# DEVOIR 16 : ESPACES NORMÉS

**PSI 1 2025-2026** **mardi 13 janvier 2026**

**QCM**

**1** *Convexité : soit* $(E, N)$ *un espace vectoriel normé et* $C$ *une partie non vide de* $E$

**1.1** $C$ convexe $\iff (\forall (x,y) \in C^2, \forall t \in [0;1], tx + (1-t)y \in C)$

**1.2** $C$ convexe $\iff (\forall (x,y) \in C^2, \forall t \in \mathbb{R}, tx + (1-t)y \in C)$

**1.3** une intersection de convexes en est un

**1.4** une réunion de convexes en est un

**2** *Normes : soit* $E$ *un* $\mathbb{R}$*-espace et* $N$ *une norme sur* $E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x$, $y$ *deux vecteurs non nuls de* $E$

**2.1** $N(\lambda x) \leqslant |\lambda| N(x)$

**2.2** $N(x + \lambda y) \leqslant N(x) + |\lambda| N(y)$

**2.3** $N(x+y) = N(x) + N(y) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \ x = \alpha y$

**2.4** $N(x-y) \leqslant \big|N(x) - N(y)\big|$

**3** *Normes : exemples et contre-exemples dans l'espace* $\mathbb{R}_3[X]$*, l'application* $N : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ *qui à un polynôme* $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ *associe ..... est-elle une norme dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

**3.1** $N(P) = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)|$

**3.2** $N(P) = |a| + |b| + 5|c| + |d|$

**3.3** $N(P) = \underset{x \in [0;1]}{Max} (|P(x)|)$

**3.4** $N(P) = \int_0^1 P(t)dt$

**4** *Normes usuelles dans* $\mathbb{R}^2$*: soit les normes classiques* $||\,.\,||_1$, $||\,.\,||_2$ *et* $||\,.\,||_\infty$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *et les trois boules unités associées à ces normes* $B_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid ||v||_1 < 1\}$, $B_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid ||v||_2 < 1\}$ *et* $B_\infty = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid ||v||_\infty < 1\}$

**4.1** $\forall v = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ ||v||_2 \leqslant ||v||_\infty$

**4.2** $\forall v = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ ||v||_1 \leqslant 2||v||_\infty$

**4.3** $B_1 \subset B_2$

**4.4** $B_2 \subset B_\infty$

**Définition** Soit $E = \mathbb{C}^n$ et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$. Soit deux réels $a < b$ et $E' = C^0([a;b], \mathbb{R})$ et $f \in E'$. Donner la définition de $||x||_1$, $||x||_2$, $||x||_\infty$ et $||f||_1$, $||f||_2$, $||f||_\infty$.

**Preuve** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $E$ (muni d'une norme notée $||\,.\,||$), $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule fermée $B_f(a,r) = \{x \in E \mid ||x - a|| \leqslant r\}$ est convexe.

**Exercice 1** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $N : E \to \mathbb{R}_+$ défini par $N(P) = \sum_{k=0}^{n} \left|P^{(k)}(0)\right|$. Prouver que $N$ est une norme.

**Exercice 2** Soit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne $||\,.\,||$ associée au produit scalaire canonique $(A,B) \mapsto (A|B) = tr(A^T B)$. On a vu en TD que $\forall (U,V) \in E^2, \ ||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$. Soit $A, B$ deux matrices de $E$ et $||A|| < 1$ et $I_p - A$ inversible, on définit la suite de matrices $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = I_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ U_{n+1} = AU_n + B$. On pose $M_0 = (I_p - A)^{-1}B$.

**a.** Montrer que si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = M_0$.

**b.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ U_{n+1} - M_0 = A(U_n - M_0)$.

**c.** En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers $M_0$.

**DEVOIR** 16 NOM : PRÉNOM :

**QCM** Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne $i$ colonne $j$ revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

| $i \cdot j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |

**Définition**

**Preuve**

**Exercice** 1

**Exercice** 2

**DEVOIR** 16 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

| $i \cdot j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | | X | | |
| 2 | X | X | | | |
| 3 | | X | X | | |
| 4 | | X | X | X | |

