DS 5.1 : MINES 2 PC 2020

PSI 1 2025/2026 **samedi 17 janvier 2026**

PARTIE 1 : PROJECTIONS ORTHOGONALES

1 Comme $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, en notant $y = x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$, on a $y \in F^{\perp} \iff \big(\forall j \in [\![1;n]\!],\ (y|e_j) = 0\big)$. Or, pour $j \in [\![1;n]\!]$, on a $(y|e_j) = \left(x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i \middle| e_j\right) = (x|e_j) - \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)(e_i|e_j)$ par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable. Ainsi, comme $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, on obtient $(y|e_j) = (x|e_j) - (x|e_j) = 0$. Par l'équivalence précédente, on a bien $\boxed{y = x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i \in F^{\perp}}$. On sait d'après le cours que $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.

On vient de voir que si $x \in E$, on a $x = y + (x - y)$ avec $y = x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i \in F^{\perp}$ et $x - y = \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i \in F$. Ainsi, $E = F + F^{\perp}$ et on a bien établi que $\boxed{E = F \oplus F^{\perp}.}$

2 Par définition de la projection orthogonale sur F, on a la relation $\boxed{\pi_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i}$ car, d'après **1**,

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i}_{\in F} + \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i\right)}_{\in F^{\perp}} \in E$$ (on garde la composante selon F et on “annule” celle selon $F^{\perp}$).

3 On a $x = \pi_F(x) + (x - \pi_F(x))$ où $\pi_F(x) \perp (x - \pi_F(x))$ car $\pi_F(x) \in F$ et $x - \pi_F(x) \in F^{\perp}$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, $||x||^2 = ||\pi_F(x)||^2 + ||x - \pi_F(x)||^2$. Comme $\pi_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormale, on sait d'après le cours que $||\pi_F(x)||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)^2$. On a bien $\boxed{||x - \pi_F(x)||^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)^2.}$

PARTIE 2 : POLYNÔMES DE LAGUERRE

4 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2} \iff 2|a||b| \leqslant a^2 + b^2 \iff a^2 + b^2 - 2|a||b| \geqslant 0 \iff (|a| - |b|)^2 \geqslant 0$.

Comme cette dernière assertion est clairement vraie, on a bien $\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}.}$

5 Soit $(f, g) \in E_{\alpha}^2$, $x \mapsto x^{\alpha}e^{-x}f(x)g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après **4** avec $a = f(x)$ et $b = g(x)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|x^{\alpha}e^{-x}f(x)g(x)| \leqslant \dfrac{x^{\alpha}e^{-x}f(x)^2}{2} + \dfrac{x^{\alpha}e^{-x}f(x)^2}{2}$ (I). Par linéarité, comme $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}f(x)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}g(x)^2 dx$ convergent par hypothèse, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}(f(x)^2 + g(x)^2)dx$ converge. Par comparaison, l'inégalité (I) montre que $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}|f(x)g(x)|dx$ converge, soit que $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}f(x)g(x)dx$ est absolument convergente. Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}f(x)g(x)dx \text{ est convergente}}$ d'après le cours.

6 Par définition de E_α, on a bien l'inclusion $E_\alpha \subset C^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$.

- La fonction nulle est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}0^2 dx$ converge donc $0 \in E_\alpha$ et $E_\alpha \neq \emptyset$.

- Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f,g) \in E_\alpha^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $\forall x > 0,\ x^\alpha e^{-x}((\lambda f+\mu g)(x))^2 = \lambda^2 x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + 2\lambda\mu x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) + \mu^2 x^\alpha e^{-x} g(x)^2$. On sait par définition de E_α et d'après **5** que les trois intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ convergent. Par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}((\lambda f+\mu g)(x))^2 dx$ converge. On en déduit que $\lambda f + \mu g \in E_\alpha$.

Ainsi, $\boxed{E_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de } C^0([0;+\infty[,\mathbb{R}).}$

7 Soit p une fonction polynomiale sur $[0;+\infty[$. Alors p est continue sur $\mathbb{R}_+$ car elle est polynomiale. Comme p^2 est aussi polynomiale, on peut écrire $p^2(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x^k$ pour $x > 0$. Alors, $x^\alpha e^{-x} p(x)^2 = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x^{\alpha+k} e^{-x}$. Pour tout entier $k \in [\![0;d]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx$ converge, c'est la définition de $\Gamma(\alpha+k+1)$ car $\alpha+k+1 > 0$ (voir énoncé). Par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} p(x)^2 dx$ converge et on a même la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} p(x)^2 dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \Gamma(\alpha+1+k)$.

On a donc bien le résultat attendu, $\boxed{p \in E_\alpha \text{ pour toute fonction polynomiale } p.}$

8 Pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions C^∞.

- $\varphi_0 : x \mapsto x^\alpha e^{-x}$ donc $\psi_0 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x x^\alpha e^{-x} = 1$.
- $\varphi_1 : x \mapsto x^{\alpha+1} e^{-x}$ donc $\varphi_1^{(1)} : x \mapsto (\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1} e^{-x}$ et $\psi_1 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_1^{(1)}(x) = (\alpha+1) - x$.
- $\varphi_2 : x \mapsto x^{\alpha+2} e^{-x}$ donc, avec Leibniz, $\varphi_2^{(2)} : x \mapsto (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - 2(\alpha+2)x^{\alpha+1} e^{-x} + x^{\alpha+2} e^{-x}$ et $\psi_2 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_2^{(2)}(x) = (\alpha+2)(\alpha+1) - 2(\alpha+2)x + x^2$.

