

# DS 5.1 : EXTRAIT DE CCP PSI 2007 MATHS 2

PSI 1 2025/2026

samedi 17 janvier 2026

## PARTIE 1 : UN COURT EXEMPLE

**1.1** Par définition,

$$G(u, v, w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & 1-b \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & a \\ 1-b & a & 1+b^2 \end{pmatrix} \text{ car } \mathbb{R}^3 \text{ est}$$

muni ici de sa structure euclidienne canonique et, par exemple,  $(u|v) = 1 \times a + 0 \times (1-a) + (-1) \times 0 = a$ .

**1.2.1** D'après l'énoncé,  $\text{Mat}_{B_c}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$ . Ainsi, après développement par rapport à la

seconde ligne, on a  $\det(\text{Mat}_{B_c}(u, v, w)) = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \end{vmatrix} = (1-a)(1+b)$ .

**1.2.2** On sait que la famille  $(u, v, w)$  est liée si et seulement si  $\det(\text{Mat}_{B_c}(u, v, w)) = 0$ . D'après **1.2.1**, on a donc  $(u, v, w)$  est liée si et seulement si  $a = 1$  ou  $b = -1$ . Traitons les deux cas :

Si  $a = +1$  on a dans ce cas  $G(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-b & 1 & 1+b^2 \end{pmatrix}$  et, avec la formule de SARRUS, on a

$$\det(G(u, v, w)) = 2(1+b^2) + 1-b + 1-b - 2 - (1+b^2) - (1-b)^2 = 0 \text{ (après calculs).}$$

Si  $b = -1$  on a maintenant  $G(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$  et, toujours avec la formule de SARRUS,

$$\det(G(u, v, w)) = 4(2a^2 - 2a + 1) + 2a^2 + 2a^2 - 4(2a^2 - 2a + 1) - 2a^2 - 2a^2 = 0.$$

On a vérifié dans les deux cas que si  $(u, v, w)$  est liée, alors  $\det(G(u, v, w)) = 0$ .

**1.2.3** Dans le calcul de  $\det(G(u, v, w))$ , après  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ,  $\det(G(u, v, w)) = \begin{vmatrix} 2 & a & -1-b \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & 0 \\ 1-b & a & b(b+1) \end{vmatrix}$

donc, par linéarité selon  $C_3$ , on a  $\det(G(u, v, w)) = (1+b) \begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & 0 \\ 1-b & a & b \end{vmatrix}$ . Après  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

et linéarité par rapport à  $L_3$ , il vient  $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ . Ensuite, après

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$  et développement par rapport à la colonne 3, on a  $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & \\ a & 2a^2 - 2a + 1 & \end{vmatrix}$

ce qui donne  $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2(a^2 - 2a + 1) = (1+b)^2(1-a)^2$ .

On a donc  $\det(G(u, v, w)) = \det(\text{Mat}_{B_c}(u, v, w))^2$  donc  $\det(G(u, v, w)) \geq 0$  et, toujours parce  $(u, v, w)$  est

liée si et seulement si  $\det(\text{Mat}_{B_c}(u, v, w)) = 0$ ,  $\det(G(u, v, w)) = 0$  si et seulement si  $(u, v, w)$  est liée.

## PARTIE 2 : ÉQUIVALENCE

**2.1.1** On vérifie  $X_i^T C X_j = c_{i,j}$  soit par calcul direct, soit en remarquant que c'est  $(X_i|C X_j)$  pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$  et comme  $(X_1, \dots, X_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , qui est donc orthonormale pour ce produit scalaire,  $(X_i|C X_j)$  est la  $i$ -ième coordonnée du vecteur  $C X_j$ , qui est la  $j$ -ième colonne de  $C$ .

