

DS 5.1 : EXTRAIT DE CCP PSI 2007 MATHS 2

PSI 1 2025/2026

samedi 17 janvier 2026

PARTIE 1 : UN COURT EXEMPLE

1.1 Par définition,

$$G(u, v, w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & 1-b \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & a \\ 1-b & a & 1+b^2 \end{pmatrix} \quad \text{car } \mathbb{R}^3 \text{ est}$$

muni ici de sa structure euclidienne canonique et, par exemple, $(u|v) = 1 \times a + 0 \times (1-a) + (-1) \times 0 = a$.

1.2.1 D'après l'énoncé, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi, après développement par rapport à la

seconde ligne, on a $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)) = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \end{vmatrix} = (1-a)(1+b)$.

1.2.2 On sait que la famille (u, v, w) est liée si et seulement si $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)) = 0$. D'après **1.2.1**, on a donc (u, v, w) est liée si et seulement si $a = 1$ ou $b = -1$. Traitons les deux cas :

Si $a = +1$ on a dans ce cas $G(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-b & 1 & 1+b^2 \end{pmatrix}$ et, avec la formule de SARRUS, on a $\det(G(u, v, w)) = 2(1+b^2) + 1-b + 1-b - 2 - (1+b^2) - (1-b)^2 = 0$ (après calculs).

Si $b = -1$ on a maintenant $G(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$ et, toujours avec la formule de SARRUS, $\det(G(u, v, w)) = 4(2a^2 - 2a + 1) + 2a^2 + 2a^2 - 4(2a^2 - 2a + 1) - 2a^2 - 2a^2 = 0$.

On a vérifié dans les deux cas que si (u, v, w) est liée, alors $\det(G(u, v, w)) = 0$.

1.2.3 Dans le calcul de $\det(G(u, v, w))$, après $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $\det(G(u, v, w)) = \begin{vmatrix} 2 & a & -1-b \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & 0 \\ 1-b & a & b(b+1) \end{vmatrix}$

donc, par linéarité selon C_3 , on a $\det(G(u, v, w)) = (1+b) \begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & 0 \\ 1-b & a & b \end{vmatrix}$. Après $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

et linéarité par rapport à L_3 , il vient $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Ensuite, après

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et développement par rapport à la colonne 3, on a $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2a^2 - 2a + 1 \end{vmatrix}$

ce qui donne $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2(a^2 - 2a + 1) = (1+b)^2(1-a)^2$.

On a donc $\det(G(u, v, w)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w))^2$ donc $\det(G(u, v, w)) \geq 0$ et, toujours parce (u, v, w) est

liée si et seulement si $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)) = 0$, $\det(G(u, v, w)) = 0$ si et seulement si (u, v, w) est liée.

PARTIE 2 : ÉQUIVALENCE

2.1.1 On vérifie $X_i^T CX_j = c_{i,j}$ soit par calcul direct, soit en remarquant que c'est $(X_i | CX_j)$ pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et comme (X_1, \dots, X_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n , qui est donc orthonormale pour ce produit scalaire, $(X_i | CX_j)$ est la i -ième coordonnée du vecteur CX_j , qui est la j -ième colonne de C .

2.1.2 (\Leftarrow) Si $X^T CY = 0$ pour tout couple $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ alors, en prenant $X = X_i$ et $Y = X_j$, on obtient $c_{i,j} = 0$ d'après **2.1.1** pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ donc $C = 0$.

(\Rightarrow) Si $C = 0$, on a donc $CY = 0$ pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X^T CY = X^T(0) = X^T 0 = 0$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Par double implication, on a $C = 0 \iff (\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, X^T CY = 0)$.

2.2 Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in E$, on a $(x|y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j$ par bilinéarité du produit scalaire. D'autre part, par définition du produit matriciel, on a $[AY]_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

puis $X^T AY = \sum_{i=1}^n x_i [AY]_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$ donc $(x|y) = X^T AY$.