Ainsi, $\boxed{\psi_0(x) = 1,\ \psi_1(x) = (\alpha+1) - x \text{ et } \psi_2(x) = (\alpha+2)(\alpha+1) - 2(\alpha+2)x + x^2.}$

9 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $g_a : x \mapsto x^a$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par récurrence immédiate, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ g_a^{(k)}(x) = \left(\prod\limits_{i=0}^{k-1}(a-i)\right) x^{a-k}$ où, par convention, le produit vide (pour $k = 0$) vaut 1. Posons aussi $h : x \mapsto e^{-x}$ qui est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$. Comme $\varphi_n = g_{n+\alpha} h$, d'après la formule de Leibniz, pour tout $x > 0$, $\varphi_n^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_{n+\alpha}^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$ donc $\varphi_n^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k} x^{n+\alpha-k} e^{-x} \prod\limits_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)$ et, après simplifications, on a la relation $\psi_n(x) = x^{-\alpha} e^x \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k} x^{n+\alpha-k} e^{-x} \prod\limits_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k} \prod\limits_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right) x^{n-k}$ donc ψ_n est bien polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $\binom{n}{0}(-1)^{n-0} \prod\limits_{i=0}^{0-1}(n+\alpha-i) = (-1)^n \neq 0$, on en déduit que $\boxed{\psi_n \text{ est bien polynomiale sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ son degré est } n \text{ et son coefficient dominant est } (-1)^n.}$

10 Pour tout $(f,g)\in E_\alpha^2$, $(f|g)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx$ existe d'après la question **5**.

• E_α est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'après la question **6**.

• Pour tout $(f,g,h)\in E_\alpha^3$ et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $(\lambda f+\mu g|h)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(\lambda f(x)+\mu g(x))h(x)dx$ donc, puisque les deux intégrales convergent, par linéarité, $(\lambda f+\mu g|h)=\lambda\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)h(x)dx+\mu\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}g(x)h(x)dx$ donc $(\lambda f+\mu g|h)=\lambda(f|h)+\mu(g|h)$. Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est linéaire en la première variable.

• Pour tout $(f,g)\in E_\alpha^2$, $(f|g)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx=\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}g(x)f(x)dx=(g|f)$ par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ donc $(\,.\,|\,.\,)$ est symétrique.

• $(\,.\,|\,.\,)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.

• Pour tout $f\in E_\alpha$, tout $x>0$, on a $x^\alpha e^{-x}f(x)^2\geqslant 0$ donc, par positivité de l'intégrale convergente ("$0\leqslant+\infty$"), on a $(f|f)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx\geqslant 0$. De plus, comme $x\mapsto x^\alpha e^{-x}f(x)^2$ est continue positive, comme $0<+\infty$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx$ converge, on a $(f|f)=0\Longrightarrow(\forall x>0,\ x^\alpha e^{-x}f(x)^2=0)$ donc $(f|f)=0\Longrightarrow(\forall x>0,\ f(x)=0)\Longrightarrow(f=0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)\Longrightarrow(f=0\text{ sur }\mathbb{R}_+)$ par continuité de f en 0. Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est défini positif.

Par conséquent, $\boxed{(\,.\,|\,.\,)\text{ définit bien un produit scalaire sur } E_\alpha.}$

11 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0;n-1]\!]$, d'après la question **9**, $\varphi_n^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i}(-1)^{k-i}x^{n+\alpha-i}e^{-x}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)\right)$.

Pour tout $i\in[\![0;k]\!]\subset[\![0;n-1]\!]$, on a $n+\alpha-i\geqslant\alpha+1>0$, donc $\lim\limits_{x\to0^+}x^{n+\alpha-i}=0$. Ainsi,

$$\varphi_n^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k}\left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x}\underbrace{x^{n+\alpha-i}}_{\to0}\underbrace{e^{-x}}_{\to1}\right)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0$$

comme somme finie de termes de limite nulle en 0^+. De plus, par croissances comparées,

$$\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{e^{-x/2}}=\sum_{i=0}^{k}\left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x}\underbrace{x^{n+\alpha-i}e^{-x/2}}_{\to0}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

comme somme finie de termes de limite nulle en $+\infty$.

On a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\varphi_n^{(k)}(x)=0 \text{ et } \varphi_n^{(k)}(x)\underset{+\infty}{=}o\big(e^{-x/2}\big)\text{ si } n\in\mathbb{N}^*\text{ et } k\in[\![1;n-1]\!].}$

12 Montrons par récurrence que, pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, $(\psi_m|\psi_n)=(-1)^k\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx\qquad(\mathsf{HR}_k)$.

Initialisation : par définition de ψ_n et $(\,.\,|\,.\,)$, on a $(\psi_m|\psi_n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}\psi_m(x)\psi_n(x)dx$ ce qui donne $(\psi_m|\psi_n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx$, donc on a bien HR_0 car $\psi_m^{(0)}=\psi_m$.