**2.1.2** ( $\Leftarrow$ ) Si  $X^T C Y = 0$  pour tout couple  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$  alors, en prenant  $X = X_i$  et  $Y = X_j$ , on obtient  $c_{i,j} = 0$  d'après **2.1.1** pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  donc  $C = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $C = 0$ , on a donc  $C Y = 0$  pour  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  puis  $X^T C Y = X^T (C Y) = X^T 0 = 0$  pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Par double implication, on a  $C = 0 \iff (\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, X^T C Y = 0)$ .

**2.2** Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in E$ , on a  $(x|y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j$  par bilinéarité du produit scalaire. D'autre part, par définition du produit matriciel, on a  $[AY]_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  puis  $X^T A Y = \sum_{i=1}^n x_i [AY]_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$  donc  $(x|y) = X^T A Y$ .

**2.3.1** Comme  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale de  $E$ , d'après le cours,  $(x|y) = X'^T Y'$ .

**2.3.2** Comme  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ ,  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$  et  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$ , d'après le cours,  $X = P X'$ .

**2.3.3** Pour  $(x, y) \in E^2$ , on a  $(x|y) = X^T A Y = X'^T Y'$  donc  $(P X')^T A (P Y') = X'^T Y'$  ou  $X'^T (P^T A P - I_n) Y' = 0$ . Cette relation étant valable pour tout couple  $(X', Y') \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ , on en déduit, d'après **2.1.2**, que  $P^T A P = I_n$ .

**2.3.4** On a  $A = (P^T)^{-1} P^{-1}$  ( $P$  est une matrice de passage donc  $\det(P) \neq 0$  et  $P$  est inversible) d'après **2.3.3**. On en déduit que  $\det(A) = \det((P^{-1})^T) \det(P^{-1}) = \det(P^{-1})^2$  donc  $\det(A) > 0$  et  $A$  est inversible.

**2.3.5** On applique **2.3.4** à l'espace  $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  dont  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  est une base car elle est libre par hypothèse et génératrice de  $F$  par construction. Ainsi, en notant  $B = G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ,  $\det(B) > 0$ .

**2.4.1** Pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a  $[MX]_i = \sum_{j=1}^n (u_i|u_j)x_j$  par définition du produit matriciel puis, par linéarité à droite du produit scalaire,  $[MX]_i = \left( u_i \middle| \sum_{j=1}^n x_j u_j \right)$  donc  $[MX]_i = (u_i|v)$ .

**2.4.2** On a alors  $X^T M X = X^T (M X) = \sum_{i=1}^n x_i [MX]_i = \sum_{i=1}^n x_i (u_i|v) = \left( \sum_{i=1}^n x_i u_i \middle| v \right)$  par linéarité à gauche du produit scalaire cette fois-ci, donc  $X^T M X = \|v\|^2$ .

**2.4.3** ( $\Leftarrow$ ) Si  $M X = 0$  alors  $X^T M X = 0$  donc  $\|v\|^2 = 0$  donc  $\|v\| = 0$  et  $v = 0_E$  par séparation.

( $\Rightarrow$ ) Si  $v = 0$  alors  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $[MX]_i = (u_i|v) = 0$  donc  $M X = 0$ .

Par double implication, on a donc l'équivalence  $v = 0_E \iff X^T M X = 0$ .

**2.4.4** Si  $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$  avec  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , alors alors  $v = 0_E$ , ce qui donne  $M X = 0$ . Comme  $M$  est inversible par hypothèse, on en déduit  $X = M^{-1}(M X) = 0$  donc  $x_1 = \dots = x_n = 0$  donc  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre.

On vient de montrer avec **2.3** et **2.4** que  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre si et seulement si  $\det(G(u_1, \dots, u_p)) > 0$ .

**2.5.1** D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a  $|(u_1|u_2)| \leq \|u_1\| \times \|u_2\| = 1$  donc  $|\alpha| \leq 1$ .