**1.1** Vrai : définition **1.2** Faux : si $t < 0$ ou $t > 1$, on sort du segment $[x; y]$ **1.3** Vrai : cours **1.4** Faux : $[0; 1] \cap [2; 3]$ n'est pas convexe dans $\mathbb{R}$.
**2.1** Vrai : on a même égalité **2.2** Vrai : par inégalité triangulaire et homogénéité **2.3** Faux : si par exemple on prend $||(x, y||_\infty = \mathrm{Max}(|x|, |y|)$ dans $E = \mathbb{R}^2$, $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$ **2.4** Faux : c'est $N(x-y) \geqslant \big|N(x)-N(y)\big|$.
**3.1** Faux : $P = X(X-1)(X-2) \neq 0$ est dans $\mathbb{R}_3[X]$ bien que $N(P) = 0$ **3.2** Vrai : classique **3.3** Vrai : classique **3.4** Faux : $N$ est linéaire mais ni homogène ni positive.
**4.1** Faux : si $v = (1, 1)$, $||v||_2 = \sqrt{2}$ et $||v||_\infty = 1$ **4.2** Vrai : $|x| + |y| \leqslant \mathrm{Max}(|x|, |y|) + \mathrm{Max}(|x|, |y|) = 2||v||_\infty$
**4.3** Vrai : $||v||_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leqslant |v_1| + |v_2| = ||v||_1$ **4.4** Vrai : $||v||_\infty = \mathrm{Max}(|v_1|, |v_2|) \leqslant \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = ||v||_2$.

**Définition** Par définition, $||x||_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $||x||_\infty = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{k\in[\![1;n]\!]} |x_k|$ et $||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$, $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$, $||f||_\infty = \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{t\in[a;b]} |f(t)| = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{t\in[a;b]} |f(t)|$ (fonctions continues sur des segments donc intégrables et théorème des bornes atteintes).

**Preuve** Soit $x$ et $y$ deux vecteurs de la boule fermée $B_f(a, r)$, ce qui se traduit par $||x-a|| \leqslant r$ et $||y-a|| \leqslant r$. Soit aussi un réel $t \in [0; 1]$, alors le vecteur $tx + (1-t)y$ est aussi dans $B_f(a, r)$ car, par inégalité triangulaire et homogénéité, $||tx+(1-t)y-a|| = ||t(x-a)+(1-t)(y-a)|| \leqslant t||x-a||+(1-t)||y-a|| \leqslant tr+(1-t)r = r$. On en déduit par définition que $B_f(a, r)$ est une partie convexe de $E$.

**Exercice 1** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P$ et $Q$ deux polynômes de $E$.

Séparation : $N(P) = 0 \iff \forall k \in [\![0; n]\!], |P^{(k)}(0)| = 0 \Longrightarrow P = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = 0$ (formule de Taylor).

Homogénéité : $N(\lambda P) = \sum\limits_{k=0}^{n} \big|\lambda P^{(k)}(0)\big| = \sum\limits_{k=0}^{n} |\lambda|\big|P^{(k)}(0)\big| = |\lambda| N(P)$ par linéarité de la dérivation.

Inégalité triangulaire : $N(P+Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} \big|(P+Q)^{(k)}(0)\big| = \sum\limits_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\big| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(0)\big| + \big|Q^{(k)}(0)\big|$ par inégalité triangulaire sur les réels. Ainsi : $N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.

Au final : $N$ est bien une norme sur $E$.

**Exercice 2** **a.** $(U_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = M$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = M$ par hypothèse. Par opérations, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} AU_n = AM$ car $||AU_n - AM|| \leqslant ||A||\,||U_n - M|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par somme, comme $U_{n+1} = AU_n + B$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = AM + B$. Par unicité de la limite, il vient $M = AM + B$ donc $(I_p - A)M = B$ et, comme $I_p - A$ est inversible, on a bien $M = M_0 = (I_p - A)^{-1}B$.
**b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - M_0 = AU_n + B - (AM_0 + B) = AU_n - AM_0 = A(U_n - M_0)$.
**c.** On a donc $||U_{n+1} - M_0|| \leqslant ||A||\,||U_n - M_0||$ par l'inégalité vue en TD donc, par une récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}$, $||U_n - M_0|| \leqslant ||A||^n\,||U_0 - M_0||$. Comme $||A|| < 1$, par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ||U_n - M_0|| = 0$, ce qui est la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = M_0$.