Hérédité : soit $k\in[\![0;n-1]\!]$, supposons HR_k vérifiée. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx$ converge. Posons $u(x)=\psi_m^{(k)}(x)$ et $v(x)=\varphi_n^{(n-k-1)}(x)$ (avec $n-k-1\geqslant0$) d'où $u'(x)=\psi_m^{(k+1)}(x)$ et $v'(x)=\varphi_n^{(n-k)}(x)$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. ψ_m est polynomiale sur $\mathbb{R}_+$, donc $\psi_m^{(k)}$ l'est aussi et $\psi_m^{(k)}$ a une limite finie en 0^+, donc comme $\varphi_n^{(n-k)}$ a une limite nulle en 0^+ d'après la question précédente, on a la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x) = 0$. Toujours d'après la question précédente, on a $u(x)v(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x/2}\psi_m^{(k)}(x))$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ converge d'après HR_k, donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ converge aussi et on a

$$\begin{aligned}(\psi_m|\psi_n) &= (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx \\ &= (-1)^k \left(\left[\psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx\right) \\ &= (-1)^k \left(0 - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx\right) = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx\end{aligned}$$

On a donc bien HR_{k+1}.

Conclusion : par principe de récurrence, pour $k \in [\![0;n]\!]$, on a $(\psi_m|\psi_n) = (-1)^k \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx$ donc, en particulier, pour $k = n$, ce qui donne bien $\boxed{(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.}$

• Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \neq n$ et, quitte à intervertir les rôles, supposons que $m < n$. Alors, d'après le premier point, on a $(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx$. Or ψ_m est polynomiale de degré $m < n$, donc $\psi_m^{(n)} = 0$ et on a donc $(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$. La famille $\boxed{(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc orthogonale pour le produit scalaire } (\,.\,|\,.\,).}$

13 D'après la question précédente, $||\psi_n||_\alpha^2 = (\psi_n|\psi_n) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx$. Or ψ_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$, donc pour tout $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$ si $x \geqslant 0$ et $||\psi_n||_\alpha^2 = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = (-1)^{2n} n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)dx = n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}e^{-x}dx = n!\Gamma(n+\alpha+1)$.

On a bien, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ ||\psi_n||_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n+\alpha+1).}$

PARTIE 3 : APPROXIMATION

14 De la même façon qu'à la question **12**, on peut montrer par récurrence, pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, la relation $(\psi_n|f_k) = (-1)^i \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)f_k^{(i)}(x)dx = (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)(-k)^i e^{-kx}dx = k^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)e^{-kx}dx$. En particulier, pour $i = n$, on obtient $(\psi_n|f_k) = k^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)e^{-kx}dx = k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}e^{-(k+1)x}dx$ donc $(\psi_n|f_k) = k^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{n+\alpha}}{(k+1)^{n+\alpha}} e^{-u} \frac{du}{k+1}$ avec le changement de variable $x = \dfrac{u}{k+1}$ facile à justifier. Ainsi, $(\psi_n|f_k) = \dfrac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{n+\alpha}e^{-u}du = \dfrac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n+\alpha+1)$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question **13**, $\dfrac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n+\alpha+1)\right)^2}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}$ donc $\dfrac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2} = \dfrac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \left(\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} = \dfrac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} a_n \left(\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^2\right)^n$ où a_n a été introduit dans l'énoncé. D'après ce qui a été admis dans l'énoncé, comme $\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^2 \in]-1;1[$, on a $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n$ converge et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2} &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(1-\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^2\right)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\dfrac{2k+1}{(k+1)^2}\right)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)(k+1)^{2\alpha+2}}{(2k+1)^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

On a montré que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.}$

15 Pour $N \in \mathbb{N}$, V_N est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E_α dont $\left(\dfrac{\psi_n}{||\psi_n||_\alpha}\right)_{n\in[\![0;N]\!]}$ est une base orthonormée. D'après la question **3**, $\displaystyle ||f_k - \pi_N(f_k)||_\alpha^2 = ||f_k||^2 - \sum_{n=0}^{N} \left(f_k \Big| \frac{\psi_n}{||\psi_n||_\alpha}\right)^2 = ||f_k||^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2}$. Or $\displaystyle ||f_k||_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-2kx} dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2k+1)x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(2k+1)^\alpha} e^{-u} \frac{du}{2k+1}$ avec le changement de variable $x = \dfrac{u}{k+1}$ facile à justifier. Ainsi, $\displaystyle ||f_k||_\alpha^2 = \frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}$. Par conséquent, $\displaystyle ||f_k - \pi_N(f_k)||_\alpha^2 = ||f_k||^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2}$ et on en déduit que $\displaystyle ||f_k - \pi_N(f_k)||_\alpha^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} = 0$ et on a bien la limite attendue, $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} ||f_k - \pi_N(f_k)||_\alpha = 0.}$

16 D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$, on a $||f_k - \pi_N(f_k)||_\alpha \leqslant \varepsilon$. En particulier, en prenant $N = N_0$, on a la majoration $||f_k - \pi_{N_0}(f_k)||_\alpha \leqslant \varepsilon$, et $\pi_{N_0}(f_k) \in V_{N_0} = \mathrm{Vect}(\psi_0, \cdots, \psi_{N_0}) \subset \mathcal{P}$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{P}$. Ainsi, $p = \pi_{N_0}(f_k)$ convient et vérifie $\boxed{p \in \mathcal{P} \text{ et } ||f_k - p||_\alpha \leqslant \varepsilon.}$