**2.5.2** La matrice  $M - (1 - \alpha)I_n$  est la matrice dont tous les coefficients valent  $\alpha$  donc, selon les valeurs de  $\alpha$ , on a

$$\boxed{\text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) = 1 \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } \text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) = 0 \text{ si } \alpha = 0.}$$

On a donc  $\text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) \leq 1 < n$  donc  $1 - \alpha$  est valeur propre de  $M$  et, par le théorème du rang,  $\dim(E_{1-\alpha}(M)) = n - \text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n) \geq n - 1$ . Or  $\dim(E_{1-\alpha}(M)) \leq m_{1-\alpha}(M)$  d'après le cours donc  $m_{1-\alpha}(M) \geq n - 1$ . Le polynôme caractéristique de  $M$  vérifie donc  $\chi_M = (X - 1 + \alpha)^{n-1}(X - \lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ainsi,  $\chi_M$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , et comme  $\chi_M = X^n - \text{tr}(M)X^{n-1} + \dots$ , on obtient  $\text{tr}(M) = (n - 1)(1 - \alpha) + \lambda$  en identifiant. Comme  $\text{tr}(M) = n$ , on a  $\lambda = 1 + (n - 1)\alpha$  et  $\boxed{\chi_M = (X - 1 + \alpha)^{n-1}(X - 1 - (n - 1)\alpha)}$ .

**2.5.3** On a  $MX = \lambda X$  donc  $X^T MX = \lambda X^T X = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$  et, avec **2.4.2**,  $X^T MX = \|v\|^2 \geq 0$ . Comme  $X \neq 0$ , on a

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \text{ donc, comme } \lambda = \frac{\|v\|^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \text{ on en déduit } \lambda = 1 + (n - 1)\alpha \geq 0 \text{ ce qui donne } \boxed{\alpha \geq \frac{-1}{n-1}}.$$

**2.5.4** Si  $\alpha = -\frac{1}{n-1}$  alors  $\lambda = 0$  est valeur propre de  $M$  et on vérifie que le vecteur  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre 0. En utilisant à nouveau **2.4.2**, on a  $X^T MX = \|v\|^2$  mais, comme  $MX = 0$ , on en déduit  $\|v\|^2 = 0$  donc  $\boxed{v = 0_E}$ .

### PARTIE 3 : DISTANCE À UN SOUS-ESPACE

**3.1.1** On obtient  $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_{n-1}) & \lambda(v_1|v_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \dots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & \lambda(v_{n-1}|v_n) \\ \lambda(v_n|v_1) & \dots & \lambda(v_n|v_{n-1}) & \lambda^2(v_n|v_n) \end{vmatrix}$  par définition de

$G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)$  et par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi, par linéarité du déterminant par rapport à

$$\text{la dernière ligne et la dernière colonne, on a } \boxed{\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)) = \lambda^2 \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))}.$$

**3.1.2** De même, par définition de  $D = \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$  et par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$D = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n) + \lambda(v_1|v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \dots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n) + \lambda(v_{n-1}|v_1) \\ (v_n|v_1) + \lambda(v_1|v_1) & \dots & (v_n|v_{n-1}) + \lambda(v_1|v_{n-1}) & \|v_n + \lambda v_1\|^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, on

$$\text{effectue l'opération } L_n \leftarrow L_n - \lambda L_1 \text{ pour avoir } D = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n) + \lambda(v_1|v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \dots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n) + \lambda(v_{n-1}|v_1) \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_{n-1}) & (v_n|v_n) + \lambda(v_n|v_1) \end{vmatrix}$$

après calculs. Puis, après  $C_n \leftarrow C_n - \lambda C_1$ ,  $\boxed{\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1)) = \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))}$ .

**3.2.1** Comme  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $(v_i | w) = 0$  car  $v_i \in F$  et  $w \in F^\perp$ , tous les termes de la dernière colonne du déterminant  $\det(G(v_1, \dots, v_n, w))$  sont nuls, sauf celui en case  $(n+1, n+1)$  qui vaut  $(w | w) = \|w\|^2$ . Par développement de ce déterminant par rapport à la dernière colonne,  $\boxed{\det(G(v_1, \dots, v_n, w)) = \|w\|^2 \times \det(G(v_1, \dots, v_n))}$ .

