DM 9 : KARAMATA ET MARCHE

PSI 1 2025/2026 **pour le mercredi 25 février 2026**

PARTIE 1 : Égalité de KARAMATA

Dans cette partie, on considère une suite de réels positifs ou nuls $(a_k)_{k\geqslant 0}$ telle que, pour tout $x \in]-1;1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ converge absolument. Lorsque $x \in]-1;1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et l'on suppose que

$$\sqrt{1-x}\, f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}.$$

1 Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite, lorsque $x \to 1^-$, de $\sqrt{1-x}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$.

2 Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

3 On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\pi}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

4 En déduire que $\displaystyle\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

5 Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\displaystyle\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt$.

Soit h la fonction définie sur $[0;1[$ par $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;e^{-1}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [e^{-1};1[\end{cases}$.

6 Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt$ et calculer sa valeur.

7 Soit $x \in [0;1[$. Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k h(x^k)$.

On admet l'égalité de KARAMATA : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}h(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt$.

8 À l'aide de ce résultat, que l'on appliquera à $x = e^{-\frac{1}{n}}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

PARTIE 2 : Un théorème taubérien

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ *décroissante. On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *et l'on suppose que* $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

9 Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - \lfloor \alpha n \rfloor$ et $n - \lfloor \beta n \rfloor$ soient non nuls.
Montrer que $\displaystyle\frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$.

10 Soit $\gamma > 0$. Donner un équivalent de $\lfloor \gamma n \rfloor$ et de $S_{\lfloor \gamma n \rfloor}$.

11 Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour n assez grand, $\displaystyle\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$.

12 En déduire que $\sqrt{n}\, a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

PARTIE 3 : Marche aléatoire

On considère l'ensemble $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ *des suites indexées par* $\mathbb{N}^*$ *et à valeurs dans* $\mathbb{Z}$*. Pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$*, on considère l'application* X_i*, de* Ω *dans* $\mathbb{Z}$*, qui à la suite* $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \Omega$ *associe* ω_i*. On admet qu'il existe sur* Ω *une tribu* $\mathcal{A}$ *et une probabilité* $\mathbb{P}$ *telles que les* X_i *sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans* $\{-1, 1\}$ *suivant toutes la même loi définie par* $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$*,* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ *(ainsi* $S_0 = 0$*), ce qui définit une famille de variables aléatoires sur* Ω*.*

On définit une application $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$*, en posant, pour* $\omega \in \Omega$*,* $T(\omega) = \mathrm{Min}\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = 0\}$*, ce minimum étant égal à* $+\infty$ *si* $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = 0\}$ *est vide. On admet que* T *est une variable aléatoire.*

Pour $n \in \mathbb{N}$*, on note l'évènement* $E_n = (T > n)$*. Si* $n \geqslant 1$*, on définit* $A_n^n = (S_n = 0)$ *et, pour tout entier* $k \in \{0, \dots, n-1\}$*, l'événement* $A_k^n = (S_k = 0) \cap \left(\bigcap\limits_{i=k+1}^{n} (S_i \neq 0) \right)$*.*

13 Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$, que

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}).$$

14 Montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et tout $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$. Indication : on pourra se ramener à la question précédente.

15 Si $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(E_{n-k})$.

Indication : on pourra écrire que $(S_k = 0) \cap \left(\bigcap\limits_{i=k+1}^{n} (S_i \neq 0) \right) = (S_k = 0) \cap \left(\bigcap\limits_{i=k+1}^{n} (S_i - S_k \neq 0) \right)$.

16 Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(E_{n-k}) = 1$.

17 Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) x^n \right) \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n \right) = \dfrac{1}{1-x}$.

18 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. Indication : on discutera sur la parité de n.

19 En déduire que, pour tout $x \in [0; 1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

20 Donner un équivalent de $\mathbb{P}(E_n)$. Indication : on utilisera les parties précédentes.

21 Montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

22 Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) x^n = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

23 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = 2n) = \dfrac{1}{4^n (2n-1)} \dbinom{2n}{n}$.

24 T admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.