17 Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(-\ln(t))$ si $t \in]0;1]$ et $g(0) = 0$. Alors, g est continue sur $]0;1]$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par composée puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} (-\ln(t)) = +\infty$ par hypothèse sur f, ce qui fait que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} g(t) = g(0) = 0$. g est donc continue sur le segment $[0;1]$. Alors, d'après le théorème admis, il existe une fonction polynomiale $p : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$ telle que pour tout $t \in [0;1]$, on ait $|g(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour tout $x > 0$, comme $e^{-x} \in]0;1]$, $\displaystyle\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right| = \left|f(-\ln(e^{-x})) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (e^{-x})^k\right| = |g(e^{-x}) - p(e^{-x})| \leqslant \varepsilon$: $\displaystyle\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right)^2 \leqslant \varepsilon^2$.

On a donc, pour tout $x > 0$, $\displaystyle 0 \leqslant x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right)^2 \leqslant x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2$ donc, par positivité de l'intégrale convergente (avec $0 \leqslant +\infty$), on a

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)\right)^2 dx = \left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right|\right|_\alpha^2 \leqslant \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\varepsilon^2 = \varepsilon^2\Gamma(\alpha+1).$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$ dans le théorème admis, $\left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right|\right|_\alpha^2 \leqslant \varepsilon^2$ et $\boxed{\left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right|\right|_\alpha \leqslant \varepsilon.}$

18 Soit f vérifiant les hypothèses et $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right|\right|_\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, d'après la question **16**, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $||f_k - p_k||_\alpha \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(n+1)(|\lambda_k|+1)}$, et on a alors

$$\begin{aligned}
\left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k\right|\right|_\alpha &= \left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (f_k - p_k)\right|\right|_\alpha \\
&\leqslant \left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\right|\right|_\alpha + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|\, ||f_k - p_k||_\alpha \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k|}{(|\lambda_k|+1)} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

En posant $p = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k \in \mathcal{P}$, on a donc $\boxed{p \in \mathcal{P} \text{ et } ||f-p||_\alpha \leqslant \varepsilon.}$

19 Soit $f : x \in [0;+\infty[\mapsto h(\sqrt{x})e^{x/2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et a une limite nulle en $+\infty$ (car elle est nulle sur $]A^2;+\infty[$) donc, d'après la question **18**, pour tout $\alpha > -1$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $||f-p||_\alpha \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Or

$$\begin{aligned}
||f-p||_\alpha^2 &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(f(x)-p(x))^2 dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^\alpha (f(x)e^{-x/2} - p(x)e^{-x/2})^2 dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^\alpha (h(\sqrt{x}) - p(x)e^{-x/2})^2 dx \\
&= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha}(h(t) - p(t^2)e^{-t^2/2})^2 2t dt
\end{aligned}$$

en posant le changement de variable $x = t^2 = \varphi(t)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, en prenant $\alpha = -\frac{1}{2}$ (et le p correspondant à cette valeur de α) et $q : t \in \mathbb{R} \mapsto p(t^2)$ qui est une fonction polynomiale paire, on a

$$\begin{aligned}
||f-p||_{-1/2}^2 &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha}(h(t) - p(t^2)e^{-t^2/2})^2 2t dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} (h(t) - q(t)e^{-t^2/2})^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^2 dx
\end{aligned}$$

par parité de la fonction $t \mapsto (h(t) - q(t)e^{-t^2/2})^2$. Ainsi, si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A;A]$ (où $A > 0$) et si ε est un réel strictement positif, il existe une fonction polynomiale $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^2 dx = ||f-p||_{-1/2}^2 \leqslant \varepsilon.}$

On peut montrer que le résultat de la dernière question est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et de carré intégrable sur* $\mathbb{R}$.

DS 5.2 : MINES-PONTS PC 2002 MATHS1

PSI 1 2025/2026 **samedi 20 janvier 2024**

PARTIE 1 : CALCUL D'UNE INTÉGRALE

$\boxed{1}$ La fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux. De plus, $h(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, h est intégrable sur $]0;1]$. On a aussi $h(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}e^{-t} = 0$ donc h est intégrable sur $[1;+\infty[$ encore par comparaison aux intégrales de Riemann. Enfin, $\boxed{h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ donc } I = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)dt \text{ existe.}}$

$\boxed{2.1}$ La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) \underset{0}{=} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, φ est à la fois intégrable sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$ donc $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.}$

$\boxed{2.2}$ Posons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$:

- (H_1) pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- (H_2) pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même continue).
- (H_3) pour $t > 0$ et $x \geqslant 0$, $|f(x,t)| = f(x,t) \leqslant \varphi(t)$ car $e^{-xt} \leqslant 1$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **2.1**.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

Par linéarité de l'intégrale, $\forall x \geqslant 0$, $g(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}dt$ donc, comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$. Par encadrement, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

$\boxed{2.3}$ Toujours avec la fonction $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$:

- (H_1) pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (H_2) pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu en **2.2**).
- (H_3) pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même continue).
- (H_4) si $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, pour $x \in [a,b]$ et $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{e^{-a(1+t)}}{\sqrt{t}} = \psi_a(t)$. De plus, ψ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\psi_a(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{e^{-a}}{\sqrt{t}}$ et $\psi_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, $\boxed{g \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } g'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}}dt.}$