**3.2.2** D'après le cours, on a  $d(v, F) = \|v - p_F(v)\|$  où  $p_F(v)$  est le projeté orthogonal de  $v$  sur  $F$ . Le résultat de la question **3.1.2** se généralise avec  $v_k$  à la place de  $v_1$  pour  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  et, plus généralement, on établit que si  $y \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$  alors  $\det(G(v_1, \dots, v_n, v+y)) = \det(G(v_1, \dots, v_n, v))$ . Si on applique cela avec  $y = -p_F(v) \in F$ , on obtient  $\det(G(v_1, \dots, v_n, v)) = \det(G(v_1, \dots, v_n, v-y))$  et, par définition d'un projecteur orthogonal, on a  $v - p_F(v) \in F^\perp = \text{vect}(v_1, \dots, v_n)^\perp$ , donc, d'après **3.2.1** appliqué avec  $w = v - p_F(v)$ , on obtient  $\boxed{\det(G(v_1, \dots, v_n, v)) = \|v - p_F(v)\|^2 \times \det(G(v_1, \dots, v_n)) = d(v, F)^2 \times \det(G(v_1, \dots, v_n))}$ .

**3.2.3** On a vu en **1.2.3** que  $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2(a-1)^2$ . On calcule aussi  $\det(G(u, v)) = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1-2a+2a^2 \end{vmatrix}$  et  $\det(G(u, v)) = 2-4a+3a^2$  donc  $(2-4a+3a^2)d(w, F)^2 = (1+b)^2(a-1)^2$  d'après **3.2.1**. Comme  $2-4a+3a^2 = 2(1-a)^2+a^2 > 0$ , on en déduit  $\boxed{d(w, F) = \sqrt{\frac{(1+b)^2(a-1)^2}{2-4a+3a^2}}}$ .

On retrouve  $d(w, F) = 0$  si  $a = 1$  ou  $b = -1$ , ce qui est logique puisque dans ce cas  $w \in F$  d'après la partie 1.

## DS 5.2 : INSPIRÉ DE CCP PSI 2013 MATHS 1

PSI 1 2025/2026

samedi 17 janvier 2026

### PARTIE 1 : ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS

**1.1** La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et on a  $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN,  $\boxed{t \mapsto e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$ .

**1.2.1** La fonction  $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $|\cos(2bt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$  donc, d'après la question précédente et par comparaison,  $\boxed{t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$ .

**1.2.2** La fonction  $f_n : t \mapsto t^{2n}e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN,  $\boxed{f_n : t \mapsto t^{2n}e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$ . Dans  $I_n$ , on pose  $u_n : t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$  et  $v : t \mapsto e^{-t^2}$  qui sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t)v(t) = 0 = u_n(0)v(0)$  par croissances comparées donc  $I_n = \int_0^{+\infty} u_n'(t)v(t)dt = [u_n(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u_n(t)v'(t)dt$ , qui s'écrit aussi  $I_n = \left[ \frac{t^{2n+1}}{2n+1}e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}(-2te^{-t^2})dt$  donc  $\boxed{I_n = \frac{2}{2n+1}I_{n+1}}$ .

