TD 16 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 16 janvier 2026**

16.1 Pour $x \in \mathbb{R}$, par croissances comparées, on a $\left(\dfrac{x^{4n}}{4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$. Ainsi, par définition du rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{4n}}{4n+1}$, on a $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{4n}}{4n+1} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{4n+1}$ diverge par comparaison à la série harmonique. Posons $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4n}}{4n+1}$, le domaine de définition de g est donc $D_g =]-1;1[$. Pour $x \in]-1;1[$, $f(x) = xg(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et on sait d'après le cours que f est de classe C^∞ sur $]-1;1[$ avec $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \dfrac{1}{1-x^4}$. Comme $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1-x^2)$, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-x^4}$ est $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{cx+d}{1+x^2}$. En identifiant par exemple, on trouve $a = b = \dfrac{1}{4}$, $c = 0$ et $d = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{1}{4(1-x)} + \dfrac{1}{4(1+x)} + \dfrac{1}{2(1+x^2)}$. Ainsi $f'(x) = \left[\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{4} + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}\right]'$, comme $f(0) = 0$, en intégrant, sur l'intervalle $]-1;1[$, on a $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{4} + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}$.

On en conclut que $g(0) = 1$ et que $\forall x \in]-1;0[\cup]0;1[$, $g(x) = \dfrac{1}{4x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{2x}$.

16.2 **a.** Si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\theta) = 0$, on aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin((n+1)\theta) = 0$. Mais comme on sait que $\sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)\cos(n\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta)$, on a $\sin(\theta)\cos(n\theta) = \sin((n+1)\theta) - \cos(\theta)\sin(n\theta)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\theta)\cos(n\theta) = 0$. Mais comme $\sin(\theta) \neq 0$ puisque $\theta \in]0;\pi[$ par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\theta) = 0$. On aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin^2(n\theta)+\cos^2(n\theta)) = 0^2+0^2 = 0$ ce qui est impossible puisque $\sin^2(n\theta)+\cos^2(n\theta) = 1$.

On conclut ce raisonnement par l'absurde : la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

D'après la question **a.**, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)\,1^n$ diverge grossièrement, comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)z^n$ diverge pour $z = 1$, on a donc $R \leqslant 1$. De plus, comme $|\sin(n\theta)| \leqslant 1$ et que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ vaut 1, on déduit du cours que $R \geqslant 1$. Au final, $R = 1$.

b. Si $|z| = 1$, on a $|\sin(n\theta)z^n| = |\sin(n\theta)|$ d'où $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)z^n$ diverge grossièrement avec **a.**.

c. Si $|z| < 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)z^n$ converge absolument car $R = 1$ et $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} z^n$ par la formule d'Euler classique puis $S(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (ze^{i\theta})^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (ze^{-i\theta})^n\right)$ avec de Moivre donc on obtient $S(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{1-ze^{i\theta}} - \dfrac{1}{1-ze^{-i\theta}}\right) = \dfrac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})z}{2i(1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z+z^2)} = \dfrac{z\sin(\theta)}{1-2z\cos(\theta)+z^2}$.

16.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(3n)!}$ converge car, par croissances comparées, $\dfrac{1}{(3n)!} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$ et que la série exponentielle converge. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} = \mathrm{ch}(1) = \dfrac{e^1+e^{-1}}{2}$ et qu'on utilise $\mathbb{U}_2 = \{1,-1\}$ pour le calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!}$, on peut penser à utiliser les racines troisièmes de l'unité pour le calcul de $S_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n)!}$. Comme on sait que

$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a déjà $e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$ donc $e^1 = S_0 + S_1 + S_2$ en posant $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}$ et $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$.

Mais on a aussi $e^j = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+2}}{(3n+2)!} = S_0 + jS_1 + j^2S_2$ car $j^3 = 1$. De plus, $e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+2}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+4}}{(3n+2)!} = S_0 + j^2S_1 + jS_2$ car $j^4 = j$.

Cela donne un système trois équations/trois inconnues mais, comme on sait que $1 + j + j^2 = 0$, il suffit de sommer ces trois relations pour avoir $3S_0 = e + e^j + e^{j^2}$ donc $S_0 = \frac{e + e^j + e^{j^2}}{3} = \frac{e + e^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}} + e^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}}}{3}$ car $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j^2}$. Ainsi, $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\Big(e + \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big) \sim 1,168$.