2.3.1 Comme \mathcal{B}' est une base orthonormale de E , d'après le cours, $(x|y) = X'^T Y'$.

2.3.2 Comme $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$, d'après le cours, $X = PX'$.

2.3.3 Pour $(x, y) \in E^2$, on a $(x|y) = X^T AY = X'^T Y'$ donc $(PX')^T A(PY') = X'^T Y'$ ou $X'^T (P^T AP - I_n) Y' = 0$. Cette relation étant valable pour tout couple $(X', Y') \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on en déduit, d'après **2.1.2**, que $P^T AP = I_n$.

2.3.4 On a $A = (P^T)^{-1} P^{-1}$ (P est une matrice de passage donc $\det(P) \neq 0$ et P est inversible) d'après **2.3.3**. On en déduit que $\det(A) = \det((P^{-1})^T) \det(P^{-1}) = \det(P^{-1})^2$ donc $\det(A) > 0$ et A est inversible.

2.3.5 On applique **2.3.4** à l'espace $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ dont $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base car elle est libre par hypothèse et génératrice de F par construction. Ainsi, en notant $B = G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\det(B) > 0$.

2.4.1 Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $[MX]_i = \sum_{j=1}^n (u_i | u_j) x_j$ par définition du produit matriciel puis, par linéarité à droite du produit scalaire, $[MX]_i = \left(u_i \left| \sum_{j=1}^n x_j u_j \right. \right)$ donc $[MX]_i = (u_i | v)$.

2.4.2 On a alors $X^T MX = X^T (MX) = \sum_{i=1}^n x_i [MX]_i = \sum_{i=1}^n x_i (u_i | v) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \left| v \right. \right)$ par linéarité à gauche du produit scalaire cette fois-ci, donc $X^T MX = \|v\|^2$.

2.4.3 (\Leftarrow) Si $MX = 0$ alors $X^T MX = 0$ donc $\|v\|^2 = 0$ donc $\|v\| = 0$ et $v = 0_E$ par séparation.

(\Rightarrow) Si $v = 0$ alors $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $[MX]_i = (u_i | v) = 0$ donc $MX = 0$.

Par double implication, on a donc l'équivalence $v = 0_E \iff X^T MX = 0$.

2.4.4 Si $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $v = 0_E$, ce qui donne $MX = 0$. Comme M est inversible par hypothèse, on en déduit $X = M^{-1}(MX) = 0$ donc $x_1 = \dots = x_n = 0$ donc (u_1, \dots, u_n) est libre.

On vient de montrer avec **2.3** et **2.4** que (u_1, \dots, u_p) est libre si et seulement si $\det(G(u_1, \dots, u_p)) > 0$.

2.5.1 D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $|(u_1|u_2)| \leq \|u_1\| \times \|u_2\| = 1$ donc $|\alpha| \leq 1$.

2.5.2 La matrice $M - (1 - \alpha)I_n$ est la matrice dont tous les coefficients valent α donc, selon les valeurs de α , on a

$$\text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) = 1 \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } \text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) = 0 \text{ si } \alpha = 0.$$

On a donc $\text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) \leq 1 < n$ donc $1 - \alpha$ est valeur propre de M et, par le théorème du rang, $\dim(E_{1-\alpha}(M)) = n - \text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) \geq n - 1$. Or $\dim(E_{1-\alpha}(M)) \leq m_{1-\alpha}(M)$ d'après le cours donc $m_{1-\alpha}(M) \geq n - 1$. Le polynôme caractéristique de M vérifie donc $X_M = (X - 1 + \alpha)^{n-1}(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, χ_M est scindé sur \mathbb{R} , et comme $\chi_M = X^n - \text{tr}(M)X^{n-1} + \dots$, on obtient $\text{tr}(M) = (n - 1)(1 - \alpha) + \lambda$ en identifiant. Comme $\text{tr}(M) = n$, on a $\lambda = 1 + (n - 1)\alpha$ et

$$\chi_M = (X - 1 + \alpha)^{n-1}(X - 1 - (n - 1)\alpha).$$

2.5.3 On a $MX = \lambda X$ donc $X^T M X = \lambda X^T X = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$ et, avec **2.4.2**, $X^T M X = \|v\|^2 \geq 0$. Comme $X \neq 0$, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \text{ donc, comme } \lambda = \frac{\|v\|^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \text{ on en déduit } \lambda = 1 + (n - 1)\alpha \geq 0 \text{ ce qui donne } \alpha \geq \frac{-1}{n - 1}.$$

