DS 5.1 : MINES 2 PC 2020

PSI 1 2025/2026 **samedi 17 janvier 2026**

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0;+\infty[$ *ou sur* $\mathbb{R}$.

On note $C^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel contenant les fonctions continues de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$.

Étant donné un intervalle I *de* $\mathbb{R}$, *on appelle fonction polynomiale sur* I *toute fonction de la forme* $f : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\forall x \in I,\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, *où* n *est un entier naturel et* $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ *des nombres réels.*

Pour $x > 0$, *on définit (on admet son existence) le réel strictement positif* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. *Ceci définit donc* $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ *(fonction Gamma d'Euler), qui vérifie classiquement* $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Soit α *un réel strictement supérieur à* -1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$ *qui est bien défini car* $n+\alpha+1 > 0$. *On admet que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$ *pour tout réel* $x \in]-1;1[$ $\quad (1)$.

PARTIE 1 : PROJECTIONS ORTHOGONALES

Dans cette partie, E *désigne un espace préhilbertien réel, pas forcément de dimension finie, muni d'un produit scalaire* $(\,.\,|\,.\,)$. *On note* $||.||$ *la norme associée à ce produit scalaire, définie par* $||x|| = (x|x)^{1/2}$ *si* $x \in E$.

Soit F *un sous-espace vectoriel de* E *différent de* $\{0_E\}$ *et de dimension finie.*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormale de* F.

1 Soit x un vecteur de E, montrer que $x - \sum\limits_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i \in F^{\perp}$. En déduire que $E = F \oplus F^{\perp}$.

2 Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F. Pour $x \in E$, décomposer $\pi_F(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

3 Montrer que, pour $x \in E$, on a $||x - \pi_F(x)||^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

PARTIE 2 : POLYNÔMES DE LAGUERRE

Dans cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, *et on note* E_α *l'ensemble des fonctions continues* $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *telles que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ *est convergente.*

4 Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

5 En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est convergente.

6 En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de $C^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$.

7 Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0;+\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on définit les fonctions :* $\varphi_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *et* $\psi_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *par* $\varphi_n(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$ *et* $\psi_n(x) = x^{-\alpha}e^x \varphi_n^{(n)}(x)$ *où la notation* $\varphi_n^{(n)}$ *désigne la dérivée d'ordre* n *de* φ_n *(avec la convention* $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$*).*

8 Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0;+\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0;+\infty[$. Cela permet désormais de considérer ψ_n comme un élément de E_α.

Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$, *on pose* $(f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$.

10 Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ définit un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $||\,.\,||_\alpha$ *la norme associée à* $(\,.\,|\,.\,)$: $||f||_\alpha = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx\right)^{1/2}$ *pour tout* $f \in E_\alpha$.

11 Soit un entier $n \geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![0;n-1]\!]$, établir que $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0$ et que $\varphi_n^{(k)}(x) \underset{+\infty}{=} o\big(e^{-x/2}\big)$.

12 Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que $(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx$.
En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$.

13 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $||\psi_n||_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n+\alpha+1)$.

PARTIE 3 : APPROXIMATION

On conserve les hypothèses et notations de la partie 2. Pour tout entier naturel k, *on définit la fonction* $f_k : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *par* $f_k(x) = e^{-kx}$, *qui est élément de* E_α *(on ne demande pas de le vérifier).*

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, *on note* V_N *le sous-espace vectoriel de* E_α *engendré par la famille finie* $(\psi_0, \cdots, \psi_N)$, *et on note* π_N *la projection orthogonale de* E_α *sur* V_N.

14 Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{||\psi_n||_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.
Indication : on pourra employer la même méthode qu'en question **12** pour calculer $(f_k|\psi_n)^2$ sans détailler la récurrence et utiliser la relation (1) donnée dans l'énoncé.

15 En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} ||f_k - \pi_N(f_k)||_\alpha = 0$.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ *le sous-espace vectoriel de* E_α *constitué des fonctions polynomiales.*

16 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $||f_k - p||_\alpha \leqslant \varepsilon$.

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *continue telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *On admet (facile à vérifier) que* $f \in E_\alpha$.

17 Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que des réels $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ tels que $\left|\left| f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right|\right|_\alpha \leqslant \varepsilon$.
Indication : on pourra utiliser la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(t) = f(-\ln(t))$ si $t < 0$ et $g(0) = 0$ et le résultat <u>admis</u> suivant dû à WEIERSTASS : si $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in [0;1],\ |\varphi(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$.

18 Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $||f - p||_\alpha \leqslant \varepsilon$.

19 Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A;A]$ (où $A > 0$). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(h(x) - q(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\Big)^2 dx \leqslant \varepsilon$.
Indication : on pourra utiliser la question **18** avec $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}}$ et α bien choisi.

DS 5.2 : MINES PC 2002 MATHS1

PSI 1 2025/2026 **samedi 17 janvier 2026**

On rappelle que $\forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}$ *et* $\mathrm{sh}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *et* $\forall u \in]-1;1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!u^n}{4^n(n!)^2}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, *on rappelle* $w_{2n} = \int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)dt = \frac{(2n)!\,\pi}{4^n(n!)^2}$ *et* $w_{2n+1} = \int_0^{\pi} \cos^{2n+1}(t)dt = 0$ *(*WALLIS*).*

Pour $x \in \mathbb{R}$, *en cas de convergence, on pose* $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

PARTIE 1 : CALCUL D'UNE INTÉGRALE

Pour $x \in \mathbb{R}$, *lorsque l'intégrale existe, on pose* $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}dt$.