**1.2.3** Puisque la relation finale est donnée, on peut procéder par récurrence :

Initialisation :  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  d'après l'énoncé (intégrale de GAUSS) donc  $I_0 = \frac{(2.0)!}{2^{2.0}(0!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Hérité : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , alors  $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2} \times I_n = \frac{2n+1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  d'après

**1.2.2** et par hypothèse de récurrence et  $I_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(2(n+1))2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)!} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Par principe de récurrence, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**1.2.4** Soit  $b \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $e^{2ibt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n i^n b^n t^n}{n!}$  puis, comme  $i^{2p} = (-1)^p \in \mathbb{R}$  et  $i^{2p+1} = i(-1)^p \in i\mathbb{R}$ ,

en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans cette somme de série, comme tout converge par

croissances comparées,  $e^{2ibt} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}(-1)^p b^{2p} t^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(-1)^p b^{2p+1} t^{2p+1}}{(2p+1)!}$ . Comme, de plus, on a

$$e^{2ibt} = \cos(2bt) + i \sin(2bt), \text{ en identifiant, on a } \cos(2bt) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{4^p b^{2p}}{(2p)!} t^{2p}.$$

**1.2.5** Soit  $b \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , d'après la question précédente,  $\cos(2bt)e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2bt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$ . Pour

intégrer terme à terme, on pose  $g_n : t \mapsto (-1)^n \frac{(2bt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$ .

(H<sub>1</sub>)  $\sum_{n \geq 0} g_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$  d'après **1.2.4**.

(H<sub>2</sub>) Toutes les fonctions  $g_n$  et la fonction  $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$  sont continues sur  $\mathbb{R}_+$  par opérations.

(H<sub>3</sub>) Toutes fonctions  $g_n$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}_+$  d'après **1.2.2**.

(H<sub>4</sub>) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{\sqrt{\pi} b^{2n}}{2^n n!}$  par linéarité de l'intégrale et d'après **1.2.3**

donc  $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$  converge d'après l'énoncé (et la somme vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{b^2}$ ).

Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que  $h(b) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$

donc  $h(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{n!}$  donc  $h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$  si  $b \in \mathbb{R}$  d'après l'énoncé.

**1.3.1** Pour dériver sous le signe somme, on pose  $a : (b, t) \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$  de sorte que  $h(b) = \int_0^{+\infty} a(b, t) dt$ .

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $b \mapsto a(b, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  par opérations.

(H<sub>2</sub>) Pour tout  $b \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto a(b, t)$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  d'après **1.2.1..**

(H<sub>3</sub>) Pour tout  $b \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial a}{\partial b}(b, t) = -2t \sin(2bt)e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  par opérations.

(H<sub>3</sub>) Pour tout  $(b, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , on a  $\left| \frac{\partial a}{\partial b}(b, t) \right| \leq 2t e^{-t^2} = \psi(t)$  car  $|\sin(2bt)| \leq 1$  avec  $\psi$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $\psi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées.

Par dérivation sous le signe somme,  $h$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall b \in \mathbb{R}$ ,  $h'(b) = \int_0^{+\infty} (-2t) \sin(2bt)e^{-t^2} dt$ .

**1.3.2** Dans cette dernière intégrale, on pose  $u : t \mapsto \sin(2bt)$  et  $v : t \mapsto e^{-t^2}$  qui sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $u(0)v(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$  donc  $h'(b) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = - \int_0^{+\infty} (2b \cos(2bt))e^{-t^2} dt$  par intégration par parties puis  $h'(b) = -2bh(b)$  par linéarité. On a bien  $\forall b \in \mathbb{R}, h'(b) + 2bh(b) = 0.$

**1.3.3** Les solutions réelles  $y$  sur  $\mathbb{R}$  de cette équation différentielle (E) :  $y' + 2xy = 0$  sont, d'après le cours, les fonctions pour lesquelles il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $y : x \mapsto \lambda e^{-x^2}$ . Comme  $h$  est solution réelle sur  $\mathbb{R}$  de (E) d'après 1.3.2 et que  $h(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  d'après l'énoncé, on a  $\forall b \in \mathbb{R}, h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$

**1.4.1** On pose, pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x, t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$  et on applique le théorème de continuité :

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par opérations.

(H<sub>2</sub>) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  par opérations.

(H<sub>3</sub>) Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $|f(x, t)| \leq e^{-t^2}$  et  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec 1.1.