2.5.4 Si $\alpha = -\frac{1}{n - 1}$ alors $\lambda = 0$ est valeur propre de M et on vérifie que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 0. En utilisant à nouveau **2.4.2**, on a $X^T M X = \|v\|^2$ mais, comme $MX = 0$, on en déduit $\|v\|^2 = 0$ donc

$$v = 0_E.$$

PARTIE 3 : DISTANCE À UN SOUS-ESPACE

3.1.1 On obtient $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_{n-1}) & \lambda(v_1|v_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \cdots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & \lambda(v_{n-1}|v_n) \\ \lambda(v_n|v_1) & \cdots & \lambda(v_n|v_{n-1}) & \lambda^2(v_n|v_n) \end{vmatrix}$ par définition de

$G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)$ et par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi, par linéarité du déterminant par rapport à la dernière ligne et la dernière colonne, on a

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)) = \lambda^2 \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)).$$

3.1.2 De même, par définition de $D = \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$ et par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$D = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n) + \lambda(v_1|v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \cdots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n) + \lambda(v_{n-1}|v_1) \\ (v_n|v_1) + \lambda(v_1|v_1) & \cdots & (v_n|v_{n-1}) + \lambda(v_1|v_{n-1}) & \|v_n + \lambda v_1\|^2 \end{vmatrix}.$$
 Dans ce déterminant, on

$$\text{effectue l'opération } L_n \leftarrow L_n - \lambda L_1 \text{ pour avoir } D = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n) + \lambda(v_1|v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \cdots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n) + \lambda(v_{n-1}|v_1) \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_{n-1}) & (v_n|v_n) + \lambda(v_n|v_1) \end{vmatrix}$$

après calculs. Puis, après $C_n \leftarrow C_n - \lambda C_1$,

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1)) = \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)).$$

3.2.1 Comme $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(v_i | w) = 0$ car $v_i \in F$ et $w \in F^\perp$, tous les termes de la dernière colonne du déterminant $\det(G(v_1, \dots, v_n, w))$ sont nuls, sauf celui en case $(n+1, n+1)$ qui vaut $(w|w) = \|w\|^2$. Par développement de ce déterminant par rapport à la dernière colonne, $\det(G(v_1, \dots, v_n, w)) = \|w\|^2 \times \det(G(v_1, \dots, v_n))$.

3.2.2 D'après le cours, on a $d(v, F) = \|v - p_F(v)\|$ où $p_F(v)$ est le projeté orthogonal de v sur F . Le résultat de la question **3.1.2** se généralise avec v_k à la place de v_1 pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et, plus généralement, on établit que si $y \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ alors $\det(G(v_1, \dots, v_n, v+y)) = \det(G(v_1, \dots, v_n, v))$. Si on applique cela avec $y = -p_F(v) \in F$, on obtient $\det(G(v_1, \dots, v_n, v)) = \det(G(v_1, \dots, v_n, v-y))$ et, par définition d'un projecteur orthogonal, on a $v - p_F(v) \in F^\perp = \text{vect}(v_1, \dots, v_n)^\perp$, donc, d'après **3.2.1** appliqué avec $w = v - p_F(v)$, on obtient $\det(G(v_1, \dots, v_n, v)) = \|v - p_F(v)\|^2 \times \det(G(v_1, \dots, v_n)) = d(v, F)^2 \times \det(G(v_1, \dots, v_n))$.

