PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 15

PSI 1 2025-2026 **du lundi 19/01 au vendredi 23/01**

1 Normes d'un espace vectoriel : voir programme précédent

2 Suites dans un espace vectoriel normé (evn) : voir programme précédent

3 Équivalence des normes : voir programme précédent

4 Fonctions continues et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: voir programme précédent

5 Suites réelles ou complexes : révision de sup.

6 Rayon de convergence d'une série entière :

- définition des séries entières de la variable complexe ou de la variable réelle ;
- opération sur les séries entières : multiplication par un scalaire, somme, produit de CAUCHY ;
- lemme d'ABEL ; intervalle des $r > 0$ tels que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
- définition du rayon de convergence R d'une série entière, disques ouverts et fermés de convergence ;
- comportement de la série $\sum a_n z^n$ si $|z| < R$ (CVA) et si $|z| > R$ (divergence grossière) ;

7 Calcul du rayon d'une série entière :

- égalité ou inégalité sur les rayons associés si $|a_n| \leqslant |b_n|$, si $a_n \underset{\infty}{=} O(|b_n|)$, $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$;
- rayon R s'il existe z_0 et z_1 tels que $|z_0| = |z_1| = R$ et $\sum a_n z_0^n$ CV et $\sum a_n z_1^n$ DV ;
- rayon avec D'ALEMBERT, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ alors $R = 1/L$;
- si R_a, R_b sont les rayons respectifs de $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ alors ceux de $\sum \lambda a_n z^n$, $\sum(a_n + b_n)z^n$ et $\sum \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ sont au moins égaux à $\mathrm{Min}(R_a, R_b)$ (égalité pour la somme si $R_a \neq R_b$) ;
- une série entière et ses séries dérivée et "primitive qui s'annule en 0" ont le même rayon ;

8 Somme d'une série entière :

- convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence ;
- unicité des coefficients d'une série entière si le rayon de convergence est non nul ;
- somme d'une somme, d'un produit de CAUCHY de séries entières sur l'intersection des disques ouverts ;
- dérivation et intégration terme à terme de la somme f d'une série entière de la variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence : aspect C^∞ de f et relation $n!a_n = f^{(n)}(0)$;

QUESTIONS DE COURS :

1. définir une norme dans un espace vectoriel (déf. 9.1)
2. définir la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé (déf. 9.8)
3. énoncer le théorème sur la caractérisation de la convergence par les coordonnées (th. 9.10)
4. définir le rayon de convergence d'une série entière (déf. 10.2)
5. énoncer les relations sur les rayons relatifs aux opérations sur les séries (prop. 10.5 et 10.6)
6. énoncer le résultat concernant les rayons des séries primitives et dérivées (prop. 10.7)
7. énoncer le résultat sur les intégrales ou primitive d'une série entière sur $]-R; R[$ (th. 10.11)
8. prouver le lemme d'ABEL (prop. 10.1)
9. prouver le résultat sur la convergence de $\sum a_n z^n$ si $|z| < R$ ou $|z| > R$ (th. 10.2)
10. prouver le théorème de comparaison sur les rayons des séries (th. 10.3)

Prévision pour la prochaine semaine : révision des espaces normés et séries entières