On a alors $g'(x) = -e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-(xt)}}{\sqrt{t}}dt$ et, en posant $u = xt$, comme $x > 0$, $u \mapsto \dfrac{u}{x}$ est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u/x}}\dfrac{du}{x}$ donc $\boxed{g'(x) = -I \times \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.}$

3 $\theta : t \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t > 0,\ \theta'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{1+(\sqrt{t})^2} = \dfrac{1}{2(1+t)\sqrt{t}} = \dfrac{\varphi(t)}{2}$. On en déduit $g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = \Big[2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})\Big]_0^{+\infty}$ donc $\boxed{g(0) = \pi.}$ On pouvait aussi poser $t = u^2 = \psi(u)$ avec ψ qui est C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour avoir, par changement de variable, $g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} 2u\varphi(u^2)du = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{u(1+u^2)}du = \big[2\,\mathrm{Arctan}(u)\big]_0^{+\infty} = \pi$.

Comme g est une primitive de g' et que g admet des limites finies en 0 et $+\infty$, d'après le cours, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)dt = \big[g(t)\big]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} g(t) - g(0)$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)dt = -\pi}$ d'après **2.2**.

Avec l'expression de g' obtenue en **2.3**, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)dt = -I\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = -I^2$.

On en déduit $I^2 = \pi$ et comme $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $I \geqslant 0$ puis $\boxed{I = \sqrt{\pi}.}$

PARTIE 2 : ÉTUDE DE F

4 Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la suite $u_n = \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2} = \dfrac{x^{2n}}{n!} \times \dfrac{1}{n!} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 0$ par croissances comparées. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ converge donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ converge. On aurait aussi pu, pour $x \neq 0$, écrire $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{x^2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell = 0 < 1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ converge.

Ainsi, $\boxed{F(x) \text{ est défini pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ donc } \mathcal{D}_F = \mathbb{R}.}$

5.1 On raisonne par récurrence :

- On a bien $\dfrac{4^0}{1!} = 1 \leqslant \dfrac{1}{(0!)^2} = 1 \leqslant \dfrac{4^0}{(2.0)!} = 1$ donc l'encadrement est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{1}{(n!)^2} \leqslant \dfrac{4^n}{(2n)!}$, alors, par hypothèse de récurrence, on a l'inégalité $\dfrac{4^{n+1}}{(2n+3)!} = \dfrac{4}{(2n+3)(2n+2)} \times \dfrac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{4}{(2(n+1))^2} \times \dfrac{1}{(n!)^2} = \dfrac{1}{(n+1)!^2}$ et, de l'autre côté, il vient $\dfrac{4^{n+1}}{(2n+2)!} = \dfrac{4}{(2n+1)(2n+2)} \times \dfrac{4^n}{(2n)!} \geqslant \dfrac{4}{(2(n+1))^2} \times \dfrac{1}{(n!)^2} = \dfrac{1}{(n+1)!^2}$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{1}{(n!)^2} \leqslant \dfrac{4^n}{(2n)!}.}$

5.2 Pour $x > 0$, on a donc $\dfrac{1}{2x} \times \dfrac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{(2x)^{2n}}{2(2n+1)!} \leqslant \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2} \leqslant \dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$ en multipliant l'encadrement de **5.1** par $x^{2n} > 0$. En sommant ces inégalités et avec les développements en série entière classiques des fonctions sh et ch valables sur $\mathbb{R}$, on en déduit l'encadrement $\boxed{\forall x > 0,\ \dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \mathrm{ch}(2x).}$ Or $\dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{2x}}{4x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{4x} = +\infty$ par croissances comparées donc, par minoration, on obtient la limite $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$

6.1 On sait d'après le cours que $\forall u \in \mathbb{R},\ e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$. En prenant $u = x\cos(t) \in \mathbb{R}$ dans ce développement en série entière, on a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0;\pi],\ \exp(2x\cos(t)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \cos(t)^n}{n!} x^n.}$

6.2 On pourrait utiliser le théorème d'intégration terme à terme du chapitre **6** mais comme $[0;\pi]$ est un segment.... on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction $v_n : t \mapsto \dfrac{2^n \cos(t)^n}{n!}x^n$:

- (H_1) Les fonctions v_n sont toutes continues sur le segment $[0;\pi]$ par opérations.
- (H_2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;\pi]$ on a $|v_n(t)| = \dfrac{2^n|\cos(t)|^n}{n!}x^n \leqslant \dfrac{2^n|x|^n}{n!}$ car $|\cos(t)| \leqslant 1$ donc v_n est bornée sur $[0;\pi]$ avec $||v_n||_{\infty,[0;\pi]} \leqslant \dfrac{2^n|x|^n}{n!}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n|x|^n}{n!}$ converge d'après le cours (sa somme vaut $\exp(2|x|)$). Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge normalement sur $[0;\pi]$ vers $x \mapsto \exp(2x\cos(t))$.

Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, $\displaystyle\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} v_n(t)dt$. Mais comme $\displaystyle\int_0^{\pi} v_n(t)dt = \frac{2^n x^n}{n!}w_n$ par linéarité de l'intégrale, d'après l'énoncé, on a $\displaystyle\int_0^{\pi} v_{2n+1}(t)dt = 0$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} v_{2n}(t)dt = \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} \times \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi} v_{2n}(t)dt = \pi\frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Après avoir retiré les termes nuls d'indices impairs, il reste $\displaystyle\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \pi F(x)$ donc $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt.}$

7 Pour $t \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] = I$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $a(x,t) = \exp(2x\cos(t))$ de sorte que $f_1(t) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} a(x,t)dt$ qui existe car $t \mapsto a(x,t)$ est continue sur le segment $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$:

- (H_1) Si $t \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, comme $\cos(t) < 0$ si $t > \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x,t) = k(t)$ avec $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $k(t) = 0$ si $t \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
- (H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto a(x,t)$ est continue sur I et $t \mapsto k(t)$ est continue par morceaux sur I.
- (H_3) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in I$, $|a(x,t)| = \exp(2x\cos t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ car $2x\cos(t) \leqslant 0$ et la fonction constante $\varphi : t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur le segment I.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} k(t)dt = 0.}$

8.1 Pour $x > 0$, $f_2(x)$ est bien défini car la fonction $t \mapsto \exp(2x\cos(t))$ est continue sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Avec l'indication de l'énoncé, on pose $t = \text{Arccos}\left(1 - \frac{u}{2x}\right) = \varphi(u)$ (ce qui revient à $u = 2x(1-\cos(t))$) avec φ qui est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $]0;2x]$ dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc, par changement de variable, comme $\varphi'(u) = \left(-\dfrac{1}{2x}\right) \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{u}{2x}\right)^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}$, on obtient $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^{2x-u}}{2\sqrt{x}\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}du$ donc, par linéarité, une autre expression de $f_2(x)$: $\boxed{f_2(x) = \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}du.}$

8.2 Si $x > 0$ et $u \in [0;2x]$, on a $u - \dfrac{u^2}{4x} - \dfrac{u}{2} = \dfrac{u}{2}\left(1 - \dfrac{u}{2x}\right) \geqslant 0$ puisque $u \in [0;2x]$ d'où l'inégalité $u - \dfrac{u^2}{4x} \geqslant \dfrac{u}{2}$.
On détermine la limite quand x tend vers $+\infty$ de $J(x) = 2\sqrt{x}e^{-2x}f_2(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}du$ d'après **8.1**.

On écrit plutôt $J(x)=\int_0^{+\infty} b(x,u)du$ en posant $b(x,u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\dfrac{u^2}{4x}}}$ si $u\in]0;2x]$ et $b(x,u)=0$ si $u>2x$:

(H_1) Pour $u\in\mathbb{R}_+^*$, comme $b(x,u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\dfrac{u^2}{4x}}}$ dès que $x\geqslant\dfrac{u}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x,u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}=h(u)$.

(H_2) $u\mapsto b(x,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Si $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $u\in]0,2x]$ alors $|b(x,u)|=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\dfrac{u^2}{4x}}}\leqslant\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u/2}}=\sqrt{2}h(u)$ d'après l'inégalité ci-dessus et, si $u>2x$, $|b(x,u)|=0\leqslant\sqrt{2}h(u)$ car $h(u)>0$. On a donc $\forall x>0,\ \forall u>0,\ |b(x,u)|\leqslant\sqrt{2}h(u)$ et h est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la question **1**.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x)=\int_0^{+\infty} h(u)du=\sqrt{\pi}$ d'après la partie **1** ce qui prouve que $\boxed{f_2(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}e^{2x}}{2\sqrt{x}}.}$

9 Avec la question **6.2** et par CHASLES, on a $\forall x>0,\ F(x)=\dfrac{1}{\pi}\big(f_1(x)+f_2(x)\big)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$ avec **7** et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty$ avec 8.2 car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi}e^{2x}}{2\sqrt{x}}=+\infty$ par croissances comparées. Ainsi, par somme, on obtient $F(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{f_2(x)}{\pi}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ donc, toujours avec 8.2, $\boxed{F(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}.}$

PARTIE 3 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE

10.1 La fonction $g_x : t\mapsto\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN pour tout $x\in\mathbb{R}$ car $g_x(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. De plus, si $x>2$, alors $2-x<0$ donc $g_x(t)\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par contre, si $x\leqslant 2$, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{t}}\geqslant 0$ donc, comme $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ par RIEMANN, par minoration, g_x n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi, g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x>2$. Par conséquent, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x>2$. Comme g_x est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+^*$, g_x intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ converge. Ainsi, le domaine de définition D_{L_G} de L_G vaut $]2;+\infty[$ et $\boxed{L_G(x) \text{ existe si et seulement si } x>2.}$

10.2 Si $x>2$, comme la fonction $\varphi : u\mapsto\dfrac{u}{x-2}$ est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, par le changement de variable $t=\varphi(u)=\dfrac{u}{x-2}$, on a $L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u/(x-2)}}\dfrac{du}{x-2}$ donc $L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(x-2)}}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\dfrac{I}{2\sqrt{\pi(x-2)}}$ et, avec la partie **1**, $\boxed{L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \text{ pour } x>2.}$

11.1 Pour tout réel x, la fonction $f_x : t\mapsto F(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations car F l'est. Comme $F(t)\underset{+\infty}{\sim}G(t)=\dfrac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}}$, on a $f_x(t)\underset{+\infty}{\sim}g_x(t)$ donc, puisque g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x>2$

d'après **10.1**, par comparaison, f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x > 2$. Comme f_x est positive sur $\mathbb{R}_+$, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x > 2$. Comme f_x est positive sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrabilité de f_x sur $\mathbb{R}_+$ équivaut à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x$.

