DS 5.1 : EXTRAIT DE CCP PSI 2007 MATHS 2

PSI 1 2025/2026 **samedi 17 janvier 2026**

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien sera noté $(u|v)$.

<u>Définition</u> *: pour n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel H, on appelle matrice de* Gram *des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$, la matrice $G(v_1, \cdots, v_n) = \left(g_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $g_{i,j} = (v_i|v_j)$ pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.*

Pour les calculs de déterminant, lorsque vous utilisez des manipulations sur les lignes ou les colonnes, il vous est demandé <u>d'indiquer précisément quelles manipulations vous effectuez</u>.

PARTIE 1 : UN COURT EXEMPLE

On considère les trois vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ *de $\mathbb{R}^3$ et les deux réels a et b.*

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.1 Écrire la matrice de Gram $G(u,v,w)$ des vecteurs u, v, w.

1.2 *Des implications :*

1.2.1 Calculer $\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w)\big)$, où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w)$ est la matrice des vecteurs u, v, w dans $\mathcal{B}_c$.

1.2.2 En déduire que si la famille (u,v,w) est liée alors $\det(G(u,v,w)) = 0$.

1.2.3 Montrer que $\det(G(u,v,w)) \geqslant 0$ et étudier la réciproque de la question précédente.

PARTIE 2 : ÉQUIVALENCE

2.1 *Condition de nullité :* soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i qui vaut 1.

2.1.1 Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, calculer le produit $X_i^T C X_j$.

2.1.2 En déduire que $C = 0$ si et seulement si pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ on a $X^T C Y = 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base quelconque de E. Soit la matrice de Gram *des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ notée $A = G(e_1, \cdots, e_n)$. Pour tout vecteur u de E, on note avec la même lettre majuscule U la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}$.*

2.2 Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, justifier l'égalité $(x|y) = X^T A Y$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une base <u>orthonormale</u> de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

2.3 *Condition suffisante :* pour tout vecteur u de E, on note U' la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}'$.

2.3.1 Que vaut $(x|y)$ en fonction de X' et Y' si $(x,y) \in E^2$?

2.3.2 Soit x un vecteur de E. Rappeler la relation entre les matrices X, X' et P.

2.3.3 En déduire que $P^T A P = I_n$.

2.3.4 Montrer que la matrice A est inversible et que $\det(A) > 0$.

2.3.5 Déduire des résultats précédents que si $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice $B = G(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifie $\det(B) > 0$.

2.4 *Condition nécessaire :* dans un espace préhilbertien réel H, on considère n vecteurs **quelconques** $u_1, \cdots, u_n$, avec $n \geqslant 1$. Soit $M = G(u_1, \cdots, u_n)$. À $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on associe le vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ de H.

2.4.1 Exprimer les coefficients de la matrice MX en fonction des produits scalaires $(u_i|v)$.

2.4.2 En déduire l'égalité $X^T MX = ||v||^2$ où $||v||$ est la norme euclidienne du vecteur v.

2.4.3 Montrer que $MX = 0$ si et seulement si v est le vecteur nul.

2.4.4 On suppose que M est inversible, déduire de la question précédente que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre.

2.5 *Produit scalaire constant :* dans cette question suppose $n \geqslant 2$ et on considère n vecteurs **unitaires** $u_1, \cdots, u_n$ d'un espace préhilbertien H tels qu'il existe un réel α pour lequel on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow (u_i|u_j) = \alpha$. On note à nouveau M la matrice $M = G(u_1, \cdots, u_n)$.

2.5.1 Justifier que $|\alpha| \leqslant 1$.

2.5.2 Calculer $\operatorname{rg}\left(M - (1-\alpha)I_n\right)$ et en déduire que $\chi_M = (X - 1 + \alpha)^{n-1}(X - 1 - (n-1)\alpha)$.

2.5.3 Soit X un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 1 + (n-1)\alpha$. Montrer que $\alpha \geqslant -\dfrac{1}{n-1}$.

2.5.4 On suppose cette fois que $\alpha = -\dfrac{1}{n-1}$. Quelle est la valeur du vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} u_i$?

PARTIE 3 : DISTANCE À UN SOUS-ESPACE

On considère une famille $(v_1, \cdots, v_n)$ d'un espace préhilbertien réel H avec $n \geqslant 2$.

