles sont dérivables sur $[0\,;1]$ par théorèmes généraux et $\forall x \in [0\,;1],\ b'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$ et $c'(x) = x - 1 + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$ donc b et c sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;1]$. Comme $b(0) = c(0) = 0$, ces fonctions sont positives sur $[0\,;1]$ donc $\boxed{\forall x \in [0\,;1],\ 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}.}$

$\boxed{\textbf{2.7.2}}$ Puisque $\forall x > 0,\ f(x) - \ln(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et que $\forall n \geqslant 1,\ \forall x > 0,\ 0 \leqslant e^{-nx} - u_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-2nx}$ d'après la question précédente car $e^{-nx} \in [0;1]$, en sommant ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}^*$ (toutes les séries qui apparaissent convergent pour $x > 0$), on obtient l'encadrement $0 \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - (f(x) - \ln 2) \leqslant \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx}$. On sait calculer ces sommes de séries géométrique pour obtenir $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - (f(x) - \ln 2) \leqslant \dfrac{e^{-2x}}{2(1-e^{-2x})}$ pour $x > 0$ puis $\dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{e^{-x}}{2(1-e^{-2x})} \leqslant e^x(f(x) - \ln 2) \leqslant \dfrac{1}{1-e^{-x}}$. Par le théorème d'encadrement, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{e^{-x}}{2(1-e^{-2x})}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(f(x) - \ln 2) = 1$ donc $\boxed{f(x) - \ln 2 \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}.}$