De même, on aurait $3S_1 = e + j^2e^j + je^{j^2}$ et $3S_2 = e + je^j + j^2e^{j^2}$.

16.4 **a.** On note S_n l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;n]\!]$. On sait que $\text{card}\,(S_n) = n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_n selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de S_n qui ont exactement k points fixes. Alors $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} S_{n,k}$ (réunion disjointe) avec $S_{n,n-1} = \emptyset$ car si une permutation a au moins $n-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait n points fixes. On a donc $\forall n \geqslant 1,\ \text{card}\,(S_n) = n! = \sum_{k=0}^{n} A_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}\,(S_{n,k})$.

Pour dénombrer $S_{n,k}$, on choisit les k points fixes parmi les éléments de $[\![1;n]\!]$ ce qui fait $\binom{n}{k}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $n-k$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de $A_{n-k}(0)$ par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange"). On obtient donc $\text{card}\,(S_{n,k}) = A_n(k) = \binom{n}{k} A_{n-k}(0)$.

Pour $n = 0$, on a $0! = A_0(0) = \sum_{k=0}^{0} A_0(k) = 1$ par convention et $A_0(0) = \binom{0}{0} A_{0-0}(0) = 1$ donc les formules sont valables aussi pour $n = 0$.

b. Comme $S_{n,0} \subset S_n$, on a $0 \leqslant A_n(0) \leqslant n!$ donc $0 \leqslant \frac{A_n(0)}{n!} \leqslant 1$. On sait d'après le cours que le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$ est alors supérieur à celui de $\sum_{n\geqslant 0} z^n$. Comme $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est de rayon de convergence 1, on a $R \geqslant 1$ donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$ converge si $|z| < 1$.

c. Comme le rayon de convergence de la série exponentielle est égal à $+\infty$, si $|z| < 1$, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, $e^z f(z) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n(0)}{n!} z^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}(0)}{k!(n-k)!}\Big) z^n$. Or $\sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}(0)}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(0) = 1$ d'après **a.**. Ainsi, $e^z f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. À nouveau, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ vaut 1 et d'après le cours sur le rayon de convergence d'un produit de Cauchy de deux séries entières, $1 \geqslant \text{Min}(R, +\infty)$ ce qui donne $R \leqslant 1$ et, au final, $R = 1$.

De plus, si $|z| < 1$, on a $f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$. On effectue encore un produit de Cauchy et si $|z| < 1$, il vient à nouveau par produit de Cauchy, $f(z) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\Big) z^n$ donc, par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n(0) = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

d. Avec ces notations de l'énoncé, $p_n = \frac{A_n(0)}{n!}$ donc $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ qui est la somme partielle de la série exponentielle associée à e^{-1}. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{e} \sim 0,36$.

16.5 Pour tout entier naturel n, posons $u_n = \frac{2n^2+5n+3}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison à une série de RIEMANN, comme $2 > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Pour calculer la somme de cette série numérique, posons $a_n = 2n^2+5n+3$ et considérons la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Toujours par croissances comparées, $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc, par définition, le rayon de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x \in]-1;1[$, comme $a_n = 2(n+1)(n+2)-(n+1)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ (les deux séries convergent puisque les deux rayons valent encore 1). On reconnaît les dérivées de la série géométrique, $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ de sorte que $f(x) = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3+x}{(1-x)^3}$. Ainsi, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+5n+3}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3+(1/2)}{(1-(1/2))^3} = 28$.

16.6 **a.** Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (-1)^n$, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = 1$ et sa fonction somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ est majorée par 1 sur $[0;1[$.

b. L'hypothèse se traduit par $a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc, pour tout réel $r \in]0;1]$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi donc, par définition, le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie donc $R \geqslant 1$. Ainsi, la fonction somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-1;1[$ au minimum.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |na_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n \geqslant n_0$ et $x \in]0;1[$, il vient $\left|f(x)\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}|a_n|x^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n + \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ par inégalité triangulaire. On en déduit la majoration $\left|f(x)\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n - \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}\frac{x^n}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$. De plus, comme $\varphi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}|a_n|x^n - \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}\frac{x^n}{n}$ est polynomiale donc continue en 1, elle est bornée et on a $\varphi(x) \underset{1}{=} o(\ln(1-x))$ car $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x) = -\infty$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha;1[,\ |\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|\ln(1-x)|$. En combinant ces deux renseignements, $\forall x \in [1-\alpha;1[,\ \left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon|\ln(1-x)|$ car on sait que $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ si $x \in]-1;1[$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [1-\alpha;1[,\ \left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon|\ln(1-x)|$. Ceci justifie bien que $f(x) \underset{1^-}{=} o(\ln(1-x))$.