3.2.3 On a vu en **1.2.3** que $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2(a-1)^2$. On calcule aussi $\det(G(u, v)) = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1-2a+2a^2 \end{vmatrix}$ et $\det(G(u, v)) = 2 - 4a + 3a^2$ donc $(2 - 4a + 3a^2)d(w, F)^2 = (1+b)^2(a-1)^2$ d'après **3.2.1**. Comme

$$2 - 4a + 3a^2 = 2(1-a)^2 + a^2 > 0, \text{ on en déduit } d(w, F) = \sqrt{\frac{(1+b)^2(a-1)^2}{2-4a+3a^2}}.$$

On retrouve $d(w, F) = 0$ si $a = 1$ ou $b = -1$, ce qui est logique puisque dans ce cas $w \in F$ d'après la partie 1.

DS 5.2 : INSPIRÉ DE CCP PSI 2013 MATHS 1

PSI 1 2025/2026

samedi 17 janvier 2026

PARTIE 1 : ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS

1.1 La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on a $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

1.2.1 La fonction $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $|\cos(2bt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$ donc, d'après la question précédente et par comparaison, $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

1.2.2 La fonction $f_n : t \mapsto t^{2n}e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc,

par comparaison aux intégrales de RIEMANN, $f_n : t \mapsto t^{2n}e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Dans I_n , on pose

$u_n : t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t)v(t) = 0 = u_n(0)v(0)$ par croissances comparées donc $I_n = \int_0^{+\infty} u'_n(t)v(t)dt = [u_n(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u_n(t)v'(t)dt$, qui s'écrit aussi

$$I_n = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-2te^{-t^2}) dt \text{ donc } I_n = \frac{2}{2n+1} I_{n+1}.$$

1.2.3 Puisque la relation finale est donnée, on peut procéder par récurrence :

Initialisation : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'énoncé (intégrale de GAUSS) donc $I_0 = \frac{(2 \cdot 0)!}{2^{2 \cdot 0}(0!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, alors $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2} \times I_n = \frac{2n+1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après

1.2.2 et par hypothèse de récurrence et $I_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(2(n+1))2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.2.4 Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{2ibt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n i^n b^n t^n}{n!}$ puis, comme $i^{2p} = (-1)^p \in \mathbb{R}$ et $i^{2p+1} = i(-1)^p \in i\mathbb{R}$,

en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans cette somme de série, comme tout converge par croissances comparées, $e^{2ibt} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}(-1)^p b^{2p} t^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(-1)^p b^{2p+1} t^{2p+1}}{(2p+1)!}$. Comme, de plus, on a

$e^{2ibt} = \cos(2bt) + i \sin(2bt)$, en identifiant, on a $\cos(2bt) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{b^{2p} t^{2p}}{(2p)!}$.

1.2.5 Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, d'après la question précédente, $\cos(2bt)e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2bt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$. Pour

intégrer terme à terme, on pose $g_n : t \mapsto (-1)^n \frac{(2bt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$.

(H₁) $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ d'après **1.2.4**.

(H₂) Toutes les fonctions g_n et la fonction $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ sont continues sur \mathbb{R}_+ par opérations.

(H₃) Toutes fonctions g_n sont intégrables sur \mathbb{R}_+ d'après **1.2.2**.

(H₄) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{\sqrt{\pi} b^{2n}}{2 n!}$ par linéarité de l'intégrale et d'après **1.2.3**

donc $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$ converge d'après l'énoncé (et la somme vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{b^2}$).

Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que $h(b) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$

donc $h(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{n!}$ donc $h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$ si $b \in \mathbb{R}$ d'après l'énoncé.

1.3.1 Pour dériver sous le signe somme, on pose $a : (b, t) \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ de sorte que $h(b) = \int_0^{+\infty} a(b, t) dt$.

(H₁) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $b \mapsto a(b, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} par opérations.

(H₂) Pour tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto a(b, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après **1.2.1..**

(H₃) Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial a}{\partial b}(b, t) = -2t \sin(2bt)e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ par opérations.

(H₃) Pour tout $(b, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $\left| \frac{\partial a}{\partial b}(b, t) \right| \leq 2te^{-t^2} = \psi(t)$ car $|\sin(2bt)| \leq 1$ avec ψ continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $\psi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Par dérivation sous le signe somme, h est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall b \in \mathbb{R}, h'(b) = \int_0^{+\infty} (-2t) \sin(2bt)e^{-t^2} dt$.