Par théorème de continuité sous le signe somme,  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus, grâce au terme  $x^2$ ,

comme  $(-x)^2 = x^2$ , la fonction  $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt$  est paire.

**1.4.2** Posons à nouveau  $f(x, t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par opérations.

(H<sub>2</sub>) Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  par domination d'après 1.4.1.

(H<sub>3</sub>) Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  par opérations.

(H<sub>4</sub>) Si  $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \leq \frac{2b}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \theta_{a,b}(t)$  pour tout  $x \in [a; b]$

et tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $\theta_{a,b}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car on a  $\theta_{a,b}(t) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et

$\theta_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \frac{2b}{t^2} e^{-a^2/t^2}$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta_{a,b}(t) = 0$  par croissances comparées.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et qu'on

a, par la formule de LEIBNIZ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.$

**1.4.3** Pour  $x > 0$ , dans l'intégrale ci-dessus, on pose  $t = \frac{x}{u} = \alpha_x(u)$  avec  $\alpha_x$  qui est de classe  $C^1$  strictement décroissante et bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $\varphi'(x) = -2x \int_{+\infty}^0 \left(\frac{u^2}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{u^2} - u^2\right) \left(\frac{-x}{u^2}\right) du$  par changement de variable, qui se simplifie en  $\varphi'(x) = -2\varphi(x).$

**1.4.4** On en déduit, comme  $\mathbb{R}_+^*$  est un intervalle, qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \lambda e^{-2x}$ . Par continuité de  $\varphi$  en 0 d'après **1.4.1**, on a  $\lambda = \varphi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  d'après l'énoncé donc  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$

puis, par parité de  $\varphi$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}.$$

## PARTIE 2 : TRANSFORMÉE DE FOURIER

**2.1.1** Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , posons  $m(a, t) = \frac{\cos(2at)}{1+t^2}$  :

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $a \mapsto m(a, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par opérations.

(H<sub>2</sub>) Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto m(a, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  par opérations.

(H<sub>3</sub>) Pour  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|m(a, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = p(t)$  car  $|\cos(2at)| \leq 1$  et  $p$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $p(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ .

Par théorème de continuité sous le signe somme,  $\psi$  est définie et continue et paire sur  $\mathbb{R}$  car  $\cos$  est paire.

**2.1.2**  $\psi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[ \arctan(t) \right]_0^{+\infty}$  donc  $\psi(0) = \frac{\pi}{2}$ .

**2.2** Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  fixés, on pose  $v_p(x) = j_p(x) \cos(2ax)$  pour  $x \in [0, n]$  :

(H<sub>1</sub>)  $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $[0; n]$  vers  $v : x \mapsto \frac{\cos(2ax)}{2(1+x^2)} = \frac{m(a, x)}{2}$  car  $\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-p^2(1+x^2)} = 0$ .

(H<sub>2</sub>) Toutes les fonctions  $v_p$  et la fonction  $v$  sont continues sur  $[0; n]$ .

(H<sub>3</sub>) Pour  $(p, x) \in \mathbb{N}^* \times [0; n]$ ,  $|v_p(x)| \leq \frac{1}{2(1+x^2)}$  et  $x \mapsto \frac{1}{2(1+x^2)}$  est continue donc intégrable sur le segment  $[0; n]$ .

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} v_{n,p} = \int_0^n \frac{\cos(2ax)}{2(1+x^2)} dx.$$

Ou par convergence uniforme sur le segment  $[0; n]$  avec  $\|v_p - v\|_{\infty; [0; n]} \leq \frac{1}{2} e^{-p^2}$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-p^2} = 0$ .

**2.3.1** Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  fixés, on pose  $h(y, x) = y \cos(2ax) e^{-x^2 y^2}$  :

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $x \in [0; n]$ , la fonction  $y \mapsto h(y, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  par opérations.

(H<sub>2</sub>) Pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $x \mapsto h(y, x)$  est continue par morceaux sur  $[0; n]$  par opérations.