1 Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

2 **Étude de** g **:**

2.1 Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 En déduire que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

2.3 Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0, g'(x) = -I \times \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

3 Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} g'(t)dt$ et déterminer sa valeur. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE F

4 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ converge, c'est-à-dire le domaine de définition de F.

5 **Encadrement de** F **sur** $\mathbb{R}_+^*$

5.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $\frac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n!)^2} \leqslant \frac{4^n}{(2n)!}$.

5.2 En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \mathrm{ch}(2x)$. Quelle est la limite de F en $+\infty$?

6 **Une expression intégrale de** F

6.1 Pour $t \in [0\,;\pi]$ fixé, donner sans preuve le développement en série entière $x \mapsto \exp(2x\cos(t))$.

6.2 En déduire la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt$.

7 On pose $f_1(x) = \int_{\pi/2}^{\pi} \exp(2x\cos(t))dt$. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ par convergence dominée à paramètre continu.

8 **Équivalent :** on définit, pour x réel, $f_2(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(2x\cos(t))dt$.

8.1 Transformer, pour $x > 0$, l'intégrale définissant $f_2(x)$ avec le changement de variable $u = 2x(1-\cos t)$.

8.2 Vérifier que, si $x > 0$ et $u \in [0\,;2x]$, alors $u - \frac{u^2}{4x} \geqslant \frac{u}{2}$ et en déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

9 Conclure que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$.

PARTIE 3 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE

Si f *est une fonction continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$, *intégrable sur* $]0;1]$, *on définit sa transformée de* LAPLACE L_f, *lorsque l'intégrale converge, par la relation* $L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

Posons $G : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$ *et* $L_F(x) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}dt$ *et* $L_G(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}dt$.

$\boxed{10}$ **Calcul de** $L_G(x)$

$\boxed{10.1}$ Justifier que $L_G(x)$ existe si et seulement si $x > 2$.

$\boxed{10.2}$ En posant $u = (x-2)t$ et avec la valeur de I de la partie 1, déterminer, pour $x > 2$, la valeur de $L_G(x)$.

$\boxed{11}$ **Calcul de** $L_F(x)$: on rappelle que F est définie par $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

$\boxed{11.1}$ Déterminer le domaine de définition de L_F. Indication : utiliser le résultat final de la partie 3.

$\boxed{11.2}$ Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt$ et montrer que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

$\boxed{11.3}$ Déterminer l'expression, pour $x > 2$, de $L_F(x)$ sous la forme de la somme d'une série.

$\boxed{11.4}$ En déduire une expression "simple" de $L_F(x)$, pour $x > 2$.

$\boxed{12}$ A-t-on L_F et L_G équivalentes en 2^+ ?

PARTIE 4 : FONCTIONS ÉQUIVALENTES

Dans cette partie, on considère deux fonctions h_1 *et* h_2 *positives, continues par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et intégrables sur* $]0;1]$ *telles que* $h_1(x) \underset{+\infty}{\sim} h_2(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h_2(x) = +\infty$.

Pour simplifier les notations, on notera $L_1(x) = \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}dt$ *et* $L_2(x) = \int_0^{+\infty} h_2(t)e^{-xt}dt$.

$\boxed{13}$ **Domaines de définition**

$\boxed{13.1}$ Montrer que L_1 et L_2 possèdent le même domaine de définition, que l'on notera D par la suite.

$\boxed{13.2}$ On suppose D non vide. Montrer que D est une demie-droite de la forme $]\alpha;+\infty[$ (avec $\alpha = -\infty$ éventuellement dans ce cas) ou $[\alpha;+\infty[$ (et $\alpha \in \mathbb{R}$ dans ce cas).

On supposera dorénavant que $D \neq \emptyset$ *et que* $D =]\alpha;+\infty[$ *avec éventuellement* $\alpha = -\infty$.

$\boxed{14}$ **Limites en** α

$\boxed{14.1}$ Justifier que L_1 est décroissante et positive sur D.

$\boxed{14.2}$ On suppose que L_1 est majorée sur D, il existe donc $M > 0$ tel que $\forall x \in D,\ L_1(x) \leqslant M$. Soit $A > 0$, montrer que $\forall x > \alpha,\ \int_0^A h_1(t)e^{-xt}dt \leqslant M$ et en déduire que $\int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}dt \leqslant M$.

$\boxed{14.3}$ En déduire une contradiction et déterminer la limite de $L_1(x)$ quand x tend vers α.

$\boxed{15}$ **Comparaison de** L_1 **et** L_2 : soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc $B > 0$ tel que $\forall t > B,\ |h_1(t) - h_2(t)| \leqslant \varepsilon h_1(t)$.

$\boxed{15.1}$ Montrer que, pour $x > \alpha$, on a $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \left(\int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}dt \right) + \varepsilon L_1(x)$.

$\boxed{15.2}$ En déduire que L_1 et L_2 sont équivalentes en α^+.