

DM 08 : INTÉGRALES DE FRESNEL

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 09 janvier 2026

0.1.1 $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ et $t \mapsto \frac{t}{t^4 + 1}$ sont continues et positives sur \mathbb{R}_+ et on a $\frac{1}{t^4 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et $\frac{t}{t^4 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ donc

elles sont intégrables d'après RIEMANN sur $[1; +\infty[$: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^4 + 1}$ sont convergentes.

De plus, $J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{tdt}{t^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan(t^2) \right]_0^x$. Ainsi : $J = \int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^4 + 1} = \frac{\pi}{4}$.

0.1.2 Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dt}{t^4 + 1}$, que $f : t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ est continue et que $\varphi : u \rightarrow \frac{1}{u}$ est bijective strictement décroissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , on a $\int_0^{+\infty} f = \int_{+\infty}^0 (f \circ \varphi) \varphi'$ d'après la formule du

cours ce qui donne $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{u^4}} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1 + u^4} du$. Ainsi : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1}$.

0.1.3 $z^4 = e^{i\pi} \iff (\exists k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, z = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{4}})$ d'où Les racines de $x^4 + 1$ sont $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$

On regroupe chaque racine avec son conjugué : $x^4 + 1 = (x - e^{\frac{i\pi}{4}})(x - e^{\frac{-i\pi}{4}})(x - e^{\frac{3i\pi}{4}})(x - e^{\frac{-3i\pi}{4}})$ donc $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. Directement $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$ ce qui donne $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ par identité remarquable : $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

0.1.4 $I - \sqrt{2}J + I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} - \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^4 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1}$ d'après 1.2, et par linéarité de l'intégrale, on a :

$I - \sqrt{2}J + I = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 - \sqrt{2}t + 1)dt}{t^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(\sqrt{2}t + 1)^2 + 1}$.

Il vient donc $I - \sqrt{2}J + I = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}dt}{(\sqrt{2}t + 1)^2 + 1} = \sqrt{2} \left[\arctan(\sqrt{2}t + 1) \right]_0^{+\infty} = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Comme $J = \frac{\pi}{4}$ d'après la question 1.1, on a $2I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ donc $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

0.2.1 On définit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, f(x, t) = \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2 + i}$. On a :

(H1) pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,

(H2) pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue, intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après RIEMANN car $f(x, t) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$,

(H3) pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $|f(x, t)| = \frac{e^{-t^2 x^2}}{\sqrt{t^4 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}} = \varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (RIEMANN).

D'après un théorème du cours : F est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

0.2.2 Cette fois-ci, on prend $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$:

(H1) pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . De plus, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+i)x^2}$,

(H2) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues, intégrables sur \mathbb{R}_+ (déjà vu pour $t \mapsto f(x, t)$) car $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (car $x > 0$) donc $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ intégrable d'après RIEMANN.

(H3) pour $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2be^{-t^2 a^2} = \psi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc ψ intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Alors F est C^1 sur \mathbb{R}_+^* et d'après LEIBNIZ : $\forall x > 0$, $F'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+i)x^2} dt = -2xe^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dt$.

On pose $u = tx$ dans cette intégrale, $\varphi : u \mapsto \frac{u}{x}$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , et on obtient $F'(x) = -2e^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ d'après le rappel de la valeur de l'intégrale de GAUSS.

Au final : F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ pour $x > 0$.

0.2.3 Pour $x > 0$, on a $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(x, t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x^2}}{\sqrt{t^4 + 1}} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dt$. Par le changement de variable $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ (φ est bien bijective de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , de classe C^1 et strictement croissante et $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+), on a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$. Ainsi, on a bien

$\forall x > 0$, $|F(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2x} = 0$, par le théorème d'encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

0.3.1 Pour $0 < a < b$, on a $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt = -\sqrt{\pi} \int_a^b e^{-it^2} dt$. Comme $t \mapsto e^{-it^2}$ et F sont continues en 0 d'après 2.1, en faisant tendre a vers 0 : $F(b) - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + i} = -\sqrt{\pi} \int_0^b e^{-it^2} dt$ (R). Mais comme F admet une limite finie en $+\infty$ d'après 2.3, $b \mapsto \int_0^b e^{-it^2} dt$ aussi. En faisant tendre b vers $+\infty$ dans la relation (R), on

$a - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + i} = -\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt$ d'où $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + i} = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$.

0.3.2 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + i} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - i}{(x^2 + i)(x^2 - i)} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^4 + 1} - \frac{i}{x^4 + 1} \right) dx = I - iI = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{2\sqrt{2}}$ par linéarité et d'après les questions 1.2 et 1.4. Avec la question 3.1 : $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

0.3.3 Les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ convergent car $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$ converge (partie réelle et imaginaire) et, comme $e^{-ix^2} = \cos(x^2) - i \sin(x^2)$, $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.