# DEVOIR 17 : SÉRIES ENTIÈRES

**PSI 1 2025-2026** **mardi 20 janvier 2026**

**QCM**

**1** *Caractérisation séquentielle : soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* $a$

**1.1** $f$ continue en $a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$

**1.2** $f$ continue en $a \Longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$

**1.3** Si $f$ monotone : $f$ continue en $a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$

**1.4** Si $f$ monotone : $f$ continue en $a \Longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$

**2** *Majoration, minoration : soit* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $z_0 \in \mathbb{C}$

**2.1** $((a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0) \Longleftrightarrow |z_0| < R$

**2.2** $((a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée$) \Longrightarrow |z_0| \geqslant R$

**2.3** $r > R \Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n r^n$ DVG

**2.4** $r < R \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n r^n$ CVA

**3** *Comparaison : soit* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *de rayon* $R$ *on suppose que* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$

**3.1** $a_n \underset{+\infty}{=} O(2^n) \Longrightarrow R \geqslant \dfrac{1}{2}$

**3.2** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Longrightarrow R > 1$

**3.3** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante $\Longrightarrow R \geqslant 1$

**3.4** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{R}$

**4** *Série entière et régularité : soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de la variable réelle de rayon de convergence* $R = 1$ *telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ *convergent, et* $f$ *sa fonction somme*

**4.1** $f$ est de classe $C^\infty$ sur $[-1;1]$

**4.2** $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1;1[$

**4.3** $\forall x \in ]-R;R[,\ f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n+1)a_n x^{n-2}$

**4.4** $\forall x \in ]0;R[,\ \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}$

**Définition** Définir le rayon de convergence d'une série entière.

**Preuve** Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières à coefficients complexes de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|$. Montrer alors que $R_b \leqslant R_a$.

**Exercice 1** Soit $f : ]-1;1[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Calculer $f'(x)$ et en déduire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**Exercice 2** On considère $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^n}{n!} x^n$ dont on note $R$ le rayon de convergence. On note $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

**a.** Déterminer avec D'ALEMBERT la valeur de $R$.

**b.** Donner de domaine de définition de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**DEVOIR** 17 NOM : PRÉNOM :

**QCM** Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne $i$ colonne $j$ revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

| $i \cdot j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |

**Définition**

**Preuve**

**Exercice** 1

**Exercice** 2

| **DEVOIR** 17 | NOM : COCO | PRÉNOM : SINUS |
|---|---|---|

| $i\cdot j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | | X | | |
| 2 | | X | | X | |
| 3 | X | | X | | |
| 4 | | X | | X | |

**1.1** Vrai : caractérisation séquentielle pour une suite **1.2** Faux : il faudrait que ce soit vrai pour toutes les suites qui tendent vers $a$ **1.3** Vrai : la monotonie ne change rien **1.4** Faux : si la suite tend vers $a^+$, on n'a que la continuité à droite en $a$. Par exemple $f = \lfloor\ \rfloor$, $a = 0$ et $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pourtant $f$ n'est pas continue en $0$.
**2.1** Faux : juste une implication $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ de rayon $R = 1$, $z_0 = 1$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers $0$ **2.2** Vrai : du cours
**2.3** Faux : juste une implication ; $\sum z^n$ est de rayon $R = 1$ et $\sum 1$ DVG **2.4** Vrai : théorème du cours.
**3.1** Vrai : la rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n z^n$ vaut $\dfrac{1}{2}$ **3.2** Faux : $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ et le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n+1}$ vaut $1$ **3.3** Vrai : alors $a_n \underset{+\infty}{=} O(1)$ et le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ vaut $1$ **3.4** Faux : aucune raison que la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge.
**4.1** Faux : $f$ n'est a priori que continue sur $[-R; R]$ par convergence normale (prendre $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$) **4.2** Vrai : cours **4.3** Faux c'est $n(n-1)a_n x^{n-2}$ **4.4** Vrai : par convergence normale sur $[-x; x]$, on peut intégrer terme à terme et les monômes impairs ont une intégrale nulle.

**Définition** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de scalaire, on définit $E = \left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \mathrm{Sup}(E) \in \overline{\mathbb{R}_+}$

**Preuve** Soit $r \in E_b = \left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (b_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\right\}$ alors $(b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par définition. Ainsi, $\exists M \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |b_n|r^n \leqslant M$. A fortiori $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|r^n \leqslant |b_n|r^n \leqslant M$. Par conséquent, $E_b \subset E_a = \left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\right\}$ donc $R_a = \mathrm{Sup}(E_a) \geqslant \mathrm{Sup}(E_b) = R_b$.

**Exercice 1** La fonction $f$ est dérivable sur $]-1;1[$ par théorèmes généraux car $\forall x \in ]-1;1[,\ \dfrac{1+x}{1-x} > 0$.
Comme $f(x) = \dfrac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$, On calcule $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = g(x)$ pour $x \in ]-1;1[$ (série géométrique). Comme le rayon de $\sum x^{2n}$ vaut $R = 1$, d'après le cours, on peut primitiver terme à terme l'expression de $g(x)$ pour avoir celle de $G(x)$ où $G$ est la primitive qui s'annule en $0$ de $g$ sur $]-1;1[$. Ainsi, comme $G = f$ car $f(0) = 0$, on a $\forall x \in ]-1;1[,\ f(x) = G(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

**Exercice 2** $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{n+1}\sqrt{2\pi n}}{e^n\sqrt{2\pi(n+1)}} = e\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ car, d'après Stirling, on a $\dfrac{n^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e$ d'où, d'après le cours, $R = \dfrac{1}{e}$.
**b.** D'après le cours, $]-1/e; 1/e[ \subset \mathcal{D}_f \subset [-1/e; 1/e]$. On a $\mathcal{D}_f = [-1/e; 1/e[$ car :
- Si $x = 1/e$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^n}{n!}(1/e)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(1/e)^n$ diverge par Riemann.
- Si $x = -1/e$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^n}{n!}(-1/e)^n$ est alternée et, si $u_n = \dfrac{n^n}{n!}(1/e)^n$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

De plus, $\dfrac{u_1}{u_0} = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1} n! e^n}{n^n (n+1)! e^{n+1}} = \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - 1\right)$. Comme $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$ par concavité de $\ln$ sur $]-1; +\infty[$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^n}{n!}(-1/e)^n$ converge.
Le domaine de définition de $f$ est donc $[-1/e; 1/e[$.