1.3.2 Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto \sin(2bt)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ avec $u(0)v(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ donc $h'(b) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = - \int_0^{+\infty} (2b \cos(2bt))e^{-t^2} dt$ par intégration par parties puis $h'(b) = -2bh(b)$ par linéarité. On a bien $\boxed{\forall b \in \mathbb{R}, h'(b) + 2bh(b) = 0.}$

1.3.3 Les solutions réelles y sur \mathbb{R} de cette équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 0$ sont, d'après le cours, les fonctions pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y : x \mapsto \lambda e^{-x^2}$. Comme h est solutions réelle sur \mathbb{R} de (E) d'après **1.3.2** et que $h(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'énoncé, on a $\boxed{\forall b \in \mathbb{R}, h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.}$

1.4.1 On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x, t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$ et on applique le théorème de continuité :

(H₁) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} par opérations.

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations.

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x, t)| \leq e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* avec **1.1**.

Par théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$. De plus, grâce au terme x^2 ,

comme $(-x)^2 = x^2$, la fonction $\boxed{\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt \text{ est paire.}}$

1.4.2 Posons à nouveau $f(x, t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

(H₁) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* par opérations.

(H₂) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* par domination d'après **1.4.1**.

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations.

(H₄) Si $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{2x}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \leq \frac{2b}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \theta_{a,b}(t)$ pour tout $x \in [a; b]$

et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\theta_{a,b}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car on a $\theta_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et

$\theta_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{2b}{t^2} e^{-a^2/t^2}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta_{a,b}(t) = 0$ par croissances comparées.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ et qu'on

a, par la formule de LEIBNIZ, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.}$

1.4.3 Pour $x > 0$, dans l'intégrale ci-dessus, on pose $t = \frac{x}{u} = \alpha_x(u)$ avec α_x qui est de classe C^1 strictement décroissante et bijective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* donc $\varphi'(x) = -2x \int_{+\infty}^0 \left(\frac{u^2}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{u^2} - u^2\right) \left(\frac{-x}{u^2}\right) du$ par changement de variable, qui se simplifie en $\boxed{\varphi'(x) = -2\varphi(x).}$

1.4.4 On en déduit, comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \lambda e^{-2x}$. Par continuité de φ en 0 d'après **1.4.1**, on a $\lambda = \varphi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'énoncé donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$

puis, par parité de φ , $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

PARTIE 2 : TRANSFORMÉE DE FOURIER

2.1.1 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, posons $m(a, t) = \frac{\cos(2at)}{1+t^2}$:

(H₁) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $a \mapsto m(a, t)$ est continue sur \mathbb{R} par opérations.

(H₂) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto m(a, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ par opérations.

(H₃) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|m(a, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = p(t)$ car $|\cos(2at)| \leq 1$ et p est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $p(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

Par théorème de continuité sous le signe somme, ψ est définie et continue et paire sur \mathbb{R} car \cos est paire.

2.1.2 $\psi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^{+\infty}$ donc $\psi(0) = \frac{\pi}{2}$.

2.2 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés, on pose $v_p(x) = j_p(x) \cos(2ax)$ pour $x \in [0, n]$:

(H₁) $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0; n]$ vers $v : x \mapsto \frac{\cos(2ax)}{2(1+x^2)} = \frac{m(a, x)}{2}$ car $\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-p^2(1+x^2)} = 0$.

(H₂) Toutes les fonctions v_p et la fonction v sont continues sur $[0; n]$.

(H₃) Pour $(p, x) \in \mathbb{N}^* \times [0; n]$, $|v_p(x)| \leq \frac{1}{2(1+x^2)}$ et $x \mapsto \frac{1}{2(1+x^2)}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; n]$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} = \int_0^n \frac{\cos(2ax)}{2(1+x^2)} dx$.

Ou par convergence uniforme sur le segment $[0; n]$ avec $\|v_p - v\|_{\infty; [0; n]} \leq \frac{1}{2} e^{-p^2}$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-p^2} = 0$.