3.1 *Opérations sur les vecteurs d'une matrice de* GRAM *:*

3.1.1 Exprimer $\det\big(G(v_1, \cdots, v_{n-1}, \lambda v_n)\big)$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et de $\det\big(G(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n)\big)$.

3.1.2 Exprimer $\det\big(G(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1)\big)$ en fonction de $\det\big(G(v_1, \cdots, v_n)\big)$.

3.2 *Application à la distance :* soit $F = \operatorname{Vect}(v_1, \cdots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de H engendré par $v_1, \cdots, v_n$.

3.2.1 Soit $w \in F^{\perp}$. Exprimer $\det\big(G(v_1, \cdots, v_n, w)\big)$ en fonction de w et de $\det\big(G(v_1, \cdots, v_n)\big)$.

3.2.2 Soit $v \in H$, on note $d(v, F)$ la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F. Montrer l'égalité

$$\det\big(G(v_1, \cdots, v_n, v)\big) = \big(d(v, F)\big)^2 \det\big(G(v_1, \cdots, v_n)\big).$$

3.2.3 Calculer $d(w, F)$ avec $F = \operatorname{Vect}(u, v)$, où u, v et w sont les vecteurs définis dans la partie 1.

DS 5.2 : INSPIRÉ DE CCP PSI 2013 MATHS 1

PSI 1 2025/2026 **samedi 17 janvier 2026**

On rappelle la décomposition en série entière de la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

PARTIE 1 : ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS

1.1 Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Dans la suite du problème, on admettra que la valeur de cette intégrale est $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.2 *Étude de la fonction* h *:* par une première méthode

1.2.1 Justifier, pour tout réel b, que $t \mapsto \cos(2bt)\exp(-t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On définit donc la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par*

$$\forall b \in \mathbb{R},\ h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt)\exp(-t^2)dt.$$

1.2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2}\,dt$ et déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.

1.2.3 En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.2.4 Pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, en utilisant $\cos(2bt) = \mathrm{Re}\left(e^{2ibt}\right)$, justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\cos(2bt) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n b^{2n}}{(2n)!}\, t^{2n}.$$

1.2.5 En déduire une expression de $h(b)$ à l'aide de la somme d'une série, puis que

$$h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

1.3 *Étude de la fonction* h *:* par une seconde méthode, soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(b,t) = \cos(2bt)\exp(-t^2)$.
On admet juste ici, comme montré en question 1.2.1, que $t \mapsto f(b,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout réel b.

1.3.1 Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $h'(b)$ sous forme intégrale.

1.3.2 En déduire que $\forall b \in \mathbb{R},\ h'(b) + 2bh(b) = 0$.

1.3.3 Établir comme en question 1.2.5 que $\forall b \in \mathbb{R},\ h(b) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$.

1.4 *Étude de la fonction φ :*

1.4.1 Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.$$

1.4.2 Montrer que φ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$.

1.4.3 Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0;+\infty[$ on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\varphi(x).$$

Indication : on pourra utiliser un changement de variable.

1.4.4 Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE 2 : TRANSFORMÉE DE FOURIER

2.1 *Étude de la fonction ψ :*

2.1.1 Vérifier que l'on définit une fonction ψ, continue sur $\mathbb{R}$, paire en posant

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \psi(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2at)}{1+t^2} dt.$$

2.1.2 Calculer $\psi(0)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et j_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ j_p(x) = \frac{1 - \exp(-p^2(1+x^2))}{2(1+x^2)}.$$

Dans la suite de cette partie, on fixe un réel a.

On pose alors $u_{n,p} = \int_0^n j_p(x)\cos(2ax)dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Justifier l'existence de $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et l'expliciter sous forme d'une intégrale.

2.3 *Convergence simple :* soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $k_n(y) = \int_0^n y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)dx$.

2.3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que k_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.3.2 Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction k que l'on explicitera.

2.4 Justifier l'intégrabilité sur $[0;+\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y)\exp(-y^2)$.

2.5 Vérifier que $j_p(x) = \int_0^p ye^{-(1+x^2)y^2}dy$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

*On admet alors la possibilité de permuter les deux intégrales (*FUBINI*), c'est-à-dire que, pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$:*

$$u_{n,p} = \int_0^n \left(\int_0^p ye^{-(1+x^2)y^2}\cos(2ax)dy\right) dx = \int_0^p \left(\int_0^n y\cos(2ax)e^{-(1+x^2)y^2}dx\right) dy.$$

2.6 Calculer $\psi(a)$.