DEVOIR 15 : PROJECTION INTÉGRALES

PSI 1 2025-2026 **mardi 06 janvier 2026**

QCM

1 *Projection orthogonale : soit* E *euclidien,* $p \in [\![1;n]\!]$, F *est un sous-espace de* E, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormale de* E *telle que* $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ *;* x *un vecteur de* E, *on note* $p_F(x)$ *le projeté orthogonal de* x *sur* F *et* $d(x, F)$ *la distance de* x *à* F

1.1 $p_F(x) = \sum_{k=p+1}^{n} (x|e_k)e_k$

1.2 $\forall y \in F,\ (x|y) = (p_F(x)|y)$

1.3 $d(x, F) = ||x - p_F(x)||$

1.4 $d(x, F)^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (x|e_k)^2$

2 *Hyperplan : soit* E *euclidien,* H *un hyperplan* E, a *un vecteur de* E *telle que* $H^\perp = \text{Vect}(a)$ *et* $v \in E$

2.1 $\forall x \in E,\ \big(H = \text{Vect}(x)^\perp\big) \iff \big(x \in \text{Vect}(a)\big)$

2.2 $\forall x \in E,\ \big(x \in H\big) \iff \big((a|x) = 0\big)$

2.3 $d(v, H) = \dfrac{|(a|v)|}{||a||^2}$

2.4 $d(v, H) = \dfrac{(a|v)}{||a||}$

3 *Continuité sous le signe somme : soit* I *et* J *deux intervalles,* $f : I \times J \to \mathbb{K}$ *une fonction, dire si les hypothèses qui suivent font partie des hypothèses du théorème du cours qui garantit que la fonction* $g : I \to \mathbb{K}$ *définie par* $g(x) = \int_J f(x, t)dt$ *est continue sur* I

3.1 $\forall t \in J,\ x \mapsto f(x, t)$ continue sur I

3.2 $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x, t)$ continue sur J

3.3 $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}_+,\ \forall (x, t) \in I \times J,\ |f(x, t)| \leqslant \varphi(x)$ et φ intégrable sur I

3.4 $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+,\ \forall (x, t) \in I \times J,\ |f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$ et φ intégrable sur J

4 *Fonction* Γ *: soit* $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *définie par* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

4.1 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = n!$

4.2 $\forall x > 0,\ \Gamma(x + 1) = (x + 1)\Gamma(x)$

4.3 Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

4.4 $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$

Énoncé Donner un énoncé du théorème de dérivabilité sous le signe somme.

Preuve Montrer que le domaine de définition de $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1 Soit f l'endomorphisme (on l'admet) de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(a, b, c) = (2a - 4b, b + c, b - a - c)$.

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.

a. Montrer que $\text{Im}(f)$ est le plan d'équation $x + 2y + 2z = 0$. Donner un vecteur n tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(n)^\perp$.

b. En déduire la valeur de $d = \underset{v \in \mathbb{R}^3}{\text{Min}} ||f(v) - v_0||$ où $v_0 = (1, 1, 0)$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $||f(v) - v_0|| = d$.

Exercice 2 On définit $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. On pose $f(x, t) = e^{-t^2} \cos(2xt)$.

a. Justifier que g est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$.

b. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$ (avec une IPP) et en déduire une expression de $g(x)$.

DEVOIR 15 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 15	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X	X	X	
2		X			
3	X			X	
4			X	X	

1.1 Faux : c'est $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k$ **1.2** Vrai : ceci traduit $x - p_F(x) \in F^\perp$ **1.3** Vrai : du cours **1.4** Vrai : $d(x,F)^2 = ||x - p_F(x)||^2$ et $x - p_F(x) = \sum_{k=p+1}^{n} (x|e_k)e_k$. **2.1** Faux : $x = 0_E \in \mathrm{Vect}(a)$ et $H \neq \{0_E\}^\perp = E$ **2.2** Vrai : $H^\perp = \mathrm{Vect}(a)$ équivaut à $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ **2.3** et **2.4** Faux : la bonne formule est $d(v,H) = \dfrac{|(a|v)|}{||a||}$.
3.1 Vrai : c'est (H_1) **3.2** Faux : il suffit dans (H_2) que $t \mapsto f(x,t)$ soit continue par morceaux **3.3** Faux : la domination doit se faire indépendamment de x **3.4** Vrai : c'est (H_3).
4.1 Faux : c'est $\Gamma(n) = (n-1)!$ **4.2** Faux : c'est $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ **4.3** Vrai : vu en cours par récurrence **4.4** Vrai : car Γ est continue en 1, que $\Gamma(1) = 1$ et que $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(1+x)}{x}$.

Énoncé Soit I et J des intervalles et $f : I \times J \to \mathbb{K}$ telle que :

(H_1) pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I,

(H_2) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morc. sur J et $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J,

(H_3) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = \int_J \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ (Leibniz).

Preuve Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations. On a $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ donc f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ par Riemann. De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc, f_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $1 - x < 1 \Longleftrightarrow x > 0$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, comme f_x est positive, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1 **a.** Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $2a - 4b + 2(b+c) + 2(b-a-c) = 0$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset P$. Ainsi $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$.

De plus $f(1,0,0) = (2,0,-1)$ et $f(0,0,1) = (0,1,-1)$ forment une famille libre donc $\mathrm{rg}(f) \geqslant 2$.

Par conséquent $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\mathrm{Im}(f) = P$. Clairement : $n = (1,2,2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(n)^\perp$.

b. D'après le cours $d = \underset{w\in P}{\mathrm{Min}} ||w - v_0|| = d(v_0, P) = ||v_0 - p_P(v_0)|| = ||p_{P^\perp}(v_0)||$ or $p_{P^\perp}(v_0) = \dfrac{(v_0|n)}{||n||^2}n = \dfrac{n}{3}$.
$d = \left|\left|\dfrac{n}{3}\right|\right| = 1$. Minimum atteint ssi $f(v) = p_P(v_0) = v_0 - p_{P^\perp}(v_0) = \dfrac{1}{3}\Big(2,1,-2\Big)$. Par ex. : $v = \dfrac{1}{3}\Big(1,0,1\Big)$.

Exercice 2 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, $f(x,t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$. Ainsi $g(x)$ est bien défini.

(H_1) : pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(H_2) : pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2te^{-t^2}\sin(2xt)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
(H_3) : pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) = 2te^{-t^2}$ et φ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$ car $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \int_0^{+\infty} (-2te^{-t^2})\sin(2xt)dt$.

b. On effectue ensuite une IPP dans $g'(x)$ en posant $u(t) = e^{-t^2}$ et $v(t) = \sin(2xt)$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $g'(x) = -2xg(x)$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0)e^{-x^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$.