2.3.1 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés, on pose $h(y, x) = y \cos(2ax) e^{-x^2 y^2}$:

(H₁) Pour tout $x \in [0; n]$, la fonction $y \mapsto h(y, x)$ est continue sur \mathbb{R}_+ par opérations.

(H₂) Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(y, x)$ est continue par morceaux sur $[0; n]$ par opérations.

(H₃) Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}_+$, $y \in [a; b]$ et $x \in [0; n]$, alors $|h(y, x)| \leq b$ et la fonction $x \mapsto b$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; n]$.

On en déduit par théorème de continuité sous le signe somme que k_n est continue sur \mathbb{R}_+ .

2.3.2 Si $y = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $k_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(0) = 0 = k(0)$.

Si $y \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto y \cos(2ax)e^{-x^2 y^2} = h(y, x)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ car $h(y, x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(y) = \int_0^{+\infty} y \cos(2ax)e^{-x^2 y^2} dx$. On pose alors $t = xy$ ou $x = \frac{t}{y}$ et la fonction $t \mapsto \frac{t}{y}$ est de classe C^1 , strictement croissante et bijective de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ , et on a la valeur de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(y) = \int_0^{+\infty} \cos\left(2a \frac{t}{y}\right) e^{-t^2} dt = h\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/y^2}$ d'après **1.2.5** ou **1.3.3**.

Ainsi, la suite de fonctions $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ où la fonction k a

été définie par $k(0) = 0$ et $k(y) = h\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/y^2}$ si $y > 0$.

2.4 La fonction k_n est continue sur \mathbb{R}_+ d'après **2.3.1** donc $y \mapsto k_n(y)e^{-y^2}$ est aussi continue sur \mathbb{R}_+ par produit.

De plus, $|k_n(y)| \leq \int_0^n y dy = \frac{n^2}{2}$ par inégalité triangulaire car $\forall x \in [0; n]$, $|\exp(-y^2 x^2) \cos(2ax)| \leq 1$ donc

$|k_n(y)e^{-y^2}| \leq \frac{n^2}{2} e^{-y^2}$ donc, par comparaison, la fonction $y \mapsto k_n(y)e^{-y^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

2.5 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^p y e^{-(1+x^2)y^2} dy = \left[-\frac{1}{2} e^{-(1+x^2)y^2}\right]_{y=0}^{y=p}$ donc $\int_0^p y e^{-(1+x^2)y^2} dy = j_p(x)$.

2.6 D'après **2.2**, on a $\psi(a) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} \right)$. On va donc calculer cette double limite autrement. Avec l'égalité admise, on a $u_{n,p} = \int_0^p k_n(y)e^{-y^2} dy$ et avec **2.4**, $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} = \int_0^{+\infty} k_n(y)e^{-y^2} dy$. On va alors appliquer le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\int_0^{+\infty} k_n(y)e^{-y^2} dy$ quand n tend vers $+\infty$. On pose $w_n(y) = k_n(y)e^{-y^2}$ pour $y \in \mathbb{R}_+$:

(H₁) La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction $y \mapsto k(y)e^{-y^2}$ d'après **2.3.2**.

(H₂) Les fonctions w_n sont continues sur \mathbb{R}_+ d'après **2.3.1** et la fonction $y \mapsto k(y)e^{-y^2}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ d'après **2.3.2**.

(H₃) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $|k_n(y)| \leq \int_0^n y e^{-x^2 y^2} dx \leq \int_0^{+\infty} y e^{-x^2 y^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ avec le changement de variable affine $x = \frac{t}{y}$ facile à justifier donc $|w_n(y)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2}$ pour $y \in \mathbb{R}_+$ car $w_n(0) = 0$.

La fonction $y \mapsto e^{-y^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après **1.1**.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} w_n(y) dy = \int_0^{+\infty} k(y)e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2 - \frac{a^2}{y^2}\right) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi(a)$ par théorème

de convergence dominée. Avec **1.4.4**, $\psi(a) = \frac{\pi}{2} e^{-2|a|}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ par parité de ψ .