c. Avec l'exemple de la question **a.**, si on pose $b_n = (-1)^n$, la fonction somme $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est bien définie sur $]-1;1[$ et vérifie bien $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$ car g est bornée sur $[0;1[$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x) = -\infty$. Pourtant, la suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. La réciproque espérée est donc fausse.

Même si on impose que tous les b_n sont positifs, il suffit de prendre $b_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2 et

$b_n = 0$ sinon. Alors, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{2^n}}{2^n}$ est de rayon de convergence 1 car $\left(\dfrac{x^{2^n}}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ par croissances comparées. En notant $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2^n}}{2^n}$, on a $\forall x \in [-1;1]$, $|g(x)| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 2$ donc g est bornée sur $[-1;1]$ et $g(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$ même si $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 puisque $2^n b_{2^n} = 1$.

Conclusion : si, au voisinage de 1^-, $f(x) \underset{1^-}{=} o\big(\ln(1-x)\big)$, on ne peut pas conclure que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

16.7 **a.** Posons $a_n = \dbinom{2n}{n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. D'après D'ALEMBERT, le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n} x^n$ vaut $R = \dfrac{1}{4}$.

Si $x = \dfrac{1}{4}$, $a_n x^n = \dbinom{2n}{n} x^n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{4^n(2\pi n)n^{2n}e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec l'équivalent de STIRLING donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Si $x = -\dfrac{1}{4}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est alternée et $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \dfrac{4n+2}{4n+4} < 1$ d'après **a.** donc la suite $\big(|a_n x^n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 puisqu'on vient de voir que $|a_n x^n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ converge.

L'ensemble de définition de f est donc $\left[-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$.

b. On a vu en question **a.** que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$. En multipliant par x^n et en sommant, on a donc $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(2n+1)a_n x^n = 4x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on reconnaît, puisqu'on est dans l'intervalle ouvert de convergence, $f'(x) = 4xf'(x) + 2f(x)$ ou $(1-4x)f'(x) = 2f(x)$ donc f est solution sur $\left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$ de $(E)\ :\ (1-4x)y' - 2y = 0$.

c. On résout classiquement cette équation différentielle linéaire homogène normalisée (E) d'ordre 1 et, comme une primitive de $a : x \mapsto \dfrac{2}{1-4x}$ est $A : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1-4x)$ et puisque $f(0) = a_0 = 1$, on a $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$, $f(x) = e^{\frac{-\ln(1-4x)}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

16.8 **a.** On calcule $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, $a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$, $a_4 = a_3 + 3a_2 = 10$, $a_5 = a_4 + 4a_3 = 26$ et on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$. On vient de faire l'initialisation.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2n!$ et $0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$, comme $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$, on a $0 + (n+1).0 \leqslant a_{n+2} \leqslant 2n! + 2(n+1)(n-1)! = 2(n-1)!(n+n+1) \leqslant 2(n-1)!(n(n+1)) = 2(n+1)!$ car $n+1 \leqslant n^2$ puisque $n \geqslant 1$. Par principe de récurrence double, on a $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant 2(n-1)!$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{a_n}{n!} \leqslant \dfrac{2}{n}$ donc, par encadrement, $\left(\dfrac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Comme la suite $\left(\dfrac{a_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, elle est bornée, donc par définition du rayon de convergence d'une série entière, on a $R \geqslant 1$.

b. Les dérivations qui suivent sont valides sur l'intervalle ouvert de convergence. Pour $x \in]-R;R[$, on a $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{na_n}{n!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{n!}x^n$ et $f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{na_{n+1}}{n!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_{n+2}}{n!}x^n$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$\dfrac{a_{n+2}x^n}{n!} = \dfrac{a_{n+1}x^n}{n!} + \dfrac{(n+1)a_nx^n}{n!}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+2}x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)a_nx^n}{n!}$ en sommant ce qui revient à $f''(x) = f'(x) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{na_nx^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nx^n}{n!} = f'(x) + xf'(x) + f(x)$. Par conséquent, f est solution sur $]-R;R[$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - (1+x)y' - y = 0$.

