PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 16

PSI 1 2025-2026 **du lundi 26/01 au vendredi 30/01**

1 Rayon de convergence d'une série entière :

- définition des séries entières de la variable complexe ou de la variable réelle ;
- opération sur les séries entières : multiplication par un scalaire, somme, produit de CAUCHY ;
- lemme d'ABEL ; intervalle des $r > 0$ tels que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
- définition du rayon de convergence R d'une série entière, disques ouverts et fermés de convergence ;
- comportement de la série $\sum a_n z^n$ si $|z| < R$ (CVA) et si $|z| > R$ (divergence grossière) ;

2 Calcul du rayon d'une série entière :

- égalité ou inégalité sur les rayons associés si $|a_n| \leqslant |b_n|$, si $a_n \underset{\infty}{=} O(|b_n|)$, $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$;
- rayon R s'il existe z_0 et z_1 tels que $|z_0| = |z_1| = R$ et $\sum a_n z_0^n$ CV et $\sum a_n z_1^n$ DV ;
- rayon avec D'ALEMBERT, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ alors $R = 1/L$;
- si R_a, R_b sont les rayons respectifs de $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ alors ceux de $\sum \lambda a_n z^n$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ et $\sum \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ sont au moins égaux à $\mathrm{Min}(R_a, R_b)$ (égalité pour la somme si $R_a \neq R_b$) ;
- une série entière et ses séries dérivée et "primitive qui s'annule en 0" ont le même rayon ;

3 Somme d'une série entière :

- convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence ;
- unicité des coefficients d'une série entière si le rayon de convergence est non nul ;
- somme d'une somme, d'un produit de CAUCHY de séries entières sur l'intersection des disques ouverts ;
- dérivation et intégration terme à terme de la somme f d'une série entière de la variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence : aspect C^∞ de f et relation $n! a_n = f^{(n)}(0)$;

4 Fonctions développables en série entière :

- définition d'une fonction développable en série entières (DSE) au voisinage de 0 ;
- stabilité des fonctions DSE par multiplication par un scalaire, somme, produit de CAUCHY ;
- séries de TAYLOR d'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 ;
- caractérisation des fonctions DSE par la limite du reste intégral : conditions suffisantes ;
- développements en séries entières des fonctions usuelles de la variable réelle ;
- exponentielle complexe sous forme de série = exponentielle complexe vue en sup ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir ce qu'est une fonction développable en série entière (déf. 10.4)
2 énoncer le résultat sur les intégrales ou primitive d'une série entière sur $]-R;R[$ (th. 10.11)
3 énoncer le résultat sur la classe d'une série entière et sur l'expression des coefficients (th. 10.12)
4 énoncer le résultat sur l'unicité des coefficients d'une série entière (prop. 10.13)
5 énoncer la structure de l'ensemble des fonctions DSE sur $]-r;r[$ (rem. 10.15)
6 énoncer la CNS pour qu'une fonction soit DSE sur $]-r;r[$ avec TAYLOR reste intégral (th. 10.15)
7 énoncer trois DSE de fonctions classiques au choix (th. 10.17)
8 prouver le lemme d'ABEL (prop. 10.1)
9 prouver le résultat sur la convergence de $\sum a_n z^n$ si $|z| < R$ ou $|z| > R$ (th. 10.2)
10 prouver le théorème de comparaison sur les rayons des séries (th. 10.3)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur les séries entières et début des variables aléatoires