Par conséquent, $\boxed{L_F(x) \text{ existe si et seulement si } x > 2.}$

11.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $h_n : t \mapsto t^n e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $h_n(t) = t^n e^{-xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées car $x > 0$ donc h_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, l'intégrale $\boxed{I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}.}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, les fonctions $u_n : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{x} e^{-xt}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u_n(t)v(t) = 0 = u_n(0)v(0)$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \left[-\frac{1}{x} t^n e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{x}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt = \frac{n}{x} I_{n-1}$.

<u>Initialisation</u> : $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x^{0+1}}$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, par hypothèse de récurrence et la relation trouvée ci-dessus, on a $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{x} I_n = \dfrac{n+1}{x} \times \dfrac{n!}{x^{n+1}} = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Par principe de récurrence, on a bien établi que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.}$

11.3 Si $x > 2$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a $F(t)e^{-xt} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ par définition de $F(t)$. On a donc $f_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ en posant $a_n(t) = \dfrac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ (pour $x > 2$ fixé) :

- (H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f_x avec ce qui précède.
- (H_2) Les fonctions a_n et la fonction f_x sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- (H_3) Les fonctions a_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ d'après **11.2**.
- (H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_n(t)| dt = \frac{1}{(n!)^2}\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-xt} dt = \frac{I_{2n}}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} = \alpha_n > 0$ avec **11.2** et $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{x^2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{4}{x^2} < 1$ car $x > 2$ d'où la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ par le critère de d'Alembert.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $\boxed{L_F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} \text{ si } x > 2.}$

11.4 Si $x > 2$ alors $\left|\dfrac{1}{2x}\right| < 1$ et, d'après l'énoncé, $L_F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{4^n}{x^{2n+1}}$ donc $L_F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \left(\frac{4}{x^2}\right)^n = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (4/x^2)}}$ avec l'énoncé d'où $\boxed{L_F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \text{ si } x > 2.}$

12 Avec **10.2** et **11.4**, si $x > 2$, $\dfrac{L_F(x)}{L_G(x)} = \dfrac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4}} = 1$ donc $\boxed{L_F(x) \underset{2^+}{\sim} L_G(x).}$

PARTIE 4 : FONCTIONS ÉQUIVALENTES

13.1 Les fonctions $d_1 : t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ et $d_2 : t \mapsto h_2(t)e^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations car h_1 et h_2 le sont. De plus, pour $i \in \{1, 2\}$, $d_i(t) = h_i(t)e^{-xt} \underset{0}{\sim} h_i(t)$ car $\lim\limits_{t \to 0^+} e^{-xt} = 1$ donc d_i est intégrable sur $]0; 1]$ par comparaison car h_i l'est par hypothèse. Enfin $d_1(t) = h_1(t)e^{-xt} \underset{+\infty}{\sim} h_2(t)e^{-xt} = d_2(t)$ car $h_1(t) \underset{+\infty}{\sim} h_2(t)$ par hypothèse donc, par comparaison, d_1 est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si la fonction d_2 est intégrable sur $[1; +\infty[$. En regroupant les informations, la fonction d_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0; 1] \cup [1; +\infty[$ si et seulement d_2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme h_1 et h_2 sont positives sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse, les fonctions d_1 et d_2 sont aussi positives sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la convergence de $\int_0^{+\infty} h_i(t)e^{-xt}dt$ équivaut à l'intégrabilité de d_i sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, on peut conclure que l'existence de $L_1(x)$ est équivalent à celle de $L_2(x)$ donc $\boxed{L_1 \text{ et } L_2 \text{ ont le même ensemble de définition } D.}$

13.2 Soit $x_0 \in D$ (qui existe car $D \neq \emptyset$ par hypothèse) et $x > x_0$ alors $\forall t > 0,\ 0 \leqslant h_i(t)e^{-xt} \leqslant h_i(t)e^{-x_0 t}$ car $h_i(t) \geqslant 0$ et $\exp$ croissante donc, par théorème de comparaison, la fonction $t \mapsto h_i(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $t \mapsto h_i(t)e^{-x_0 t}$ l'est et on a $x \in D$. Ainsi, $[x_0; +\infty[\subset D$ si $x_0 \in D$. Traitons plusieurs cas :

(1) D est minoré et on sait dans ce cas que $\alpha = \mathrm{Inf}(D) \in \mathbb{R}$ existe :

- Si $\alpha \in D$, alors en prenant $x_0 = \alpha$ ci-dessus, on vient de voir que $[\alpha; +\infty[\subset D$. Mais comme α est la borne inférieure de D, donc un minorant de D, on a aussi $D \subset [\alpha; +\infty[$ et, par double inclusion, on a $D = [\alpha; +\infty[$ avec $\alpha = \mathrm{Min}(D) \in \mathbb{R}$.
- Si $\alpha \notin D$, encore une fois, comme α est un minorant de D, on a $D \subset [\alpha; +\infty[$. Mais comme $\alpha \notin D$, on a même $D \subset]\alpha; +\infty[$. Par propriété de la borne inférieure, si $x > \alpha$, il existe un $x_0 \in D$ tel que $\alpha < x_0 < x = \alpha + \varepsilon$ et on a $x \in D$ d'après ce qui précède donc $]\alpha; +\infty[\subset D$. Par double inclusion, on a bien $D =]\alpha; +\infty[$ avec $\alpha = \mathrm{Inf}(D) \in \mathbb{R}$.