c. D'après la question précédente, on a $f''(x)-(1+x)f'(x)-f(x) = (f'(x)-(1+x)f(x))' = 0$. Comme $]-R;R[$ est un intervalle et que $f'(0)-(1+0)f(0) = a_1 - a_0 = 0$, on a donc $\forall x \in]-R;R[,\ f'(x)-(1+x)f(x) = 0$. On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \dfrac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-R;R[$, que l'on a $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $f(0) = a_0 = 1$.

Alors $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de Cauchy et obtenir $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i+2j=n}\frac{n!}{i!j!2^j}\Big)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $f(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a_n}{n!} = \displaystyle\sum_{i+2j=n}\frac{1}{i!j!2^j}$ donc $a_n = \displaystyle\sum_{i+2j=n}\frac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n-2j$, on a la formule $a_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour information : on considère l'ensemble I_n des permutations σ de $[\![1;n]\!]$ qui sont des involutions, c'est-à-dire qui vérifient $\sigma\circ\sigma = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$; et on pose $b_n = \mathrm{card}\,(I_n)$. Alors, pour $n \geqslant 1$, on partitionne les involutions σ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de b_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)b_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors b_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!]\setminus\{k\}$ une involution de cet ensemble.

Cette partition implique la relation $b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)b_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $b_2 = 2 = 1+1.1 = b_1 + 1.b_0$ en prenant comme convention que $b_0 = 1$, on a bien $\forall n \geqslant 0,\ b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)b_n$. On montre alors par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

On peut alors expliquer la relation (R) de manière combinatoire, en constatant qu'une involution σ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n, et on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n-2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \displaystyle\bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} A_{n,j}$ où $A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n-2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n-2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\text{card}\,(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \dfrac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \dfrac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \text{card}\,(A_n) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{card}\,(A_{n,j}) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

16.9 **a.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut par définition $R = \text{Sup}\left(\{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\}\right)$ avec par convention $R = +\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.
b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$, on a $\dfrac{t^n}{2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ donc, par croissance de l'intégrale, on a l'encadrement $0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{t^n}{2} dt = \dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$ (1). Comme le rayon de convergence des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{2(n+1)}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+1}$ vaut classiquement 1, on peut conclure d'après le cours que $R = 1$. Par croissance de l'intégrale, si $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2}$ donc $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, l'encadrement (1) montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Par critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(-1)^n$ converge alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge par minoration puisque $a_n \geqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$ et que la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi, le domaine de définition de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $[-1;1[$.
c. Dans la relation (R) : $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \dfrac{a}{1-xt} + \dfrac{bt}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t^2}$, pour $x \neq 0$, on multiplie par $1-xt$ et on prend $t = \dfrac{1}{x}$ et on trouve $a = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Dans (R), on multiplie par $1+t^2$ et on prend $t = i$ pour avoir $\dfrac{1}{1-ix} = \dfrac{1+ix}{1+x^2} = bi + c$ donc, comme b et c sont réels, on a $b = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $c = \dfrac{1}{1+x^2}$. On peut aussi bien sûr procéder par identification. Alors, $\forall t \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{(1+x^2)(1-xt)} + \dfrac{xt}{(1+x^2)(1+t^2)} + \dfrac{1}{(1+x^2)(1+t^2)}$ et cette relation marche encore pour $x = 0$.
d. Pour $|x| < 1$, la série de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n(t) = \dfrac{x^n t^n}{1+t^2}$ converge normalement sur $[0;1]$ car $||u_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant |x|^n$ et que la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$ donc on peut intervertir série et intégrale sur le segment $[0;1]$, puisque les fonctions u_n sont toutes continues sur $[0;1]$, pour avoir la relation $\forall x \in]-1;1[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 u_n(t)dt\right) = \int_0^1 \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \int_0^1 \dfrac{dt}{(1-xt)(1+t^2)}$ car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(xt)^n = \dfrac{1}{1-xt}$ puisque $|xt| < 1$. D'après **c.**, $\forall x \in]-1;1[$, $S(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\int_0^1 \dfrac{xdt}{1-xt} + \dfrac{x}{1+x^2}\int_0^1 \dfrac{tdt}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+x^2}\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ par linéarité de l'intégrale donc $S(x) = \dfrac{x}{1+x^2}[-\ln(1-xt)]_0^1 + \dfrac{x}{2(1+x^2)}[\ln(1+t^2)]_0^1 + \dfrac{1}{1+x^2}[\text{Arctan}(t)]_0^1$ et on obtient donc $S(x) = \dfrac{-4x\ln(1-x) + 2x\ln(2) + \pi}{4(1+x^2)}$.
e. Les fonctions $v_n : x \mapsto u_n x^n$ sont toutes continues sur $[-1;0]$ et, pour $x \in [-1;0]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est alternée et la suite $(|v_n(x)|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, tend vers 0 et $|x| \leqslant 1$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, on a $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\right| \leqslant |v_{n+1}(x)| \leqslant u_{n+1}$ donc $||R_n||_{\infty,[-1;0]} \leqslant u_{n+1}$ ce qui montre par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[-1;0]} = 0$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$