(H<sub>3</sub>) Soit  $[a; b] \subset \mathbb{R}_+$ ,  $y \in [a; b]$  et  $x \in [0; n]$ , alors  $|h(y, x)| \leq b$  et la fonction  $x \mapsto b$  est continue donc intégrable sur le segment  $[0; n]$ .

On en déduit par théorème de continuité sous le signe somme que  $k_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**2.3.2** Si  $y = 0$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_n(0) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(0) = 0 = k(0)$ .

Si  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $x \mapsto y \cos(2ax)e^{-x^2y^2} = h(y, x)$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $h(y, x) = \int_0^{+\infty} y \cos(2ax)e^{-x^2y^2} dx$ . On pose alors  $t = xy$  ou  $x = \frac{t}{y}$  et la fonction  $t \mapsto \frac{t}{y}$  est de classe  $C^1$ , strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ , et on a la valeur de la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(y) = \int_0^{+\infty} \cos\left(2a\frac{t}{y}\right) e^{-t^2} dt = h\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/y^2}$  d'après **1.2.5** ou **1.3.3**.

Ainsi, la suite de fonctions  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  où la fonction  $k$  a

été définie par  $k(0) = 0$  et  $k(y) = h\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/y^2}$  si  $y > 0$ .

**2.4** La fonction  $k_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  d'après **2.3.1** donc  $y \mapsto k_n(y)e^{-y^2}$  est aussi continue sur  $\mathbb{R}_+$  par produit.

De plus,  $|k_n(y)| \leq \int_0^n y dy = \frac{n^2}{2}$  par inégalité triangulaire car  $\forall x \in [0; n]$ ,  $|\exp(-y^2x^2) \cos(2ax)| \leq 1$  donc

$|k_n(y)e^{-y^2}| \leq \frac{n^2}{2} e^{-y^2}$  donc, par comparaison, la fonction  $y \mapsto k_n(y)e^{-y^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**2.5** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\int_0^p y e^{-(1+x^2)y^2} dy = \left[ -\frac{1}{2} e^{-(1+x^2)y^2} \right]_{y=0}^{y=p}$  donc  $\int_0^p y e^{-(1+x^2)y^2} dy = j_p(x)$ .

**2.6** D'après **2.2**, on a  $\psi(a) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} \right)$ . On va donc calculer cette double limite autrement. Avec l'égalité admise, on a  $u_{n,p} = \int_0^p k_n(y)e^{-y^2} dy$  et avec **2.4**,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} = \int_0^{+\infty} k_n(y)e^{-y^2} dy$ . On va alors appliquer le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de  $\int_0^{+\infty} k_n(y)e^{-y^2} dy$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On pose  $w_n(y) = k_n(y)e^{-y^2}$  pour  $y \in \mathbb{R}_+$  :

(H<sub>1</sub>) La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction  $y \mapsto k(y)e^{-y^2}$  d'après **2.3.2**.

(H<sub>2</sub>) Les fonctions  $w_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}_+$  d'après **2.3.1** et la fonction  $y \mapsto k(y)e^{-y^2}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  d'après **2.3.2**.

(H<sub>3</sub>) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $|k_n(y)| \leq \int_0^n y e^{-x^2y^2} dx \leq \int_0^{+\infty} y e^{-x^2y^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  avec le changement de variable affine  $x = \frac{t}{y}$  facile à justifier donc  $|w_n(y)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2}$  pour  $y \in \mathbb{R}_+$  car  $w_n(0) = 0$ .

La fonction  $y \mapsto e^{-y^2}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  d'après **1.1**.

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} w_n(y) dy = \int_0^{+\infty} k(y)e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2 - \frac{a^2}{y^2}\right) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi(a)$  par théorème

de convergence dominée. Avec **1.4.4**,  $\psi(a) = \frac{\pi}{2} e^{-2|a|}$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$  par parité de  $\psi$ .