(2) D n'est pas minoré donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $x_0 \in D$ tel que $x_0 < x$ et ce qui précède montre alors que $[x_0; +\infty[\subset D$ donc que $x \in D$. Ainsi, $D = \mathbb{R} =] - \infty; +\infty[$ $(\alpha = -\infty)$.

Dans les trois cas, si $D \neq \emptyset$, $\boxed{D \text{ est une demi-droite de la forme } [\alpha; +\infty[\text{ ou }]\alpha; +\infty[.}$

14.1 Si $x < y$ sont dans D alors $\forall t > 0,\ 0 \leqslant h_1(t)e^{-yt} \leqslant h_1(t)e^{-xt}$ par croissance de l'exponentielle et positivité de h_1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-yt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt$ (tout converge), donc $0 \leqslant L_1(y) \leqslant L_1(x)$, c'est-à-dire que $\boxed{L_1 \text{ est positive et croissante sur } D.}$

14.2 Pour $x > \alpha$, on a $x \in D$ d'après **13.2** donc $\int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt$ converge et, comme $\forall t > 0,\ h_1(t)e^{-xt} \geqslant 0$, on a $\int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt = \int_0^{A} h_1(t)e^{-xt}dt + \int_A^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt$ par Chasles avec $\int_A^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt \geqslant 0$ donc

$$\boxed{\int_0^{A} h_1(t)e^{-xt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt = L_1(x) \leqslant M \quad \text{(I) pour } x > \alpha.}$$

Pour $A > 0$ fixé et tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $e_1 : t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ est continue sur $]0; A]$ avec $e_1(t) \underset{0}{\sim} h_1(t)$ donc e_1 est intégrable sur $]0; A]$ par comparaison car h_1 l'est par hypothèse. Ainsi, $q : x \mapsto \int_0^A h_1(t)e^{-xt}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $s(x,t) = h_1(t)e^{-xt}$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = \int_0^A s(x,t)dt$:

- (H_1) Pour tout $t \in]0; A]$, la fonction $x \mapsto s(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.
- (H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto s(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0; A]$.
- (H_3) Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $\forall x \in [a; b]$, $\forall t \in]0; A]$, $|s(x,t)| = |h_1(t)e^{-xt}| = h_1(t)e^{-xt} \leqslant h_1(t)e^{-at} = \varphi_a(t)$ et φ_a est continue et intégrable par comparaison sur $]0; A]$ car h_1 l'est.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction q est continue sur $\mathbb{R}$ donc notamment en α et on a donc $\lim\limits_{x \to \alpha^+} q(x) = q(\alpha)$. Il suffit donc de passer à la limite (qui existe donc) dans l'inégalité large (I), ce qui donne $\int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}dt = q(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha^+} q(x) \leqslant M$ car $\forall x > \alpha,\ q(x) \leqslant M$, d'où $\boxed{\int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}dt \leqslant M.}$

14.3 On vient de prouver que l'application $A \mapsto \int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $t \mapsto h_1(t)e^{-\alpha t}$ est continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, cela implique d'après le cours l'intégrabilité de $t \mapsto h_1(t)e^{-\alpha t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui montre que $\alpha \in D$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite. On conclut ce raisonnement par l'absurde : L_1 n'est donc pas majorée sur D. Mais comme L_1 est décroissante d'après **14.1**, par le théorème de la limite monotone, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to \alpha^+} L_1(x) = +\infty.}$

15.1 Soit $x > \alpha$, toutes les intégrales qui suivent sont convergentes (mêmes justifications). Par CHASLES, on a $|L_1(x) - L_2(x)| = \left| \int_0^{+\infty} (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}dt \right| = \left| \int_0^B (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}dt + \int_B^{+\infty} (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}dt \right|$. Ainsi, $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-xt}dt + \int_B^{+\infty} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-xt}dt$ par inégalité triangulaire sur les réels et les intégrales. Ainsi, $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt + \int_B^{+\infty} \varepsilon h_1(t)e^{-xt}dt$ par l'hypothèse faite dans l'énoncé et car $x > \alpha$ donc $\forall t \in]0; B]$, $e^{-xt} \leqslant e^{-\alpha t}$. Ainsi, par définition de $L_1(x)$ et car $t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\boxed{|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt + \varepsilon L_1(x).}$

15.2 B étant fixé, $\int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt$ est une constante et comme $\lim\limits_{x \to \alpha} L_1(x) = +\infty$ par hypothèse, il existe un réel $r > 0$ tel que, pour $0 < x - \alpha < r$, on ait $\int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt \leqslant \varepsilon L_1(x)$. Ainsi on a $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant 2\varepsilon L_1(x)$ pour $0 < x - \alpha < r$, ce qui prouve (définition de négligeable, $\varepsilon > 0$ étant quelconque) que $L_1(x) - L_2(x) \underset{x \to \alpha^+}{=} o(L_1(x))$ donc que $\boxed{L_1(x) \underset{x \to \alpha^+}{\sim} L_2(x).}$