converge uniformément vers S sur $[-1;0]$. Par théorème, on a donc la continuité de S sur $[-1;0]$ ce qui montre que $S(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \lim_{x \to -1^+} S(x) = \dfrac{\ln(2)}{2} + \dfrac{\pi}{8}$.

16.10 **a.** $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]-\infty;1[$ en la prolongeant par continuité en 0 avec $f(0) = -1$ puisque $\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$. F est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en 0 donc F est au moins définie sur $]-\infty;1[$.

Si $x = 1$, $f(t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t) \underset{1^-}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\Big)$ donc f est intégrable sur $[0;1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, le domaine définition de F est $D =]-\infty;1]$.

b. D'après le cours, $\forall t \in]-1;1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t = 0$). Pour $x \in]-1;1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $\widetilde{[0;x]}$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \displaystyle\int_0^x (-f(t))dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \dfrac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim_{x \to 1^-} F(x)$. En posant $u_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$, on a $||u_n||_{\infty,[0;1]} = \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[0;1]$ et, puisque toutes les u_n sont continues sur $[0;1]$, S est continue sur $[0;1]$ donc $F(1) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$. On a bien $\forall x \in [0;1]$, $F(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

c. Soit $G :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$. Par opérations, la fonction G est dérivable sur $]0;1[$. De plus, la fonction F est dérivable sur $]0;1[$ avec $F'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in]0;1[$, on a la relation

$$(F(x) + F(1-x) - G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x) + F(1-x) - G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0;1[$. On a $\lim_{x \to 0^+} (F(x) + F(1-x) - G(x)) = F(0) + F(1) - \dfrac{\pi^2}{6} = 0$ d'après **b.** et car $\lim_{x \to 0^+} \ln(x)\ln(1-x) = 0$ puisque $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x$ et $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$, donc $\forall x \in]0;1[$, $F(x) + F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

16.11 **a.** Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, ainsi, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{\alpha + n + 1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell = 1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, le rayon R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = \dfrac{1}{\ell} = 1$.

b. On a $v_n - v_{n-1} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 + \dfrac{\alpha}{k}\Big)\Big) - \alpha\ln(n) - \Big(\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \ln\Big(1 + \dfrac{\alpha}{k}\Big)\Big) - \alpha\ln(n-1)\Big) = \ln\Big(1 + \dfrac{\alpha}{n}\Big) - \alpha\ln\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ donc $v_n - v_{n-1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) + \alpha\Big(-\dfrac{1}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n \geqslant 2} (v_n - v_{n-1})$ converge absolument donc converge.

Par dualité suite-série, grâce à la question précédente, la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel α. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+\alpha}{k}\Big)\Big) - \ln(n^\alpha) = -\ln(n^\alpha a_n)$ donc $a_n = \dfrac{e^{-v_n}}{n^\alpha}$. Mais $\lim_{n \to +\infty} e^{-v_n} = \lambda = e^{-\alpha} > 0$ par continuité de l'exponentielle donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

c. <u>En 1</u> : d'après **c.**, comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ et que les a_n sont positifs, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. Par critère de RIEMANN, $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

<u>En −1</u> : la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ est alternée et la suite $(|a_n|)_{n \geqslant 0}$ tend vers 0 car $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ et $\alpha > 0$. De plus, comme $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{\alpha + n + 1} < 1$, la suite $(|a_n|)_{n \geqslant 0}$ est aussi décroissante. Ainsi, par le critère spécial des

séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge pour toutes les valeur de $\alpha > 0$.

16.12 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$. De plus, en posant $u : t \to \dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt$, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$. Or cette dernière intégrale converge absolument par comparaison aux intégrales de Riemann, donc elle converge, car $g : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et que $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge aussi.

b. On vient de voir que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui montre, par le théorème fondamental de l'intégration, que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f qui s'annule en 0. De plus, on sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ et cette formule marche aussi pour $t = 0$ car $1 = \dfrac{(-1)^0 t^{2.0}}{(2.0+1)!}$. Comme le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ vaut $R = +\infty$, on peut intégrer terme à terme sur $\widetilde{[0; x]}$ qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ pour avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}\right)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \exp(-xe^{-it})$ est continue sur le segment $J = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt$ existe. On sait que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc, en prenant $z = -xe^{-it}$, on obtient $\forall t \in J,\ \exp(-xe^{-it}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$.
Comme $\forall t \in J,\ |h_n(t)| = \dfrac{|x|^n}{n!}$, on a $||h_n||_{\infty,J} = \dfrac{|x|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge normalement vers h sur le segment J. Comme toutes les h_n et h sont continues sur J, le théorème d'intégration terme à terme sur segment montre que $I(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}dt$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'intégrale $L_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}dt$. On a le cas particulier $L_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1.dt = \frac{\pi}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $L_n = \displaystyle\frac{(-1)^n x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-int}dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}$.
Comme on sait que $\mathrm{Re}\,(I(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(L_n)$ et que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = 0$ si $n \geqslant 2$ est pair et que l'on a $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{-i(2k+1)\pi/2} - 1}{-i(2k+1)}\right) = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ si $n = 2k+1 \geqslant 1$ est impair, il ne reste dans la formule ci-dessus que $\mathrm{Re}\,(I(x)) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$.

d. Par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|I(x)| = \left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})|dt$. Or $\exp(-xe^{-it}) = e^{-x\cos(t)} e^{ix\sin(t)}$ donc $|\exp(-xe^{-it})| = e^{-x\cos(t)}$.

Méthode 1 : la fonction $\cos$ est concave sur J car $\cos'' = -\cos \leqslant 0$ sur J donc $\forall t \in J,\ \cos(t) \geqslant 1 - \frac{2t}{\pi}$. Ainsi, $e^{-x\cos(t)} \leqslant e^{-x}e^{2xt/\pi}$ donc $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})|dt \leqslant e^{-x}\int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi}dt$. On en déduit donc que $|I(x)| \leqslant e^{-x}\left[\frac{\pi}{2x}e^{2xt/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi e^{-x}(e^x-1)}{2x} = \frac{\pi(1-e^{-x})}{2x}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(1-e^{-x})}{2x} = 0$, par encadrement, on obtient la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \exp(-xe^{-it})$ de sorte que $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x,t)dt$.

(H_1) pour tout $t \in J$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x,t) = 0 = a(t)$ car $\cos(t) > 0$.

(H_2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $h_x : t \mapsto g(x,t)$ et a sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(H_3) pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $|g(x,t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x) = \int_0^{\pi/2} a(t)dt = 0$.

D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}\,(I(x)) = \frac{\pi}{2} - F(x)$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$, on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Re}\,(I(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - F(x)\right) = 0$. Ceci assure l'existence d'une limite finie de F en $+\infty$ et sa valeur $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$ qu'on note $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).

16.13 Posons $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2^n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+2)(n+3)2^n}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell = \dfrac{1}{2}$ donc, d'après le cours et la règle de d'Alembert, $R = \frac{1}{\ell} = 2$.

Posons, pour $x \in]-2;2[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$ (série géométrique).

On peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire $]-2;2[$, pour avoir $\forall x \in]-2;2[,\ g'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{(2-x)^2}$ puis $g''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+2}} = \frac{4}{(2-x)^3}$.

En prenant $x = 1$ dans cette dernière relation, on a directement $g''(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+2}} = 4$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = 4 \times 2^2 = 16$.

16.14 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ où elle est de classe C^∞ par opérations.

Comme on sait que $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a $f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$. la fonction f ainsi prolongée est maintenant continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1-\cos(x)-\frac{x^2}{2}}{x^3}$ mais on sait aussi que $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ ce qui donne $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{=} o(1)$ et on a donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(0) = 0$ ce qui logique car f est paire donc f' (quand elle existe) est impaire.

Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{x^2\sin(x) - 2x(1-\cos(x))}{x^4} = \dfrac{x\sin(x) - 2(1-\cos(x))}{x^3}$ mais on a le développement limité $x\sin(x) - 2(1-\cos(x)) \underset{0}{=} x(x+o(x^2)) - 2\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right) \underset{0}{\sim} x^2 - x^2 + o(x^3) \underset{0}{=} o(x)$ donc $f'(x) \underset{0}{=} o(1)$ ce qui montre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc que f' est continue en 0. Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Mais on sait que $\cos$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}$. En prenant $x = 0$ dans cette somme, on obtient $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 0^{2k}}{(2k+2)!} = \frac{(-1)^0}{(2.0+2)!} = \frac{1}{2}$ donc on retrouve la valeur de $f(0)$ trouvée ci-dessus. Par conséquent, f est en fait développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}$ et f est donc de classe C^∞ sur sont intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$.

16.15 **a.** Si $R = 0$, il n'y a rien à démontrer car $]-R;R[$ est vide.

Si $R > 0$, par produit de CAUCHY, comme $\sum a_n x^n$ est de rayon R donc que $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $x \in]-R;R[$ par le lemme d'ABEL, $S(x)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big)x^n = a_0^2 + 2a_0a_1x + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ par hypothèse, ce qui donne $S(x)^2 = S(x) - x$ ou encore $S(x) = x + S(x)^2$.

b. À nouveau, si $R = 0$, il n'y a pas d'expression de $S(x)$ à trouver car $]-R;R[$ est vide.

Sinon, pour $x \in]-R;R[$, $S(x)^2 - S(x) + x = 0$ donc $S(x)$ est une racine réelle du polynôme $P_x = X^2 - X + x$. Comme le discriminant Δ_x du polynôme P_x vaut $\Delta_x = 1 - 4x$, et que $S(x)$ est un réel par construction, on a forcément $1 - 4x \geqslant 0$ donc $R \leqslant \frac{1}{4}$ et $\forall x \in]-R;R[,\ S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ ou $S(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$. Comme $f : x \mapsto 2S(x) - 1$ est développable en série entière sur $]-R;R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \pm\sqrt{1-4x}$. La continuité de f et le fait que f ne s'annule pas sur $]-R;R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \sqrt{1-4x}$ soit $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = -\sqrt{1-4x}$. Mais comme f vaut -1 en 0, elle est négative sur $]-R;R[$ et on a donc $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = -\sqrt{1-4x}$ donc $S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

D'après le cours, on sait que $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ car $u \mapsto \sqrt{1-u}$ l'est sur $]-1;1[$. Ainsi, il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ T(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On a bien sûr $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ T(x)^2 - T(x) + x = \frac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4} - \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} + x = 0$. En effectuant un produit de CAUCHY sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, et en identifiant les coefficients (les calculs ont déjà été faits ci-dessus), on trouve que $v_0 = T(0) = 0$, $v_1 = T'(0) = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ b_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$. Ainsi, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence donc, par récurrence forte, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ est bien de rayon $R = \frac{1}{4}$ comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$.

c. D'après le cours $\forall u \in]-1;1[,\ \sqrt{1+u} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$) donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ \sqrt{1-4x} = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{2(2n-1)(n!)^2}$. Comme $R = \frac{1}{4} > 0$ et que $\forall x \in]-R;R[,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{2(2n-1)(n!)^2}$, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on a a_0 (on le savait déjà) et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{(2n)!}{2(2n-1)(n!)^2} = \frac{(2n)(2n-2)!}{2n^2((n-1)!)^2} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Il vient $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 14$, $a_6 = 42$: ce sont les nombres de CATALAN.